

# MaOEA/d<sup>2</sup>: 一种基于双距离构造的高维多目标进化算法\*

谢承旺<sup>1,2</sup>, 郭华<sup>2</sup>, 韦伟<sup>2</sup>, 姜磊<sup>3</sup>



<sup>1</sup>(华南师范大学 数据科学与工程学院, 广东 汕尾 516600)

<sup>2</sup>(南宁师范大学 计算机与信息工程学院, 广西 南宁 530100)

<sup>3</sup>(湖南科技大学 计算机科学与工程学院, 湖南 湘潭 411202)

通信作者: 郭华, E-mail: guohua1996@nnu.edu.cn; 谢承旺, E-mail: chengwangxie@m.scnu.edu.cn

**摘要:** 传统的基于 Pareto 支配关系的多目标进化算法(MOEA)难以有效求解高维多目标优化问题(MaOP). 提出一种利用 PBI 效用函数的双距离构造的支配关系, 且无需引入额外的参数. 其次, 利用双距离定义了一种多样性保持方法, 该方法不仅考虑了解个体的双距离, 而且还可以根据优化问题的目标数目自适应地调整多样性占比, 以较好地平衡高维目标解群的收敛性和多样性. 最后, 将基于双距离构造的支配关系和多样性保持方法嵌入到 NSGA-II 算法框架中, 设计了一种基于双距离的高维多目标进化算法 MaOEA/d<sup>2</sup>. 该算法与其他 5 种代表性的高维多目标进化算法一同在 5-、10-、15-和 20-目标的 DTLZ 和 WFG 基准测试问题上进行了 IGD 和 HV 性能测试, 结果表明, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法具有较好的收敛性和多样性. 由此表明, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法是一种颇具前景的高维多目标进化算法.

**关键词:** 进化算法; 高维多目标优化问题; 多样性; 收敛性; 高维多目标进化算法

**中图法分类号:** TP301

中文引用格式: 谢承旺, 郭华, 韦伟, 姜磊. MaOEA/d<sup>2</sup>: 一种基于双距离构造的高维多目标进化算法. 软件学报, 2023, 34(4): 1523–1542. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6702.htm>

英文引用格式: Xie CW, Guo H, Wei W, Jiang L. MaOEA/d<sup>2</sup>: Many-objective Evolutionary Algorithm Based on Double Distances. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2023, 34(4): 1523–1542 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6702.htm>

## MaOEA/d<sup>2</sup>: Many-objective Evolutionary Algorithm Based on Double Distances

XIE Cheng-Wang<sup>1,2</sup>, GUO Hua<sup>2</sup>, WEI Wei<sup>2</sup>, JIANG Lei<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(School of Data Science and Engineering, South China Normal University, Shanwei 516600, China)

<sup>2</sup>(College of Computer and Information Engineering, Nanning Normal University, Nanning 530100, China)

<sup>3</sup>(School of Computer Science and Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** It is difficult to solve many-objective optimization problems (MaOPs) effectively by using the traditional multi-objective evolutionary algorithms (MOEAs) based on Pareto dominance relation. A dominance relation is proposed firstly by combing double distances of PBI utility function without introducing extra parameter. Secondly, a diversity maintenance method based on double distances is also defined, which not only considers the double distances of the individual, but also adaptively adjusts the weight of diversity according to the objective number of MaOP, so as to better balance the convergence and diversity of the solution set in many-objective space. Finally, the proposed dominance relation and diversity maintenance method are embedded into the framework of NSGA-II, and then a many-objective evolutionary algorithm based on double distances (MaOEA/d<sup>2</sup>) is designed. The MaOEA/d<sup>2</sup> is compared with other five representative many-objective evolutionary algorithms on the DTLZ and WFG benchmark functions with 5-,10-,15-, and 20-objective in terms of IGD and HV indicators. The empirical results show that MaOEA/d<sup>2</sup> can obtain better convergence and diversity. Therefore, the proposed MaOEA/d<sup>2</sup> is a promising many-objective evolutionary algorithm.

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61763010); 广西自然科学基金(2021GXNSFAA075011); 广西“八桂学者”项目(厅[2016]21 号); 湖南省教育厅创新平台开放基金(20K050); 广西研究生教育创新计划(YCSW2020194)

收稿时间: 2021-12-22; 修改时间: 2022-03-02; 采用时间: 2022-05-09; jos 在线出版时间: 2022-07-22

**Key words:** evolutionary algorithm; many-objective optimization problem; diversity; convergence; many-objective evolutionary algorithm

科学计算与工程实践中,存在大量需要同时优化多个目标的问题,即多目标优化问题(multi-objective optimization problem, MOP). MOP 各目标之间通常是相互冲突的,即改善其中一个目标,会引起其他一个或多个目标性能恶化.因此, MOP 一般并不存在唯一的最优解,使各目标同时得以最优化,其求解的结果往往是一组折中解,即 Pareto 解集或非劣解集<sup>[1]</sup>.由于 MOP 模型高度复杂,使得一般的数学解析方法难以有效求解,研究者通常利用计算机算法来获得其 Pareto 解集的一个逼近.基于群体搜索的进化算法(evolutionary algorithm, EA)在优化/搜索过程中不要求待解问题满足连续、可微等数学性质,而且它运行一次可获得一组近似解,这些特点使得 EA 算法在求解各类 MOP 中获得了长足发展,并涌现出大量经典的多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithm, MOEA).根据这些算法的主要特点,可将它们粗略地分成基于 Pareto 占优、基于性能指标和基于分解等几种主要的类型<sup>[2]</sup>.不仅如此,这些算法在求解目标数较少的 MOP (比如有 2-3 个目标)时表现出良好的性能,并获得了令人鼓舞的结果.

近年来,现实应用中不断出现要求同时优化更多目标的问题,如车联网中车载控制网络所面临的入侵检测问题<sup>[3]</sup>和救灾物资的选择与分配问题<sup>[4]</sup>等.这些问题的目标数通常超过 3,多目标优化领域的研究者一般将目标数大于等于 4 的 MOP 称为高维多目标优化问题(many-objective optimization problem, MaOP).作为一类重要的 MOP, MaOP 对传统的基于 Pareto 占优的 MOEA 提出了严峻挑战<sup>[5]</sup>,究其原因:首先,有限规模的种群中,非支配解的占比随目标数呈指数级增长,这样就严重削弱了利用 Pareto 支配进行选择的能力,导致算法最终退化完全随机算法;其次,高维目标种群中极易产生支配抵触解(dominance resistance solutions, DRS),而 DRS 是一些远离 Pareto 前沿的非支配解,它们会显著地恶化算法收敛性能;其三,当 Pareto 占优无法区分解个体优劣时,一些 MOEA 会利用辅助的基于密度的方法择优个体,亦即采用 ADP (active density promotion)机制进行环境选择.因此,在 DRS 和 ADP 的共同作用下,这些算法获得的近似解集将难以收敛到待解问题真实的 Pareto 前沿上.

鉴于传统的 Pareto 占优是一种颇为严格的支配关系,其在高维目标空间中可扩展性差,为了有效求解 MaOP,研究者从不同角度研究如何利用进化算法求解 MaOP 问题.例如, Gong 等人<sup>[6]</sup>利用元-目标(meta-objective, MeO)方法求解高维多目标优化问题. MeO 分开度量解个体的收敛性和多样性,它为基于 Pareto 支配的 MOEA 求解 MaOP 提供了一般性的方法.还有一些研究者从改进支配关系的角度出发,提出若干改进的支配方法,以改善 MOEA 求解 MaOP 的性能.根据已有改进支配关系的主要思想,可将它们大致划分为如下几类.

(1) 修改个体目标函数值:这类方法通过改变个体的目标函数值来扩大个体的支配区域,从而达到修改 Pareto 支配关系之目的. Yang 等人<sup>[7]</sup>提出了 grid 支配关系,该支配关系根据个体的目标值,自适应地确定网格的坐标点,然后利用网格坐标而非目标值来确定支配关系.但 grid 支配以个体为中心的网格计算方式无法保证种群收敛,而且基于 grid 支配的算法性能往往对目标空间划分参数  $div$  较敏感,需要反复实验确定合适的  $div$  值.必须指出:修改目标值的方法虽然能扩大解个体支配区域和降低种群中非支配解的比例,但这类方法一般需要设置参数,而且算法性能对参数敏感;其次,修改个体目标值实际上改变了个体在目标空间中的位置,影响了支配关系判别的准确性,容易导致种群无法收敛到真实 Pareto 前沿.

(2) 目标计数方法:这类方法在确定个体占优关系时,考虑个体的目标值优于、劣于或等于对方的目标数. Zou 等人<sup>[8]</sup>提出一种  $L$ -支配关系,该支配关系考虑两个解分别优于对方的目标数之差以及它们在目标空间与原点的距离.当个体  $x$  优于  $y$  的目标数比  $y$  优于  $x$  的目标数多,且  $x$  与原点的距离比  $y$  与原点的距离更近,则认为  $x$   $L$ -支配  $y$ .  $L$ -支配不仅考虑了目标优劣的相对计数,而且考虑了个体与理想点之间的距离,进一步强化了收敛性,但  $L$ -支配没有考虑解群的分布性.总体上,目标计数的方法仅考虑个体的目标数目而非目标值,因而无需执行规范化操作,这样不仅降低了算法的复杂性,还能简化算法设计.但必须指出:在这类方法中,有一些支配关系并不满足传递性,在其个体支配关系图中可能存在环结构,从而影响了支配关系的有效性.

(3) 改进 Pareto 最优性的方法: 这类方法的主要思想是对传统的 Pareto 支配关系松弛化, 以扩大个体支配区域. 在这类方法中, GPO (generalized Pareto optimality) 最优性<sup>[9]</sup>是其中的典型范例之一. GPO 是传统 Pareto 最优性的一般形式, 它的基本思想是: 随着 MaOP 问题目标数的增加, 逐渐扩大解个体的支配区域, 使它能在较大范围的目标维度上获得一致水平的支配关系区分能力. GPO 利用参数  $\phi$  控制个体在各个目标方向上扩大支配区域的程度, 以改善算法的收敛性, 但它在多样性保持方面仍有待提高.

(4) 利用角度的方法: 近年来, 在多目标进化优化中, 利用角度信息实施环境选择已屡见不鲜. 例如: Gong 等人<sup>[10]</sup>利用目标向量之间夹角的余弦定义余弦相似度, 并基于余弦相似度定义种群个体的分布性. 但这种基于目标向量之间的角度来定义分布性的方法关注的是种群的分布性而非收敛性. Li 等人<sup>[11]</sup>利用角度来确定两个解之间的支配关系, 即: 如果两个个体间的夹角大于给定的阈值, 那么它们视为彼此非支配的. Jiang 等人<sup>[12]</sup>在进化种群的搜索方向上, 利用解个体的角度和权重信息判断它们的相似性, 即个体间的角度越大, 相似性越低. 文献[13]利用最大向量角度优先的原则保持解群分布的宽广性和均匀性, 并通过有条件地剔除较差解来增强种群的收敛性. 最近, 文献[14]提出一种基于角度的支配关系, 即 AD 支配关系. 该支配利用参数  $k$  控制解个体支配区域, 且  $k$  值越小, 个体的支配区域越大. 需要指出: 利用角度的方法较适于维持高维目标解群的分布性, 且对一些具有不规则 Pareto 前沿的问题亦有效, 但基于角度的方法强调多样性而非收敛性. Xie 等人<sup>[15]</sup>提出一种动态角度向量支配关系, 以动态地刻画进化种群在高维目标空间的分布状况, 实验表明了该支配方法具有明显的优势.

(5) 利用小生境的方法: 这类方法通过在目标空间定义适当形式的小生境, 并在小生境内强调个体的收敛性, 而其中, 小生境的大小一般通过权重向量、参考点集或自适应等方式确定. Tian 等人<sup>[16]</sup>提出一种增强的支配关系 SDR (strengthened dominance relation), SDR 采用基于目标向量角度的小生境技术来判断解个体之间的支配关系, 并自适应地确定小生境大小(即  $\bar{\theta}$  值). Yuan 等人<sup>[17]</sup>受基于分解的 MOEA 思想的启发, 提出了  $\theta$ -支配. 这种支配方法将每个解个体与其最邻近的权重向量相关联, 这里, 每一个权重向量实际上对应一个小生境. 同一小生境内个体比较时, 既要考虑它们的收敛性, 又要考虑其分布性.  $\theta$ -支配利用惩罚参数  $\theta$  调节收敛性与分布性. 该支配方法既能引导解个体沿权重向量方向收敛, 还能维持种群多样性. Elarbi 等人<sup>[18]</sup>将 Pareto 支配和基于分解的思想相结合, 提出了 RP-支配. 该支配首先利用参考点确定小生境, 然后对同一小生境内具有较小  $d_1$  距离的个体判为胜出者, 而对于不同小生境内的个体, 则既要考虑它们的  $d_1$  距离, 又要考虑它们所处小生境的拥挤度, 最后, 这两方面均较优者胜出. 但是, RP-支配定义存在关联到相同参考点和不同参考点判别条件不充分的问题, 因此可能会产生不合理的支配结果, 影响了算法收敛性和多样性的平衡.

综上, 已有的支配方法尚存不足. 首先, 一些支配方法强调收敛性而多样性不足; 一些支配方法偏重多样性而收敛性较差. 然而, 在高维多目标进化优化中, 如何有效地平衡种群的收敛性和多样性至关重要, 能够显著地影响算法性能. 其次, 已有的支配方法大多需要设置参数, 而且算法性能通常对参数敏感. 针对不同的待解问题 and 应用场景, 使用者需要反复实验以寻找合适的参数.

基于惩罚的边界相交方法 (penalty-based boundary intersection, PBI)<sup>[19]</sup>可以利用其  $d_1$  距离表征解个体的收敛性, 运用其  $d_2$  距离表征解个体的多样性, 而高效的高维多目标进化算法一般能较好地平衡收敛性和多样性. 有鉴于此, 通过恰当地运用 PBI 函数的  $d_1$  和  $d_2$  距离构造满足高维多目标进化算法要求的支配关系及其多样性保持方法, 具有合理性和创新性.

具体地, 首先提出一种结合双距离的支配关系 CDD (dominance relation combing double distances). CDD-支配关系利用 PBI 函数的  $d_1$ ,  $d_2$  距离构造, 并采用惩罚参数  $1/m$  ( $m$  表示 MaOP 目标数) 自适应地平衡高维目标解群的收敛性和多样性. 由于参数  $1/m$  仅取决于 MaOP 的目标数目, 其并未引入额外参数. 不仅如此, 还利用 PBI 函数的  $d_1$ ,  $d_2$  距离构造一种多样性保持方法 DM-DD (diversity maintenance based on double distances), 并将其应用于高维多目标进化算法环境选择. 在上述基础上, 将 CDD-支配和 DM-DD 方法嵌入到 NSGA-II 算法<sup>[20]</sup>框架, 以分别替代原始算法的 Pareto 支配和拥挤距离度量, 构造一种基于双距离的高维多目标进化算法 MaOEA/d<sup>2</sup> (many-objective evolutionary algorithm based on double distances). 新算法与 5 种高效的高维多目标

进化算法一同在 DTLZ<sup>[21]</sup>和 WFG<sup>[22]</sup>系列测试问题上测试其 IGD (inverted generational distance)<sup>[23]</sup>和 HV (hypervolume)<sup>[24]</sup>指标性能. 结果表明, MaOEA/d<sup>2</sup>算法具有显著较优的收敛性与多样性.

本文的第 1 节是预备知识. 第 2 节描述 CDD-支配关系及其性质. 第 3 节介绍 DM-DD 方法. 第 4 节是 MaOEA/d<sup>2</sup> 流程及时间复杂性分析. 第 5 节是本文的实验部分. 最后是结论.

### 1 预备知识

以最小化 MOP 问题规范化目标空间为例, 利用 PBI 方法求解 MOP 需要提供一组均匀分布的权值向量  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  ( $N$  为权值向量的数目), 它们从原点出发, 沿着各自的方向延伸, 并与可达目标空间(attainable objective set)的最左下边界相交. 如此产生的一组相交点可视为对 Pareto 前沿(Pareto front, PF)的逼近, 如图 1 所示.

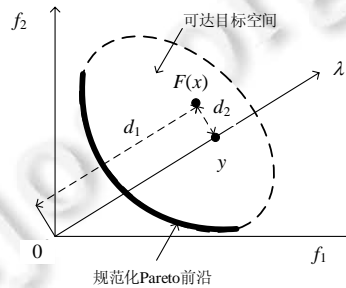


图 1 基于惩罚的边界相交法示意图

通常, 如果权值向量的数目设置较大且合理, 那么 PBI 方法能够产生一组分布可能不均匀但能很好逼近真实 PF 的目标解向量. 具体地, PBI 方法采用式(1)的方式计算:

$$\begin{cases} \min g^{pbi}(x | \lambda, z^*) = d_1 + \theta d_2 \\ \text{s.t. } x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中,  $\theta > 0$  是预设的惩罚参数,  $\lambda$  和  $z^*$  分别为权值向量和参考点. 对于最小化 MOP 规范目标空间而言,  $z^*$  一般为原点, 而  $d_1$  和  $d_2$  则采用下面的方式计算:

$$\begin{cases} d_1 = \|F(x)^T \lambda\| / \|\lambda\| \\ d_2 = \left\| F(x) - d_1 \left( \frac{\lambda}{\|\lambda\|} \right) \right\| \end{cases} \tag{2}$$

图 1 以 2-目标的最小化 MOP 为例来解释 PBI 函数的原理, 其中,  $F(x)=(f_1(x), f_2(x))$  为可达目标空间内任意一点.  $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$  为从原点出发、方向为  $\lambda$  的权值向量. 可达目标空间的最左下方的粗线表示 MOP 规范的 PF. 点  $y$  为  $F(x)$  在权值向量  $\lambda$  上的投影,  $d_1$  表示点  $y$  与原点之间的距离,  $d_2$  表示  $F(x)$  与权值向量  $\lambda$  之间的距离.

从图 1 可知: 较小的  $d_1$  表示解个体距离 PF 更近, 意味着个体的收敛性越好; 较小的  $d_2$  表示解个体越靠近权值向量, 意味着目标解点的分布性越好, 而当  $d_2=0$  时, 则表示目标解位于权值向量的方向上. 如果  $\theta$  参数设置得合适, 则 PBI 方法可以获得较好的收敛性与多样性; 而太大或太小的  $\theta$  值通常会恶化 PBI 方法的性能<sup>[17]</sup>. 因此, 设置合适的  $\theta$  值对 PBI 方法的性能十分重要.

### 2 结合双距离的支配关系

#### 2.1 CDD-支配关系

由于已有改进的支配关系在平衡收敛性和多样性方面尚存不足, 而且它们一般需要设置合适的参数以获得较好性能, 使用不方便. 鉴于此, 在 PBI 效用函数的启发下, 提出一种结合双距离的 CDD-支配关系. 与现存的支配关系相比, CDD-支配关系具有如下特点: (1) 利用 PBI 函数的  $d_1$  和  $d_2$  距离构造支配关系, 显式地考虑

了多目标/高维多目标进化算法的收敛性和多样性; (2) CDD-支配根据 MaOP 的目标数自适应地平衡收敛性与多样性, 无需额外设置参数; (3) CDD-支配关系满足反自反、反对称和传递性, 其能在目标空间解群上建立起严格的偏序关系. 下面给出 CDD-支配的定义及其性质.

**定义 1(CDD-支配).** 给定种群  $P$  和权值向量集合  $A$ , 将  $P$  中各个体关联到  $A$  中与其最邻近的权值向量, 并根据 PBI 函数计算各个体的  $d_1$  和  $d_2$  距离. 称个体  $i$  CDD-支配个体  $j$  (记为  $i \prec_{CDD} j$ ), 当且仅当满足下列条件之一.

- 1) 个体  $i$  Pareto 支配  $j$ ;
- 2) 个体  $i$  和  $j$  彼此 Pareto 非支配, 但  $i$  和  $j$  关联到同一权值向量, 且它们的  $d_1, d_2$  距离满足  $d_1(i) < d_1(j)$  且  $d_1(j) - d_1(i) \geq 1/m[d_2(i) - d_2(j)]$ , 或  $d_1(i) > d_1(j)$  且  $d_1(i) - d_1(j) < 1/m[d_2(j) - d_2(i)]$ , 或  $d_1(i) = d_1(j)$  且  $d_2(i) < d_2(j)$ . 这里,  $m$  表示 MaOP 目标数目.

**定义 2(CDD-非支配).** 设个体  $i$  和  $j$  是种群  $P$  中任意两个个体, 若  $i \not\prec_{CDD} j \wedge j \not\prec_{CDD} i$ , 则称  $i$  和  $j$  彼此 CDD-非支配.

为直观地理解 CDD-支配方法, 图 2 以 2-目标空间为例 (即  $m=2$ ), 解释 CDD-支配中的第 2 种情形, 即两个个体是 Pareto 非支配关系, 但它们关联到相同的权值向量.

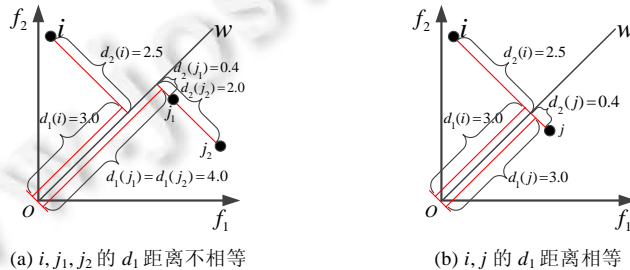


图 2 关联到相同权值向量的 Pareto 非支配个体能否满足 CDD-支配关系的示例

在图 2(a)中, 个体  $i, j_1$  和  $j_2$  彼此为 Pareto 非支配关系, 判断  $j_1 \prec_{CDD} i$  过程如下: 首先考察个体  $i, j_1$  的  $d_1$  距离, 这里,  $d_1(i) < d_1(j_1)$ ; 随后, 进一步考察个体  $i$  和  $j_1$  的  $d_2$  距离, 不难发现, 它们满足如下关系, 即  $d_1(j_1) - d_1(i) < 1/m[d_2(i) - d_2(j_1)]$ . 根据定义 1, 可判定  $j_1 \prec_{CDD} i$ . 同理, 可判定  $i \prec_{CDD} j_2$  成立. 图 2(b)示意了当两个 Pareto 非支配个体  $i$  和  $j$  的  $d_1$  距离相等时, 由于  $j$  的  $d_2$  距离小于  $i$  的  $d_2$  距离, 因此,  $j \prec_{CDD} i$  成立.

由于 CDD-支配既考虑了个体的双距离值 ( $d_1$  和  $d_2$ ), 还考虑了个体间双距离的差值, 其有利于进一步提高该支配关系区分 Pareto 非劣解的能力, 可增强种群的选择压力.

### 2.2 CDD-支配关系的性质

根据 CDD-支配的定义, 可证明其满足反自反、反对称、传递性和严格偏序关系等性质. 鉴于 Pareto 支配是一种严格偏序关系, 因此, 这里只证明 CDD-支配在满足条件 2) 时, 其亦具有上述性质.

**性质 1(反自反).** 设个体  $i$  是种群  $P$  的任意个体, 在 CDD-支配意义下, 其满足反自反性, 即  $i \not\prec_{CDD} i$ .

证明: 反证法. 假设  $i \prec_{CDD} i$ , 根据 CDD-支配定义, 有  $d_1(i) < d_1(i)$ , 或  $d_1(i) > d_1(i)$ , 或  $d_1(i) = d_1(i)$  且  $d_2(i) < d_2(i)$  三者之一得以满足. 但对于个体  $i$  的  $d_1$  和  $d_2$  距离而言, 其显然不满足上述 3 种情形中的任一种情形, 因而假设不成立, 故 CDD-支配关系满足反自反性. □

**性质 2(反对称).** 设个体  $i$  和  $j$  是种群  $P$  中任意两个解, 如果  $i \prec_{CDD} j$ , 则  $j \not\prec_{CDD} i$  成立.

证明:

- 1) 若  $i \prec_{CDD} j$ , 根据 CDD-支配定义, 有  $d_1(i) < d_1(j)$  且  $d_1(j) - d_1(i) \geq 1/m[d_2(i) - d_2(j)]$ , 或  $d_1(i) > d_1(j)$  且  $d_1(i) - d_1(j) < 1/m[d_2(j) - d_2(i)]$ , 或  $d_1(i) = d_1(j)$  且  $d_2(i) < d_2(j)$  三者之一得以满足;
- 2) 若  $j \prec_{CDD} i$ , 根据 CDD-支配定义, 有  $d_1(j) < d_1(i)$  且  $d_1(i) - d_1(j) \geq 1/m[d_2(j) - d_2(i)]$ , 或  $d_1(j) > d_1(i)$  且  $d_1(j) - d_1(i) < 1/m[d_2(i) - d_2(j)]$ , 或  $d_1(j) = d_1(i)$  且  $d_2(j) < d_2(i)$  三者之一成立.

显然, 情形 1)和情形 2)相悖.

因此, 如果  $i \prec_{CDD} j$ , 则  $j \not\prec_{CDD} i$  成立. 即, CDD-支配关系满足反对称性. □

**性质 3(传递性).** 设个体  $i, j$  和  $k$  是种群  $P$  中任意的 3 个个体, 若  $i \prec_{CDD} j$  且  $j \prec_{CDD} k$ , 则  $i \prec_{CDD} k$  成立.

证明: 由于个体的  $d_1$  距离在 CDD-支配定义之条件 2)中可能出现大于、小于和等于另一个体  $d_1$  距离之情形, 因而证明个体  $i, j$  和  $k$  之间的传递性则会出现 9 种组合. 下面以  $d_1(i) < d_1(j)$  为例给出证明过程, 其余情形可类推之. 若  $i \prec_{CDD} j$ , 则有  $d_1(i) < d_1(j)$  且  $d_1(j) - d_1(i) \geq 1/m[d_2(i) - d_2(j)]$ , 或  $d_1(i) > d_1(j)$  且  $d_1(i) - d_1(j) < 1/m[d_2(j) - d_2(i)]$ , 或  $d_1(i) = d_1(j)$  且  $d_2(i) < d_2(j)$  这 3 种情形之一得以满足. 若  $j \prec_{CDD} k$ , 则类似. 现证明其中一种情形: 若  $d_1(i) < d_1(j)$  且  $d_1(j) < d_1(k)$ , 则有  $d_1(i) < d_1(k)$  成立; 同时, 若  $d_1(j) - d_1(i) \geq 1/m[d_2(i) - d_2(j)]$  且  $d_1(k) - d_1(j) \geq 1/m[d_2(j) - d_2(k)]$  成立, 两式相加可得  $d_1(k) - d_1(i) \geq 1/m[d_2(i) - d_2(k)]$ . 因而  $j \prec_{CDD} k$  成立. 其余 8 种情形可用类似方法证明  $j \prec_{CDD} k$  成立. 综上, CDD-支配关系满足传递性. □

**性质 4(严格偏序关系).** CDD-支配定义了一种严格偏序关系.

证明: 根据上述论证可知, CDD-支配关系满足反自反、反对称和传递性, 因此, CDD-支配关系是一种建立在种群  $P$  上的严格偏序关系. □

由于 CDD-支配是一种严格偏序关系, 因此, 利用基于 CDD-支配的非支配排序方法对种群进行分层后, 可保证层级较高的非支配层上个体要优于层级较低的非支配层上的个体.

### 3 利用双距离构造的多样性保持方法

当前, 一些 MOEA 利用非支配排序方法对种群进化划分, 然后依照非支配层的等级从高到低选择一定数目的个体进入下一代, 且保持种群规模不变. 而当某个非支配层只能从中择优部分个体时, 算法需要利用某种环境选择策略进行选择. 例如: NSGA-II<sup>[20]</sup>利用 2-近邻拥挤距离策略选择较稀疏个体; NSGA-III<sup>[25]</sup>在小生境(通过均匀分布的参考点构造)内选择个体; RPD-NSGA-II<sup>[18]</sup>通过计算 PBI 函数中的  $d_2$  距离选择个体. 需要指出: 上述多样性保持方法大都强调分布性, 而很少考虑收敛性, 这种择优方式不利于改善收敛性. 进一步地, 这里利用 PBI 函数的双距离(即  $d_1$  和  $d_2$ )构造一种多样性保持方法 DM-DD. 该方法在所考虑的最末非支配层中选择个体时, 将计算个体的双距离值  $dd$ , 且个体的  $dd$  值越小, 则个体进入下一代的概率就越大. 具体地, 设  $i$  为所考虑最末非支配层上的任意个体, 则  $i$  的双距离值  $dd(i)$  可计算如下:

$$dd(i) = d_1(i) + d_2(i)/m \tag{3}$$

这里的  $m$  为 MaOP 目标数.

DM-DD 方法考虑了个体的  $d_1$  和  $d_2$  距离, 其环境选择的方式要比 RPD-NSGA-II 算法仅考虑  $d_2$  距离来筛选个体的粒度更细. 图 3 解释了结合双距离的方法择优个体的优势. 假设个体  $i$  和  $j$  是所考虑最末非支配层上个体, 如果仅计算个体的  $d_2$  距离, 则  $i$  胜出; 但如果按照公式(3)的方式考虑个体的  $dd$  值, 若  $dd(j) < dd(i)$ , 则  $j$  胜出.

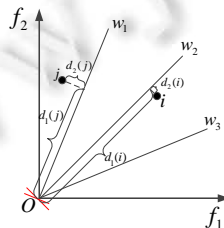


图 3 考虑双距离比仅考虑  $d_2$  距离选择个体的粒度更细

需要指出, 公式(3)计算个体  $dd$  值的方法体现了在高维目标空间中自适应地平衡收敛性与多样性的思想. 其原因在于: 有限规模的种群个体分布在高维目标空间中, 其分布的稀疏性将随目标空间维度的增加而急剧扩大. 因而在维度越高的目标空间中, 种群个体的分布性将更易于自然地获得. 在这种情况下, 需要更多地强调收敛性而降低多样性占比. 基于此, 这里定性地将方程(3)右边第 2 项多样性部分的占比考虑随目标维度  $m$

增大而降低, 实质上自动增大了收敛性的比重. 此外,  $m$  越大, 意味着多样性占比越低, 收敛性比重越大, 从而起到了自适应调整的作用.

## 4 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法

### 4.1 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法流程

为较好地平衡高维多目标进化算法的收敛性和多样性, 改善算法的综合性能, 这里将 CDD-支配关系和 DM-DD 多样性方法嵌入到 NSGA-II 算法框架, 分别替代其原有的 Pareto 支配关系和拥挤距离度量方法, 设计一种基于双距离构造的高维多目标进化算法 MaOEA/d<sup>2</sup>. 图 4 以 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法第  $t$  代为例, 直观地描述了算法的运行机制.

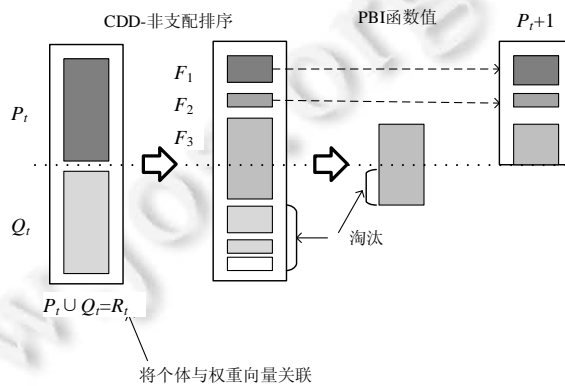


图 4 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法运行机制

如图 4 所示: MaOEA/d<sup>2</sup> 算法运行第  $t$  代时, 将第  $t$  代父种群  $P_t$  与其子代种群  $Q_t$  进行合并, 以产生联合种群  $R_t$ ; 然后对种群  $R_t$  执行基于 CDD-非支配排序, 由此产生从高到低的若干非支配层  $F_1, F_2, F_3, \dots$ . 通常, 非支配层级高的个体要优于层级低的个体. 随后, 算法进入环境选择阶段, 假设种群规模为  $N$  (其值在算法执行过程中保持不变), 根据非支配层级从高到低的顺序依次选择  $F_1, F_2, F_3, \dots$  中的个体进入下一代种群  $P_{t+1}$  中. 在此过程中, 如果出现了全部选择某个非支配层, 比如  $F_k$  层, 则种群规模超过  $N$ , 因而只能在  $F_k$  层选择部分个体进入下一代. 此时需要对  $F_k$  层上的个体计算它们的  $dd$  值, 然后按  $dd$  值从小到大的顺序选部分个体置于下一代种群  $P_{t+1}$  中. 如此反复, 直至算法满足终止条件.

以下是 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法的流程.

**算法.** MaOEA/d<sup>2</sup> 算法.

输入: 种群规模  $N$ , 决策变量数目  $D$ , MaOP 问题的目标数目  $m$ , 最大迭代次数  $T_{maxgen}$ ;

输出: 最末代种群  $P_{maxgen}$ .

1. 初始化

1.1 初始化迭代计数器  $t=0$ ;

1.2 在待解问题的可行决策空间内随机产生  $N$  个初始点, 形成初始化种群  $P_0$ , 并计算  $P_0$  中各解点的目标值向量  $\{F_1(0), \dots, F_N(0)\}$ ;

1.3 利用两层参考向量方法产生一定数目的权值向量(参考点):

$$\Lambda \leftarrow \text{two\_layered\_generation\_method}(m, H_1, H_2);$$

2. **WHILE** ( $t < T_{maxgen}$ )

3. 构建交配池:  $P_t^{mat} = \text{Mating\_selection}(P_t)$ ;

4. 重组运算:  $P_t^{rec} = \text{Recombination}(P_t^{mat})$ ;

5. 变异运算:  $P_t^{offs} = \text{Mutation}(P_t^{rec})$ ;

6. 合并子种群和父种群:  $R_t = P_t \cup P_t^{offs}$ ;
7. 计算最小目标值向量  $F_{\min}$ ;
8. 计算最大目标值向量  $F_{\max}$ ;
9. 归一化处理:  $R_t \leftarrow (R_t, F_{\min}, F_{\max})$ ;
10. 计算个体的  $d_1$  距离;
11. 计算各个体的  $d_2$  距离;
12. 利用  $d_2$  距离将各个体与它的最近参考向量相关联;
13. 保留  $R_t$  中的边界点;
14. 利用基于 CDD-支配的非支配排序方法划分  $R_t$  以获得若干非支配层:  $[F_1, F_2, \dots] \leftarrow CDD\text{-based\_nondomination\_sorting}(R_t)$ ; //  $F_i$  表示第  $i$  层 CDD 非劣支配层.
15. 确定最小的  $k$  值, 使其满足  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| \geq N$ ;
16. **IF**  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| > N$  **THEN**
17. 计算最末 CDD 非劣支配层  $F_k$  上各个体的  $dd$  值, 并从  $F_k$  层上删除  $(|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| - N)$  个具有较大  $dd$  值的个体;
18. **END IF**
20.  $P_{t+1} = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k$ ;
21. 更新迭代计数器:  $t = t + 1$ ;
22. **END WHILE**
23. 输出最末代种群  $P_{maxgen}$ .

MaOEA/d<sup>2</sup> 算法第 1 步产生规模为  $N$  的初始种群  $P_0$ , 并利用两层参考向量产生方法<sup>[18,25]</sup>生成有限规模的参考向量集合  $A$ . 算法从第 2 步开始进入循环阶段, 第 3-5 步利用仿二进制交叉和多项式变异方法产生子代种群, 第 6 步合并父代和子代种群, 组成联合种群  $R_t$ . 第 7-9 步对  $R_t$  实施归一化处理. 第 10 步、第 11 步计算各个体的双距离, 并将它们关联至相应的参考向量. 第 13 步保留边界解, 以增强算法的多样性. 第 14-19 步利用基于 CDD-支配的非支配排序方法对  $R_t$  进行划分, 以获得若干非劣支配层. 然后, 根据非劣层的等级以及利用 DM-DD 方法择优一定数目的个体组成下一代  $P_{t+1}$ . 算法的第 23 步输出最末代种群  $P_{maxgen}$ , 并将其视为算法获得的近似解集.

下面对 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法的时间复杂度进行分析: 设  $N$  表示种群规模,  $m$  表示 MaOP 的目标数, 决策空间维度为  $n$ , 算法最大的迭代次数为  $T_{maxgen}$ , 则 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法的时间复杂性分析如下.

1. 步骤 1 的初始化阶段包括 3 个子步, 其中, 初始化迭代器的时间为  $O(1)$ , 生成初始群体  $P_0$  的时间复杂度为  $O(Nn)$ , 计算各个体目标函数值向量的时间是  $O(Nm)$ . 因此, 第 1 步时间复杂度为  $O(1) + O(Nn) + O(Nm) = \max(O(Nn), O(Nm))$ ;
2. 算法从第 2 步进入循环, 循环体内构建交配池、重组运算、变异运算以及合并父代和子代种群的时间复杂度均为  $O(Nn)$ . 步骤 7-步骤 9 计算最小和最大的目标函数值向量以及归一化过程的时间均为  $O(Nm)$ . 步骤 10-步骤 12 的时间复杂度为  $O(N^2)$ , 步骤 13 保留边界点的时间为  $O(Nm)$ . 步骤 14 利用基于 CDD-支配的非支配排序方法对  $R_t$  进行分层的时间复杂度为  $O(N^2m)$ . 步骤 15-步骤 21 的时间复杂度为  $O(Nm)$ . 由于算法最多迭代  $T_{maxgen}$  次, 因此循环体内的时间复杂度为  $O(mN^2T_{maxgen})$ ;
3. 第 23 步输出最末代种群的时间复杂度为  $O(Nm)$ .

综上, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法的时间复杂度为  $\max(O(Nn), O(Nm)) + O(mN^2T_{maxgen}) + O(Nm) = O(mN^2T_{maxgen})$ . 不难看出, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法时间复杂度取决于其所采用的非支配排序方法. 因此, 设计更高效的非支配排序算法对种群实施有效分层值得深入研究.



## 5 实验与分析

### 5.1 对比算法

为验证 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法的性能, 这里选取 5 种高效的高维多目标进化算法, 如 RPD-NSGA-II<sup>[18]</sup>、NSGA-III<sup>[25]</sup>、RVEA<sup>[26]</sup>、MaOEA/IGD<sup>[27]</sup>和 NSGA-II/SDR<sup>[16]</sup>, 作为对比算法以检验本文算法的性能. 选择上述算法作为对比算法的主要原因在于:

- 1) RPD-NAGA-II 算法与 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法同属改进支配关系的一种算法类型, 前者利用 PBI 函数的  $d_1$  距离设计支配关系, 并运用  $d_2$  距离构造多样性保持方法; 后者同时利用 PBI 函数的  $d_1$ ,  $d_2$  距离构造支配关系和多样性策略. 两种算法的设计思想较类似, 且均未引入额外参数;
- 2) NSGA-III 作为经典的高维多目标进化算法, 其核心在于利用 Pareto 支配关系和运用参考点(参考向量)方法生成小生境, 其在求解 MaOP 中表现了显著较优的性能, 而且亦未引入额外参数;
- 3) RVEA 利用基于角度惩罚距离(angle-penalized distance, APD)的方法平衡高维目标空间中解个体的收敛性与多样性. RVEA 与 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法相类似的是, 它们都将无法区分优劣的个体通过标量化方法进行转化后实现比较;
- 4) MaOEA/IGD 算法是一种基于性能指标的高维多目标进化算法, 其核心在于利用基于分解的最差点估计方法(DNPE)估计最差点. 与 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法类似, MaOEA/IGD 利用一种兼容 Pareto 支配的非支配排序方法对种群进化划分. 这里选用 MaOEA/IGD 算法作为基于性能指标类型算法的典型范例;
- 5) NSGA-II/SDR 算法通过设计一种增强支配关系和一种自适应小生境策略平衡算法的收敛性和多样性, 且亦未引入额外参数. 其与 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法在设计动机上具有一定的相似之处.

### 5.2 测试问题

实验利用 5-, 10-, 15-和 20-目标的 DTLZ1~DTLZ7<sup>[21]</sup>以及 WFG1~WFG9<sup>[22]</sup>等测试实例作为基准测试函数, 考察算法的性能. 采用 DTLZ 和 WFG 系列函数的原因是: (1) 这两个系列测试问题的目标数和决策变量数是可扩展的; (2) DTLZ 和 WFG 系列问题的真实 PF 是已知的, 而且它们的 PF 具有不同的难度特征, 因而对算法逼近真实 PF 构成了巨大挑战. 表 1 列出了这两个系列测试问题的难度特征.

表 1 DTLZ 和 WFG 系列测试问题的难度特征

测试问题	特征描述
DTLZ1	线性、多模态
DTLZ2	凹型
DTLZ3	凹型、多模态
DTLZ4	凹型、有偏
DTLZ5	连续均匀的曲线
DTLZ6	连续均匀的曲线
DTLZ7	混合、不连续、多模态、比例缩放
WFG1	混合、有偏、比例缩放
WFG2	凸型、不连续、多模态、不可分、比例缩放
WFG3	线性、退化、不可分、比例缩放
WFG4	凹型、多模态、比例缩放
WFG5	凹型、欺骗、比例缩放
WFG6	凹型、不可分、比例缩放
WFG7	凹型、有偏、比例缩放
WFG8	凹型、有偏、不可分、比例缩放
WFG9	凹型、有偏、多模态、欺骗、不可分

### 5.3 性能指标

为评估 MOEA 算法的收敛性和多样性, 这里采用两个常用的性能指标, 即超体积指标(hypervolume, HV)<sup>[24]</sup>和反转世代距离(inverted generational distance, IGD)<sup>[23]</sup>来评估它们的性能, 其原因在于, HV 和 IGD 均能同时度量近似解集的收敛性和多样性.

HV 指标通过计算目标空间中非劣解集覆盖区域的大小来评估算法的性能. HV 指标也称为 Lebesgue 测度, 它在理论上具有良好的数学性质, 即: 在所有的一元指标中, HV 是一种能够判定非支配解集  $X$  不比另一个非支配解集  $Y$  要差的方法, 而且它能与 Pareto 支配保持一致. 对于一个近似的 Pareto 解集  $A$ , 其 HV 值计算如下:

$$HV(A) = \lambda(\cup_{p \in A} \{x \mid p \succ x \succ x_{ref}\}) \quad (4)$$

其中,  $\lambda$  为 Lebesgue 测度,  $x_{ref}$  为参照点. 对于 2-目标问题, HV 是坐标区域的面积; 对于 3-目标问题, HV 是三维空间构成的体积; 对于 4 维及以上目标的问题, HV 表示超体值. 通常, HV 值越大, 表示解集的质量越高, 亦即解集的收敛性与多样性就越好.

IGD 指标度量了真实 Pareto 前沿到所获近似 Pareto 前沿之间的距离. 由于实验中的测试问题的真实 PF 是已知的, 通过在真实 PF 上均匀采样多样性的解点, 计算这些采样点到算法获得的近似 Pareto 解点之间的距离则既能反映解集的收敛性, 又能反映多样性. 一般而言, IGD 指标值越小, 表示近似解集的收敛性和多样性越好. 假设  $P$  是 MOP 问题真实 PF 的代表解集,  $A$  是算法获得的近似 Pareto 解集, IGD 指标可利用公式(5)进行计算:

$$IGD(A, P) = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} Dist_i \quad (5)$$

其中,  $Dist_i = \min_{j=1}^{|A|} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left( \frac{f_k(p_i) - f_k(a_j)}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \right)^2}$  为归一化后的最小欧氏距离;  $f_k^{\max}$  和  $f_k^{\min}$  分别表示集合  $P$  在第  $k$  个目标上获得的最大值和最小值;  $p_i \in P, i=1, 2, \dots, |P|, a_j \in A, j=1, 2, \dots, |A|$ . 实验对各测试函数采样 10 000 个均匀分布的 Pareto 最优解点作为真实 Pareto 前沿的代表来计算 IGD 值.

#### 5.4 统计方法

为减少随机因素对性能评估的影响, 实验中各算法在每一个测试实例中均独立执行 30 次(每次使用不同的随机数种子)以获得 IGD 或 HV 指标的均值和方差. 另外, 实验利用显著水平为 0.05 的 Wilcoxon 秩和检验来分析各算法获得近似解集的性能在统计意义上的差异.

#### 5.5 实验环境

本文所有实验均在 ThinkPad E565 计算机上运行, 计算机配置是 CPU: AMD A10-8700P; 1.8 GHz 主频; 8.0 GB 内存; Windows 10 64 位操作系统. 实验中, 各算法均在 PlatEMO<sup>[28]</sup>平台上实现.

#### 5.6 实验参数设置

实验中所涉及的参数包括各算法的共有参数和特有的参数, 具体如下.

(1) 共有参数方面: 为公平比较起见, 不同算法在相同测试实例上执行相同的评估次数(evaluation number, EN), 各算法在不同测试实例上执行的代数( $T$ )取决于评估次数和种群规模( $N$ ), 且满足  $T=EN/N$ . 对于 5-、10-、15-和 20-目标的测试实例, 实验均分配 50 000 次函数评估. 另外, 由于 RVEA<sup>[26]</sup>, NSGA-III<sup>[25]</sup>, RPD-NSGA-II<sup>[18]</sup>和 MaOEA/d<sup>2</sup>算法均利用两层生成方法产生一定数目的权重向量, 因此它们的种群规模需与权重向量数目保持一致. 实验中, 对于 5-目标、10-目标、15-目标和 20-目标的测试实例, 各算法种群规模均分别设为 212, 276, 136 和 232. 此外, MaOEA/d<sup>2</sup>和 NSGA- II/SDR 都利用仿二进制交叉(SBX)和多项式变异(PM)产生新个体, 其中: SBX 和 PM 算子的参数按表 2 设置; 而 RPD-NSGA-II, RVEA, NSGA-III 中的变化算子除交叉分布指数  $\eta_c$  取值为 30 外, 其余参数值仍按表 2 设置.

(2) 特有参数方面: 各对比算法特有的参数按它们原始文献中的建议值设置. 比如: 在 RVEA 算法中, APD 的惩罚参数  $\alpha$  取值为 2, 控制参考向量调整频度的参数  $\delta$  设为 0.1; 在 MaOEA/IGD 中, 基于分解的最差点估计法(DNPE)的参数  $\lambda$  设为 100.

表 2 实验中 SBX 和 PM 算子的参数设置

参数	取值
SBX 交叉的概率( $p_c$ )	1.0
SBX 交叉的分布指数( $\eta_c$ )	20
PM 的变异概率( $p_m$ )	$1/n$ ( $n$ 为决策变量数目)
PM 的分布指数( $\eta_m$ )	20

5.7 实验结果与分析

为验证 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法的有效性, 这里将 MaOEA/d<sup>2</sup> 与 RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 算法一同在 5-, 10-, 15-和 20-目标的 DTLZ 和 WFG 系列测试函数上进行 IGD 和 HV 性能的比较. 表 3 和表 4 分别列出了 6 种算法在 DTLZ 和 WFG 系列测试问题上所获得的 IGD 均值和方差. 表内各行最佳结果用粗体突显(下同).

表 3 给出了 6 个算法在 28 个 DTLZ 测试实例上的所获得的 IGD 均值与方差, 其中, MaOEA/d<sup>2</sup>, RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA 和 NSGA-II/SDR 算法在这些测试实例上获得最佳 IGD 均值的个数分别为 7, 1, 1, 8, 11, 而 MaOEA/IGD 无一能获得最佳的 IGD 均值. 另外, 从表 3 的 Wilcoxon 秩和检验结果来看, MaOEA/d<sup>2</sup> 相对于 RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 的净胜得分(即得“+”的数目减去得“-”的数目, 下同)分别为 21, 9, 3, 1 和-3. 综合来看, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法在求解 DTLZ 系列问题时, 除 NSGA-II/SDR 算法外, 相较其他 4 种对比算法具有显著较优的 IGD 性能.

表 3 各算法在 4 种目标维度的 DTLZ 系列测试问题上获得的 IGD 均值与方差

测试问题	目标数目	MaOEA/d <sup>2</sup>	RPD-NSGA-II	NSGA-III	RVEA	MaOEA/IGD	NSGA-II/SDR
DTLZ1	5	<b>6.1181e+0</b> <b>(1.51e+0)</b>	1.7659e+1 (5.68e+0) -	4.0467e+1 (9.02e+0) -	1.9029e+1 (4.80e+0) -	5.1586e+1 (1.19e+1) -	8.5745e+0 (2.89e+0) -
	10	5.3917e+0 (1.77e+0)	2.0034e+1 (4.99e+0) -	3.8220e+1 (9.55e+0) -	1.2386e+1 (3.88e+0) -	2.2777e+1 (1.26e+1) -	<b>4.2217e+0</b> <b>(1.33e+0) +</b>
	15	2.4455e+0 (1.03e+0)	9.4782e+0 (3.51e+0) -	7.2049e+0 (2.41e+0) -	1.7382e+0 (8.30e-1) +	1.1323e+1 (5.27e+0) -	<b>4.5354e-1</b> <b>(2.52e-1) +</b>
	20	8.3685e-1 (3.99e-1)	3.5128e+0 (1.83e+0) -	5.4900e+0 (3.32e+0) -	3.2493e-1 (1.29e-1) +	1.1565e+0 (8.71e-1) =	<b>2.2450e-1</b> <b>(6.06e-2) +</b>
DTLZ2	5	1.6710e-1 (8.90e-4)	1.9030e-1 (3.04e-3) -	1.6710e-1 (3.09e-4) =	<b>1.6622e-1</b> <b>(1.91e-4) +</b>	2.6150e-1 (1.22e-1) -	1.8654e-1 (5.92e-3) -
	10	<b>4.2531e-1</b> <b>(4.59e-3)</b>	4.7074e-1 (8.46e-3) -	4.6308e-1 (2.49e-2) -	4.3109e-1 (1.98e-3) -	6.6901e-1 (1.74e-1) -	4.3937e-1 (7.89e-3) -
	15	6.8822e-1 (3.14e-2)	7.7022e-1 (2.13e-2) -	6.4851e-1 (2.15e-2) +	<b>6.3199e-1</b> <b>(1.79e-2) +</b>	9.5571e-1 (8.17e-2) -	7.0490e-1 (8.71e-2) =
	20	8.2782e-1 (2.60e-2)	8.7408e-1 (2.05e-2) -	7.5273e-1 (4.85e-2) +	<b>6.2174e-1</b> <b>(1.72e-3) +</b>	8.4585e-1 (6.22e-2) =	6.4502e-1 (2.41e-2) +
DTLZ3	5	<b>2.5462e+1</b> <b>(8.08e+0)</b>	5.2885e+1 (1.32e+1) -	9.2276e+1 (2.55e+1) -	7.7751e+1 (1.82e+1) -	1.7732e+2 (4.38e+1) -	3.5649e+1 (1.13e+1) -
	10	2.1746e+1 (5.64e+0)	7.2398e+1 (2.46e+1) -	1.8167e+2 (6.94e+1) -	6.0086e+1 (1.73e+1) -	1.0371e+2 (3.61e+1) -	<b>1.7775e+1</b> <b>(5.57e+0) +</b>
	15	1.0158e+1 (4.83e+0)	5.1969e+1 (2.02e+1) -	3.4960e+1 (1.43e+1) -	9.5276e+0 (5.09e+0) =	3.1452e+1 (1.71e+1) -	<b>2.2065e+0</b> <b>(1.31e+0) +</b>
	20	2.8834e+0 (1.33e+0)	1.6109e+1 (8.92e+0) -	1.2880e+2 (7.01e+1) -	4.1977e+0 (1.92e+0) -	4.3806e+0 (2.28e+0) -	<b>8.3809e-1</b> <b>(2.83e-1) +</b>
DTLZ4	5	1.7249e-1 (3.78e-3)	1.9042e-1 (4.47e-3) -	1.6822e-1 (5.45e-4) +	<b>1.6624e-1</b> <b>(3.00e-4) +</b>	3.7447e-1 (2.29e-1) -	6.4853e-1 (6.41e-2) -
	10	<b>4.3024e-1</b> <b>(4.24e-3)</b>	4.6648e-1 (8.54e-3) -	4.7860e-1 (2.82e-2) -	4.4022e-1 (3.35e-3) -	5.0249e-1 (5.29e-2) -	8.2171e-1 (8.61e-2) -
	15	7.2589e-1 (1.72e-2)	7.2096e-1 (2.43e-2) =	6.5312e-1 (1.60e-2) +	<b>6.3266e-1</b> <b>(7.92e-3) +</b>	6.9896e-1 (3.35e-2) +	8.0867e-1 (1.14e-2) -
	20	8.0738e-1 (2.74e-2)	7.3027e-1 (1.12e-2) +	7.0463e-1 (5.40e-2) +	<b>6.2286e-1</b> <b>(1.43e-4) +</b>	6.3441e-1 (1.48e-2) +	8.0719e-1 (7.33e-3) =

表 3 各算法在 4 种目标维度的 DTLZ 系列测试问题上获得的 IGD 均值与方差(续)

测试问题	目标数目	MaOEA/d <sup>2</sup>	RPD-NSGA-II	NSGA-III	RVEA	MaOEA/IGD	NSGA-II/SDR
DTLZ5	5	<b>7.4853e-2</b> ( <b>1.94e-2</b> )	8.9722e-2 (2.16e-2) -	1.7267e-1 (3.50e-2) -	1.9504e-1 (1.92e-2) -	4.7991e-1 (1.73e-1) -	7.7632e-2 (1.20e-2) =
	10	1.4060e-1 (2.29e-2)	<b>1.3028e-1</b> ( <b>1.89e-2</b> ) +	4.3274e-1 (9.45e-2) -	3.7037e-1 (6.10e-2) -	5.8782e-1 (1.87e-1) -	2.0711e-1 (2.57e-2) -
	15	2.0314e-1 (4.08e-2)	2.9398e-1 (9.79e-2) -	2.7568e-1 (4.18e-2) -	3.9349e-1 (1.85e-1) -	6.3149e-1 (1.87e-1) -	<b>1.0294e-1</b> ( <b>1.78e-2</b> ) +
	20	1.8766e-1 (3.86e-2)	1.9990e-1 (7.73e-2) =	5.9298e-1 (2.16e-1) -	5.0382e-1 (2.35e-1) -	2.6593e-1 (9.75e-2) -	<b>1.3251e-1</b> ( <b>3.17e-2</b> ) +
DTLZ6	5	<b>1.4755e-1</b> ( <b>5.96e-2</b> )	2.5060e-1 (3.37e-1) -	1.3210e+0 (6.53e-1) -	2.9442e-1 (5.71e-2) -	3.3238e+0 (9.75e-1) -	2.4550e-1 (8.37e-2) -
	10	<b>1.9004e-1</b> ( <b>1.54e-1</b> )	2.6323e+0 (1.62e+0) -	9.2161e+0 (1.06e+0) -	6.2521e-1 (2.81e-1) -	2.8902e+0 (8.69e-1) -	3.3156e-1 (1.12e-1) -
	15	2.7859e-1 (1.56e-1)	4.7993e+0 (1.52e+0) -	4.0184e+0 (1.30e+0) -	3.0618e-1 (2.52e-1) =	1.9503e+0 (9.24e-1) -	<b>1.2674e-1</b> ( <b>2.46e-2</b> ) +
	20	2.7572e-1 (1.42e-1)	1.5320e+0 (9.61e-1) -	7.7739e+0 (8.64e-1) -	2.4859e-1 (1.31e-1) =	4.0048e-1 (3.35e-2) -	<b>1.3150e-1</b> ( <b>2.11e-2</b> ) +
DTLZ7	5	3.0996e-1 (2.72e-2)	3.4168e-1 (2.58e-2) -	<b>2.8872e-1</b> ( <b>9.63e-3</b> ) +	4.9956e-1 (7.00e-3) -	7.4171e-1 (6.48e-2) -	3.2024e-1 (1.92e-2) -
	10	3.1221e+0 (6.47e-1)	2.8198e+0 (9.36e-1) =	1.9690e+0 (3.53e-1) +	1.7679e+0 (4.31e-1) +	1.5139e+0 (6.48e-2) +	<b>1.4531e+0</b> ( <b>2.32e-1</b> ) +
	15	8.7684e+0 (7.26e-1)	1.1889e+1 (2.01e+0) -	8.3156e+0 (8.58e-1) +	<b>2.5316e+0</b> ( <b>5.44e-1</b> ) +	2.6821e+0 (1.26e-1) +	4.3959e+0 (6.09e-1) +
	20	1.4202e+1 (8.72e-1)	2.8323e+1 (5.31e+0) -	1.0101e+1 (9.13e-1) +	<b>2.8793e+0</b> ( <b>3.72e-1</b> ) +	3.4194e+0 (2.37e-1) +	6.8125e+0 (6.94e-1) +
+/-/=		-	2/23/3	9/18/1	11/14/3	5/21/2	14/11/3

注: '+', '-'和 '=' 分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法所获得的结果

表 4 各算法在 4 种目标维度的 WFG 系列问题上获得的 IGD 均值与方差

测试问题	目标数目	MaOEA/d <sup>2</sup>	RPD-NSGA-II	NSGA-III	RVEA	MaOEA/IGD	NSGA-II/SDR
WFG1	5	1.1505e+0 (6.69e-2)	1.6262e+0 (9.10e-2) -	1.6073e+0 (7.42e-2) -	1.4131e+0 (7.34e-2) -	1.3533e+0 (1.73e-1) -	<b>8.5822e-1</b> ( <b>6.81e-2</b> ) +
	10	2.5349e+0 (8.62e-2)	2.7933e+0 (1.05e-1) -	2.7335e+0 (7.05e-2) -	2.2590e+0 (1.40e-1) +	2.2181e+0 (1.42e-1) +	<b>1.8142e+0</b> ( <b>7.18e-2</b> ) +
	15	2.1225e+0 (1.48e-1)	2.7108e+0 (2.12e-1) -	2.1515e+0 (1.26e-1) =	<b>1.9427e+0</b> ( <b>6.65e-2</b> ) +	5.4778e+0 (5.37e+0) -	2.4797e+0 (4.85e-2) -
	20	<b>3.5003e+0</b> ( <b>1.39e-1</b> )	4.4894e+0 (2.58e-1) -	4.3760e+0 (2.12e-1) -	4.0602e+0 (1.34e-1) -	6.2849e+0 (3.99e+0) -	5.1314e+0 (4.62e-2) -
WFG2	5	4.2163e-1 (6.43e-3)	4.5086e-1 (1.74e-2) -	<b>3.9625e-1</b> ( <b>4.73e-3</b> ) +	4.0535e-1 (1.52e-2) +	1.0312e+0 (2.08e-1) -	5.0620e-1 (4.18e-2) -
	10	1.1418e+0 (2.23e-2)	1.1790e+0 (4.71e-2) -	1.3300e+0 (2.56e-1) -	<b>1.1301e+0</b> ( <b>4.11e-2</b> ) =	2.0924e+0 (3.67e-1) -	1.6199e+0 (1.29e-1) -
	15	2.2242e+0 (9.17e-2)	2.1844e+0 (9.85e-2) =	1.8983e+0 (1.92e-1) +	<b>1.7543e+0</b> ( <b>1.03e-1</b> ) +	4.0916e+0 (2.80e+0) =	2.3747e+0 (9.12e-2) -
	20	4.5577e+0 (1.64e-1)	3.8146e+0 (1.63e-1) +	3.9295e+0 (1.72e-1) +	<b>3.3352e+0</b> ( <b>1.55e-1</b> ) +	4.3152e+0 (6.45e-1) +	5.1778e+0 (6.91e-2) -
WFG3	5	3.4781e-1 (2.05e-2)	4.9286e-1 (5.26e-2) -	5.0794e-1 (5.24e-2) -	5.2148e-1 (4.81e-2) -	5.4436e+0 (4.25e-2) -	<b>2.6419e-1</b> ( <b>1.84e-2</b> ) +
	10	1.3325e+0 (8.23e-2)	1.7038e+0 (1.88e-1) -	<b>1.1495e+0</b> ( <b>1.41e-1</b> ) +	3.1302e+0 (4.14e-1) -	2.0983e+0 (1.23e-1) -	1.4549e+0 (3.26e-1) =
	15	4.9130e+0 (6.25e-1)	4.0925e+0 (5.61e-1) +	<b>2.6646e+0</b> ( <b>4.63e-1</b> ) +	8.2637e+0 (2.59e+0) -	7.0376e+0 (3.97e+0) -	5.1638e+0 (1.03e+0) =
	20	5.2565e+0 (7.37e-1)	<b>3.5769e+0</b> ( <b>6.00e-1</b> ) +	8.8434e+0 (2.97e+0) -	9.2870e+0 (2.25e+0) -	7.3293e+0 (3.31e-1) -	8.0929e+0 (2.27e+0) -
WFG4	5	9.7991e-1 (6.16e-3)	1.0373e+0 (1.58e-2) -	9.6485e-1 (2.06e-3) +	<b>9.6015e-1</b> ( <b>1.74e-3</b> ) +	5.5921e+0 (2.32e+0) -	9.9533e-1 (9.72e-3) -
	10	<b>4.2208e+0</b> ( <b>5.93e-2</b> )	4.3031e+0 (5.69e-2) -	4.5157e+0 (3.61e-2) -	4.3656e+0 (6.11e-2) -	5.6499e+0 (6.60e-2) -	4.3587e+0 (3.83e-2) -
	15	1.0779e+1 (4.16e-1)	<b>9.0240e+0</b> ( <b>1.67e-1</b> ) +	9.2814e+0 (9.26e-2) +	9.4945e+0 (2.39e-1) +	2.3138e+1 (4.78e+0) -	9.8785e+0 (1.47e+0) +
	20	1.5512e+1 (3.72e-1)	1.3335e+1 (3.26e-1) +	1.5384e+1 (2.76e+0) +	<b>1.1813e+1</b> ( <b>6.12e-1</b> ) +	1.4061e+1 (7.27e+0) +	1.5383e+1 (3.32e+0) =

表 4 各算法在 4 种目标维度的 WFG 系列问题上获得的 IGD 均值与方差(续)

测试问题	目标数目	MaOEA/d <sup>2</sup>	RPD-NSGA-II	NSGA-III	RVEA	MaOEA/IGD	NSGA-II/SDR
WFG5	5	9.6827e-1 (8.20e-3)	1.0729e+0 (2.11e-2) -	<b>9.5302e-1</b> <b>(2.90e-3) +</b>	9.5448e-1 (1.06e-3) +	6.0484e+0 (2.32e+0) -	9.9085e-1 (1.40e-2) -
	10	<b>4.2751e+0</b> <b>(7.60e-2)</b>	4.3154e+0 (4.78e-2) -	4.4688e+0 (1.83e-2) -	4.3713e+0 (4.73e-2) -	5.5060e+0 (2.45e-1) -	4.4134e+0 (5.50e-2) -
	15	1.0086e+1 (4.00e-1)	<b>9.0645e+0</b> <b>(2.28e-1) +</b>	9.1791e+0 (2.62e-2) +	9.3776e+0 (1.42e-1) +	2.6196e+1 (6.19e+0) -	9.3906e+0 (2.61e-1) +
	20	1.5464e+1 (2.97e-1)	1.3888e+1 (2.60e-1) +	1.2164e+1 (5.00e-1) +	1.3083e+1 (2.42e-1) +	1.4686e+1 (1.12e+1) +	<b>1.2160e+1</b> <b>(1.08e+0) +</b>
WFG6	5	9.7539e-1 (4.75e-3)	1.1047e+0 (2.47e-2) -	9.6614e-1 (2.59e-3) +	<b>9.6430e-1</b> <b>(1.30e-3) +</b>	5.5600e+0 (1.15e+0) -	1.0006e+0 (1.31e-2) -
	10	<b>4.3479e+0</b> <b>(8.38e-2)</b>	4.4657e+0 (5.48e-2) -	4.5811e+0 (2.07e-2) -	4.4574e+0 (1.19e-1) -	6.0415e+0 (4.81e-1) -	4.5430e+0 (8.67e-2) -
	15	1.0682e+1 (5.00e-1)	<b>9.1993e+0</b> <b>(2.47e-1) +</b>	9.5382e+0 (5.38e-1) +	1.0419e+1 (5.91e-1) +	2.5238e+1 (4.20e+0) -	9.9685e+0 (1.03e+0) +
	20	1.5395e+1 (3.51e-1)	1.3883e+1 (3.62e-1) +	<b>1.3168e+1</b> <b>(7.88e-1) +</b>	1.3992e+1 (5.45e-1) +	2.3526e+1 (1.20e+1) =	1.8216e+1 (1.65e+0) -
WFG7	5	9.7918e-1 (4.09e-3)	1.1119e+0 (3.18e-2) -	9.6929e-1 (1.65e-2) +	<b>9.6432e-1</b> <b>(4.24e-3) +</b>	5.6403e+0 (9.10e-1) -	1.0043e+0 (1.74e-2) -
	10	4.2904e+0 (7.51e-2)	<b>4.2781e+0</b> <b>(5.96e-2) =</b>	4.5629e+0 (1.99e-2) -	4.4488e+0 (8.49e-2) -	6.0345e+0 (5.46e-1) -	4.4929e+0 (7.97e-2) -
	15	9.5641e+0 (2.61e-1)	<b>8.9698e+0</b> <b>(1.43e-1) +</b>	9.3045e+0 (7.33e-2) +	9.1598e+0 (2.75e-1) +	2.3696e+1 (2.78e+0) -	1.0169e+1 (1.48e+0) =
	20	1.5289e+1 (4.48e-1)	1.4087e+1 (3.68e-1) +	1.6128e+1 (8.54e-1) -	<b>1.1784e+1</b> <b>(2.83e-1) +</b>	1.3594e+1 (5.89e+0) +	1.4335e+1 (1.14e+0) +
WFG8	5	9.6590e-1 (5.68e-3)	1.1330e+0 (2.99e-2) -	<b>9.5822e-1</b> <b>(1.76e-3) +</b>	9.6744e-1 (2.19e-3) =	4.5973e+0 (1.98e-1) -	1.0073e+0 (1.33e-2) -
	10	<b>4.2261e+0</b> <b>(2.84e-2)</b>	4.5290e+0 (6.22e-2) -	4.5064e+0 (1.76e-1) -	4.3144e+0 (9.75e-2) -	6.0632e+0 (1.87e+0) -	4.4609e+0 (6.82e-2) -
	15	9.9548e+0 (2.30e-1)	9.1791e+0 (2.17e-1) +	<b>9.1516e+0</b> <b>(2.98e-1) +</b>	9.7067e+0 (4.41e-1) +	2.3437e+1 (2.37e+0) -	9.8586e+0 (5.56e-1) =
	20	1.5391e+1 (2.67e-1)	1.3717e+1 (3.12e-1) +	1.5712e+1 (1.98e+0) =	<b>1.2527e+1</b> <b>(7.33e-1) +</b>	3.4064e+1 (2.83e+0) -	1.3557e+1 (1.65e+0) +
WFG9	5	<b>9.5380e-1</b> <b>(1.45e-2)</b>	1.0534e+0 (2.23e-2) -	9.6315e-1 (1.31e-2) -	9.5895e-1 (9.13e-3) -	3.1454e+0 (1.05e+0) -	9.7731e-1 (1.24e-2) -
	10	<b>4.1308e+0</b> <b>(5.45e-2)</b>	4.2711e+0 (6.59e-2) -	4.3509e+0 (3.86e-2) -	4.2849e+0 (6.23e-2) -	5.4548e+0 (4.71e-1) -	4.3269e+0 (4.22e-2) -
	15	9.3930e+0 (4.51e-1)	8.9220e+0 (2.00e-1) +	<b>8.7006e+0</b> <b>(9.25e-2) +</b>	9.1858e+0 (1.74e-1) =	1.4495e+1 (7.97e+0) =	8.8859e+0 (3.22e-1) +
	20	1.6237e+1 (5.68e-1)	1.4631e+1 (4.26e-1) +	1.3948e+1 (1.07e+0) +	<b>1.1386e+1</b> <b>(1.63e-1) +</b>	1.1835e+1 (7.84e-1) +	1.2862e+1 (1.03e+0) +
+/-/=		-	15/19/2	20/14/2	20/13/3	6/27/3	11/20/5

注: '+', '-'和 '=' 分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法所获得的结果

表 4 列出了 6 个算法在 36 个 WFG 测试实例上获得的 IGD 均值和方差, 其中, MaOEA/d<sup>2</sup>, RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA 和 NSGA-II/SDR 获得最佳 IGD 均值的个数分别为 7, 6, 8, 11, 4, 而 MaOEA/IGD 算法均未能获得任何最佳 IGD 均值. 从表 4 的 Wilcoxon 秩和检验结果来看, MaOEA/d<sup>2</sup> 相对于 RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 所获得的净胜得分分别为 4, -6, -7, 21 和 9. 因此, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法在求解 WFG 系列问题时的性能次于 NSGA-III 与 RVEA 算法, 而优于其他的 3 种对比算法, 总体上的性能处于中上游位置.

另外, 为直观显示算法的解题结果, 图 5 和图 6 分别展示了 6 种算法在 10-目标的 DTLZ4(简记为 DTLZ4 (10))和 10-目标的 WFG5(简记为 WFG5(10))测试实例上所获得的非支配解集的平行坐标. 这里给出的非支配解集均为各算法在 30 次运行中获得的最接近于 IGD 均值的近似解集.

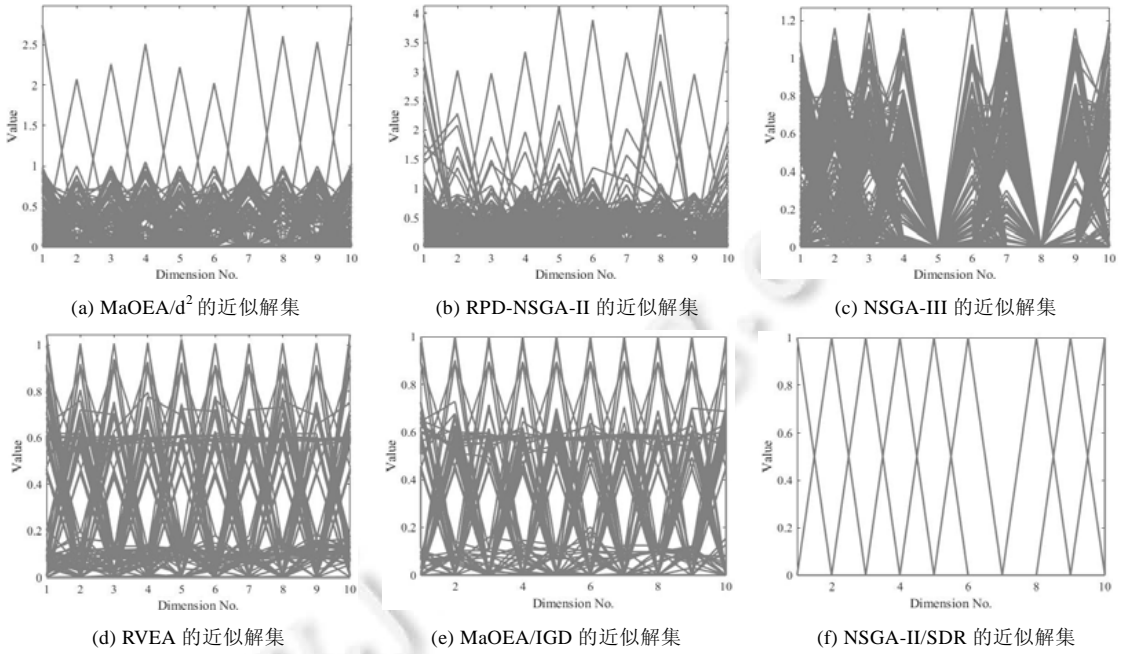


图 5 6 种算法在 10-目标的 DTLZ4 测试实例上获得的近似解集

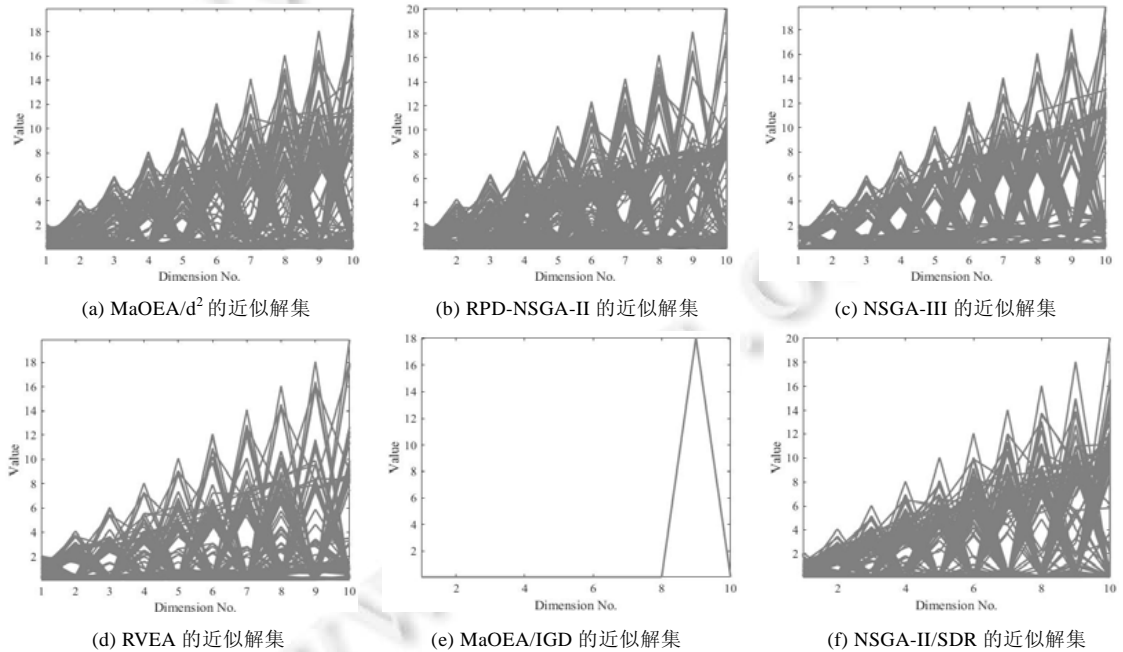


图 6 6 种 MOEA 算法在 10-目标的 WFG5 测试问题上获得的近似解集

从图 5 可以看出, MaOEA/d<sup>2</sup>, RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 这 6 个算法在 DTLZ4(10)测试实例上获得解群的收敛性均较好, MaOEA/d<sup>2</sup>, RPD-NSGA-II, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 算法在 DTLZ4(10)测试实例上获得的解群分布性也较好, 而 NSGA-III 在第 5 目标、第 8 目标上分布性差, NSGA-II/SDR 算法获得有效解的数量较少. 从图 5 来看, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法在 DTLZ4(10)测试实例上具有较好的收敛性与多样性, 与表 3 的结果相一致.

从图 6 可以看出: MaOEA/d<sup>2</sup>, RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA 和 NSGA-II/SDR 算法在 WFG5(10)测试例上所获得的近似解集具有较好收敛性和多样性; 而 MaOEA/IGD 算法在求解该测试实例时, 在不同的目标上, 其收敛性和多样性的表现不均衡. 究其原因, WFG5 测试问题具有欺骗性, 其 MaOEA/IGD 算法可能构成了较大的挑战; 而 MaOEA/d<sup>2</sup> 等则能较好地求解具有欺骗性的 MaOP 问题, 其与表 4 的结果相吻合.

不仅如此, 为了直观地比较 6 种算法的收敛速度, 图 7 和图 8 分别描绘了各算法在 10-目标的 DTLZ6 (DTLZ6(10))和 10-目标的 WFG9(WFG9(10))测试实例上获得的 IGD 均值随评估次数(EN)增长而变化的轨迹. 为了获得稳定且可靠的结果, 这里, 各算法在测试实例上均独立执行 30 次, 每次运行所需的评估次数设为 100 000.

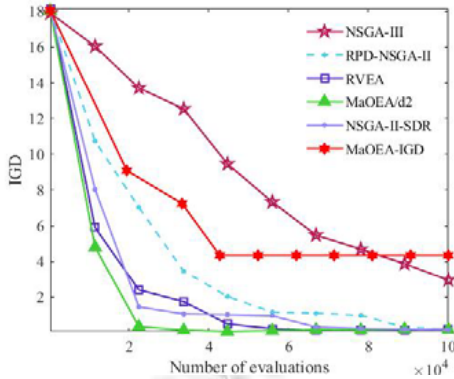


图 7 6 种算法在 10-目标的 DTLZ6 测试问题上获得的 IGD 均值的变化曲线

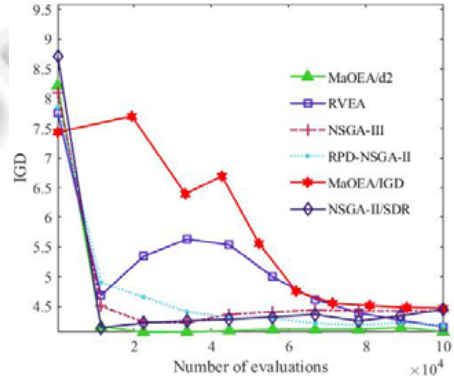


图 8 6 种算法在 10-目标的 WFG9 测试问题上获得的 IGD 均值的变化曲线

从图 7 可以看出: 6 种算法随着评估次数  $EN$  的增大, 它们所获得的 IGD 均值总体上表现出变小的趋势. 但相对而言, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法获得的 IGD 均值下降最快, 其次是 RVEA 算法, 之后为 NSGA-II/SDR 和 RPD-NSGA-II, 而 NSGA-III, MaOEA/IGD 相对较差. MaOEA/d<sup>2</sup>, RVEA 和 NSGA-II/SDR 算法在经历初始约  $2 \times 10^4$  次评估后, 它们的 IGD 均值能较快下降至一个相对较小的值, 而在后期进化过程中, 它们的 IGD 均值呈现出缓慢变小的趋势. 而 MaOEA/IGD 在经历  $4 \times 10^4$  次左右的评估后, 其 IGD 值趋于平稳. 由于 IGD 指标能够表征近似解集的收敛性和多样性, 且 IGD 值越小, 表明算法获得的近似解集的质量越高, 因此, 图 7 的 IGD 曲线的变化轨迹直观地表明了 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法相比其他几种算法, 其在 DTLZ6(10)测试实例上能较快地获得高质量的近似解集.

从图 8 可以看出: 6 种算法所获得的 IGD 均值总体上均随评估次数  $EN$  的增大而表现出变小的趋势. 但相对而言, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法获得的 IGD 均值下降最快; 其次是 NSGA-III, NSGA-II/SDR 与 RPD-NSGA-II 算法; RVEA 呈现出了先快速下降, 而后缓慢上升再下降的波折; MaOEA/IGD 曲线波动较大, 在经历  $6 \times 10^4$  次评估后趋于收敛. 总体上, MaOEA/d<sup>2</sup>, NSGA-III, RPD-NSGA-II 和 NSGA-II/SDR 算法在经历初始阶段约  $1 \times 10^4$  次评估后, 它们的 IGD 均值能较快下降至一个相对较低的水平, 而在后期进化过程中, 它们的 IGD 均值呈现出缓慢变小的趋势. 因此, 从图 8 的 IGD 曲线轨迹可直观上获知, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法在该测试实例上能较快地获得高质量的近似解集.

此外, 为考察 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法在 WFG 系列测试问题上的  $HV$  性能, 将 MaOEA/d<sup>2</sup> 与 RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 算法在 5-, 10-, 15-和 20-目标的 WFG1-WFG9 测试实例上进行实验, 表 5 给出了 6 种算法在 5-, 10-, 15-和 20-目标的 WFG1-WFG9 测试问题上获得的  $HV$  均值与方差. 需要说明的是, 这里计算  $HV$  值所使用的参考点  $r$  设置为  $(1.1 \times Z^{nad})$ . 这里,  $Z^{nad}$  表示 MaOP 问题的理想点.

表 5 各算法在 4 种目标维度的 WFG 系列问题上获得的 HV 均值与方差

测试问题	目标数目	MaOEA/d <sup>2</sup>	RPD-NSGA-II	NSGA-III	RVEA	MaOEA/IGD	NSGA-II/SDR
WFG1	5	5.2446e-1 (2.42e-2)	3.8254e-1 (2.48e-2) -	3.9891e-1 (1.84e-2) -	4.5084e-1 (2.11e-2) -	5.3624e-1 (3.79e-2) =	<b>6.9439e-1</b> <b>(2.55e-2) +</b>
	10	3.0540e-1 (1.76e-2)	2.6035e-1 (1.76e-2) -	2.7449e-1 (1.45e-2) -	3.4480e-1 (3.21e-2) +	4.7057e-1 (5.51e-2) +	<b>5.9138e-1</b> <b>(3.33e-2) +</b>
	15	7.6989e-1 (9.11e-2)	5.3147e-1 (7.71e-2) -	8.3010e-1 (8.18e-2) +	8.2673e-1 (8.51e-2) +	5.4254e-1 (1.48e-1) -	<b>9.6510e-1</b> <b>(3.97e-2) +</b>
	20	8.5719e-1 (9.71e-2)	4.3516e-1 (1.39e-1) -	8.4857e-1 (8.19e-2) -	9.3802e-1 (6.75e-2) +	9.0230e-1 (1.46e-1) =	<b>9.9239e-1</b> <b>(5.32e-3) +</b>
WFG2	5	9.5510e-1 (6.54e-3)	9.4870e-1 (9.14e-3) -	<b>9.5626e-1</b> <b>(6.22e-3) =</b>	9.4904e-1 (9.26e-3) -	9.1715e-1 (4.08e-2) -	9.5317e-1 (7.34e-3) =
	10	<b>9.6766e-1</b> <b>(5.78e-3)</b>	9.3891e-1 (1.11e-2) -	9.6705e-1 (1.38e-2) =	9.2676e-1 (1.67e-2) -	8.9835e-1 (3.87e-2) -	9.6707e-1 (3.40e-3) =
	15	<b>9.8086e-1</b> <b>(8.63e-3)</b>	9.5419e-1 (1.84e-2) -	9.7927e-1 (1.05e-2) =	9.3674e-1 (2.60e-2) -	8.7257e-1 (9.33e-2) -	9.7897e-1 (4.40e-3) -
	20	<b>9.8766e-1</b> <b>(4.06e-3)</b>	9.6927e-1 (1.14e-2) -	9.5505e-1 (1.77e-2) -	9.4783e-1 (3.23e-2) -	9.3658e-1 (1.91e-2) -	9.8739e-1 (2.83e-3) =
WFG3	5	1.5112e-1 (1.75e-2)	8.4845e-2 (1.28e-2) -	8.6318e-2 (1.67e-2) -	8.1496e-2 (2.16e-2) -	4.6175e-2 (6.85e-3) -	<b>1.6801e-1</b> <b>(1.02e-2) +</b>
	10	<b>0.0000e+0</b> <b>(0.00e+0)</b>	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =
	15	<b>0.0000e+0</b> <b>(0.00e+0)</b>	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =
	20	<b>0.0000e+0</b> <b>(0.00e+0)</b>	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =	0.0000e+0 (0.00e+0) =
WFG4	5	<b>7.8160e-1</b> <b>(3.23e-3)</b>	7.1808e-1 (6.19e-3) -	7.4497e-1 (3.63e-3) -	7.4764e-1 (4.04e-3) -	2.1916e-1 (1.82e-1) -	7.5584e-1 (5.20e-3) -
	10	<b>9.1379e-1</b> <b>(5.17e-3)</b>	7.7898e-1 (1.32e-2) -	8.4677e-1 (1.29e-2) -	8.2777e-1 (1.55e-2) -	6.1588e-1 (2.82e-2) -	9.0096e-1 (6.32e-3) -
	15	6.7561e-1 (2.45e-2)	7.1319e-1 (2.73e-2) +	<b>9.3113e-1</b> <b>(1.04e-2) +</b>	8.9349e-1 (2.60e-2) +	1.6309e-1 (1.29e-1) -	9.1459e-1 (1.07e-1) +
	20	6.9981e-1 (2.67e-2)	6.6650e-1 (3.72e-2) -	7.2621e-1 (8.62e-2) +	<b>8.9273e-1</b> <b>(2.34e-2) +</b>	7.9971e-1 (1.99e-1) +	7.9963e-1 (1.74e-1) +
WFG5	5	<b>7.5371e-1</b> <b>(1.29e-3)</b>	6.7760e-1 (8.13e-3) -	7.3426e-1 (2.25e-3) -	7.3782e-1 (2.95e-3) -	1.9580e-1 (1.92e-1) -	7.3847e-1 (3.89e-3) -
	10	8.7766e-1 (2.98e-3)	6.8403e-1 (2.28e-2) -	8.2362e-1 (6.93e-3) -	8.2316e-1 (8.14e-3) -	6.0344e-1 (2.98e-2) -	<b>8.7969e-1</b> <b>(3.18e-3) +</b>
	15	6.3342e-1 (2.24e-2)	4.7259e-1 (3.29e-2) -	8.9636e-1 (3.28e-3) +	8.9815e-1 (3.84e-3) +	1.4110e-1 (1.73e-1) -	<b>9.0389e-1</b> <b>(3.39e-3) +</b>
	20	5.6888e-1 (2.93e-2)	4.1016e-1 (2.86e-2) -	8.0399e-1 (3.41e-2) +	8.5042e-1 (1.16e-2) +	6.5162e-1 (2.28e-1) +	<b>9.0247e-1</b> <b>(2.55e-2) +</b>
WFG6	5	<b>7.5387e-1</b> <b>(4.42e-3)</b>	6.7445e-1 (8.69e-3) -	7.1759e-1 (7.16e-3) -	7.2494e-1 (5.91e-3) -	1.6407e-1 (9.23e-2) -	7.3402e-1 (6.46e-3) -
	10	<b>8.8502e-1</b> <b>(1.04e-2)</b>	7.1208e-1 (2.05e-2) -	8.1343e-1 (1.18e-2) -	7.7225e-1 (2.35e-2) -	5.2858e-1 (3.36e-2) -	8.8117e-1 (7.90e-3) =
	15	6.8830e-1 (2.51e-2)	6.6583e-1 (3.86e-2) =	<b>8.9058e-1</b> <b>(1.67e-2) +</b>	6.2680e-1 (7.79e-2) -	1.6549e-1 (8.43e-2) -	8.8176e-1 (6.47e-2) +
	20	6.3700e-1 (3.65e-2)	5.1802e-1 (3.21e-2) -	<b>7.6649e-1</b> <b>(4.74e-2) +</b>	6.3497e-1 (8.01e-2) =	4.5226e-1 (2.62e-1) =	6.2400e-1 (1.08e-1) =
WFG7	5	<b>8.0396e-1</b> <b>(8.68e-4)</b>	7.1681e-1 (1.20e-2) -	7.5036e-1 (7.48e-3) -	7.6613e-1 (7.41e-3) -	2.0344e-1 (8.10e-2) -	7.8608e-1 (3.45e-3) -
	10	<b>9.5081e-1</b> <b>(2.13e-3)</b>	7.4069e-1 (2.01e-2) -	8.6223e-1 (1.10e-2) -	8.5388e-1 (1.27e-2) -	5.8650e-1 (5.38e-2) -	9.4912e-1 (2.82e-3) -
	15	6.9979e-1 (3.54e-2)	6.1421e-1 (5.59e-2) -	<b>9.6877e-1</b> <b>(3.65e-3) +</b>	7.8076e-1 (1.67e-1) +	1.9202e-1 (5.68e-2) -	8.8655e-1 (1.41e-1) +
	20	6.3033e-1 (3.26e-2)	5.2342e-1 (2.72e-2) -	6.6753e-1 (7.22e-2) +	8.0148e-1 (1.45e-1) +	8.1974e-1 (1.72e-1) +	<b>9.2317e-1</b> <b>(4.16e-2) +</b>



表 5 各算法在 4 种目标维度的 WFG 系列问题上获得的 HV 均值与方差(续)

测试问题	目标数目	MaOEA/d <sup>2</sup>	RPD-NSGA-II	NSGA-III	RVEA	MaOEA/IGD	NSGA-II/SDR
WFG8	5	<b>7.2870e-1</b> ( <b>2.95e-3</b> )	6.1765e-1 (8.80e-3) -	6.9664e-1 (3.78e-3) -	6.9453e-1 (5.63e-3) -	7.9049e-2 (3.96e-2) -	7.0569e-1 (4.39e-3) -
	10	7.7736e-1 (9.53e-3)	6.4923e-1 (1.59e-2) -	7.8361e-1 (2.56e-2) =	5.7338e-1 (4.62e-2) -	6.0005e-1 (1.02e-1) -	<b>8.3118e-1</b> ( <b>6.76e-3</b> ) +
	15	6.5723e-1 (2.90e-2)	5.5514e-1 (3.40e-2) -	<b>8.8127e-1</b> ( <b>1.70e-2</b> ) +	5.1338e-1 (1.99e-1) -	1.9333e-1 (5.58e-2) -	7.4876e-1 (8.41e-2) +
	20	5.7292e-1 (3.39e-2)	4.2310e-1 (3.92e-2) -	4.2881e-1 (1.50e-1) -	6.5035e-1 (1.49e-1) +	2.1632e-1 (4.82e-2) -	<b>8.1520e-1</b> ( <b>1.15e-1</b> ) +
WFG9	5	<b>7.4743e-1</b> ( <b>1.34e-2</b> )	6.4586e-1 (1.74e-2) -	6.6090e-1 (2.08e-2) -	6.7715e-1 (1.83e-2) -	4.0534e-1 (1.48e-1) -	7.3962e-1 (1.08e-2) -
	10	8.7059e-1 (2.18e-2)	6.3880e-1 (4.41e-2) -	7.5216e-1 (2.59e-2) -	7.1386e-1 (3.22e-2) -	6.1724e-1 (4.35e-2) -	<b>8.7332e-1</b> ( <b>8.07e-3</b> ) =
	15	5.1419e-1 (5.57e-2)	4.0208e-1 (5.35e-2) -	8.3010e-1 (4.35e-2) +	6.9306e-1 (5.67e-2) +	4.7685e-1 (2.37e-1) =	<b>8.8225e-1</b> ( <b>3.02e-2</b> ) +
	20	4.7315e-1 (4.47e-2)	4.2611e-1 (3.36e-2) -	7.6371e-1 (5.99e-2) +	7.2263e-1 (6.31e-2) +	7.5180e-1 (7.16e-2) +	<b>8.3914e-1</b> ( <b>6.62e-2</b> ) +
+/-/=		-	1/31/4	12/16/8	12/20/4	5/24/7	18/9/9

注: '+', '-'和 '=' 分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法所获得的结果

表 5 给出了 MaOEA/d<sup>2</sup>, RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 算法在 36 个 WFG 测试实例上获得的 HV 均值与方差, 其中, MaOEA/d<sup>2</sup>, NSGA-III, RVEA 和 NSGA-II/SDR 算法分别获得 12, 6, 1 和 14 个最佳的 HV 均值结果, 而 RPD-NSGA-II 和 MaOEA/IGD 无一能获得最佳的 HV 值. 另外, 从表 5 的 Wilcoxon 秩和检验结果来看, MaOEA/d<sup>2</sup> 相对于 RPD-NSGA-II, NSGA-III, RVEA, MaOEA/IGD 和 NSGA-II/SDR 算法的净胜得分分别为 30, 4, 8, 19 和 -9. 除了 NSGA-II/SDR 算法外, MaOEA/d<sup>2</sup> 对于其他对比算法具有较优的 HV 性能.

总体上, 从上述实验结果来看, MaOEA/d<sup>2</sup> 相对其他几种新近发展的高维多目标进化算法, 其具有相对较好的收敛性和多样性. 究其原因, MaOEA/d<sup>2</sup> 利用 PBI 函数的双距离( $d_1$  和  $d_2$ ) 定义和构造了 CDD-支配关系和 DM-DD 方法, 不仅能细粒度区分高维目标空间中解个体的优劣, 而且能自适应地调整高维目标解个体收敛性与多样性之间的占比, 以更好地平衡收敛性和多样性. 另外, CDD-支配关系和 DM-DD 方法在 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法执行的不同阶段发挥作用并相互协同, 使得算法在求解各类具有不同难度特征的 MaOP 中表现出较好的性能.

进一步地, 为检验 DM-DD 多样性方法在保持高维目标解群多样性上的性能, 这里设计将 DM-DD 方法与 NSGA-II 中的拥挤距离度量方法(简记为 CD)以及 RPD-NSGA-II 算法中利用  $d_2$  的择优个体的方法(简记为 D2)一同在 5-, 10-, 15-和 20-目标的 DTLZ1-DTLZ7 测试实例上进行 IGD 性能比较. 具体地, 将 DM-DD 和 D2 这两种方法分别嵌入到 NSGA-II 算法, 以分别替代算法原有的拥挤距离方法, 而保持算法其他部分不变. 由此构造出 NSGA-II/DM-DD 和 NSGA-II/D2 这两种算法变种. 实验方案设计如下: 将 NSGA-II/DM-DD, NSGA-II/D2 和 NSGA-II 这三种算法在 5-, 10-, 15-和 20-目标的 DTLZ1-DTLZ7 测试实例上进行 IGD 性能比较. 实验中, 对于 5-, 10-, 15-和 20-目标的测试问题, 各算法的种群规模分别设为 212, 276, 136 和 232. 各算法所需的函数评估次数统一设为 50 000. 实验中, 算法使用的 SBX 交叉和 PM 变异算子的参数设置同表 2. 表 6 给出了 3 种算法在 5-, 10-, 15-和 20-目标的 DTLZ 系列测试实例上所获得的 IGD 均值与方差.

表 6 给出了 3 种算法在 28 个 DTLZ 测试实例上的获得的 IGD 均值与方差, 其中, NSGA-II/DM-DD, NSGA-II 和 NSGA-II/D2 算法在这些测试实例上获得最佳 IGD 均值的数目分别为 19, 6, 3. 另外, 从表 6 的 Wilcoxon 秩和检验结果来看, NSGA-II/DM-DD 相对于 NSGA-II 和 NSGA-II/D2 的净胜得分分别为 15 和 17. 综合来看, NSGA-II/DM-DD 算法在求解 DTLZ 系列问题时具有显著较优的性能, 由此表明 DM-DD 多样性保持方法具有显著较优的性能. 究其原因, DM-DD 方法不仅能够考虑高维目标空间中解个体的收敛性与多样性, 还随着目标空间维度的变化, 自适应地调整多样性的占比. 这种机制较好地平衡算法的收敛性与多样性, 从而改善算法的性能. 相比之下, D2 方法仅考虑解个体的  $d_2$  距离, 未能将收敛性和多样性综合考虑, 且缺乏自适应机制,

因而未能较好平衡解群的收敛性与多样性. NSGA-II 算法中的 CD 方法基于欧氏距离度量目标空间中的拥挤度, 但由于欧氏距离在高维目标空间中不能有效地度量解点之间的拥挤距离, 使得多样性保持策略的效果较差.

表 6 各算法在 4 种目标维度的 DTLZ 系列问题上获得的 IGD 均值与方差

测试问题	目标数目	NSGA-II	NSGA-II/D2	NSGA-II/DM-DD	
DTLZ1	5	1.4087e+2 (2.82e+1) -	1.0189e+1 (3.56e+0) -	<b>7.8733e+0 (3.19e+0)</b>	
	10	5.2122e+2 (5.36e+1) -	1.4756e+1 (5.57e+0) -	<b>4.7726e+0 (2.36e+0)</b>	
	15	2.2715e+2 (5.42e+1) -	3.2233e+0 (1.34e+0) -	<b>1.3506e+0 (1.08e+0)</b>	
	20	1.4162e+2 (3.57e+1) -	1.2859e+0 (7.59e-1) -	<b>3.9440e-1 (8.72e-2)</b>	
DTLZ2	5	<b>2.4803e-1 (1.02e-2) +</b>	5.9657e-1 (4.54e-3) =	5.9507e-1 (1.03e-2)	
	10	2.0848e+0 (2.42e-1) -	9.1129e-1 (1.21e-1) -	<b>7.7869e-1 (7.32e-2)</b>	
	15	2.0686e+0 (2.62e-1) -	1.2896e+0 (1.13e-7) -	<b>1.0262e+0 (1.92e-2)</b>	
	20	1.5631e+0 (7.89e-2) -	1.3356e+0 (3.85e-4) -	<b>1.1661e+0 (2.09e-2)</b>	
DTLZ3	5	2.4191e+2 (5.26e+1) -	3.0244e+1 (7.15e+0) -	<b>2.6326e+1 (9.67e+0)</b>	
	10	2.3171e+3 (5.17e+2) -	<b>9.9572e+0 (4.57e+0) =</b>	1.0572e+1 (4.52e+0)	
	15	2.0082e+3 (4.71e+2) -	<b>3.1800e+0 (1.55e+0) =</b>	3.2628e+0 (2.31e+0)	
	20	7.6236e+2 (1.23e+2) -	1.6133e+0 (5.18e-1) -	<b>1.5068e+0 (4.64e-1)</b>	
DTLZ4	5	<b>2.3829e-1 (8.01e-3) +</b>	6.1679e-1 (3.72e-2) =	6.0238e-1 (1.54e-2)	
	10	2.2663e+0 (2.45e-1) -	<b>8.3432e-1 (6.59e-2) +</b>	9.5281e-1 (8.48e-2)	
	15	1.9859e+0 (2.13e-1) -	1.2896e+0 (1.36e-5) -	<b>1.0857e+0 (3.59e-2)</b>	
	20	1.6264e+0 (8.15e-2) -	1.3355e+0 (1.45e-3) -	<b>1.1813e+0 (2.11e-2)</b>	
DTLZ5	5	<b>3.6410e-1 (8.24e-2) +</b>	6.4436e-1 (1.62e-1) =	5.8386e-1 (1.81e-1)	
	10	1.0954e+0 (2.31e-1) -	6.5789e-1 (1.39e-1) =	<b>6.2948e-1 (1.41e-1)</b>	
	15	1.2152e+0 (2.76e-1) -	6.2617e-1 (1.67e-1) -	<b>5.0439e-1 (1.12e-1)</b>	
	20	6.0544e-1 (1.85e-1) -	6.2880e-1 (1.43e-1) -	<b>4.8715e-1 (6.81e-2)</b>	
DTLZ6	5	1.6479e+1 (1.07e+0) -	6.4620e-1 (1.72e-1) =	<b>6.2048e-1 (2.94e-1)</b>	
	10	1.6664e+1 (8.31e-1) -	7.4209e-1 (3.59e-7) -	<b>7.1501e-1 (2.96e-1)</b>	
	15	1.2266e+1 (8.21e-1) -	7.4209e-1 (3.39e-16) -	<b>4.9790e-1 (7.66e-2)</b>	
	20	8.2103e+0 (8.20e-1) -	7.0212e-1 (1.22e-1) -	<b>5.6101e-1 (1.07e-1)</b>	
DTLZ7	5	<b>3.3824e-1 (1.34e-2) +</b>	1.6288e+0 (2.99e-1) +	1.7943e+0 (3.19e-1)	
	10	4.2311e+0 (1.34e+0) =	1.1943e+1 (8.26e+0) -	<b>4.1921e+0 (5.50e-1)</b>	
	15	<b>8.7188e+0 (2.07e+0) +</b>	5.0892e+1 (1.04e+1) -	1.0107e+1 (6.85e-1)	
	20	<b>8.8163e+0 (2.52e+0) +</b>	5.0595e+1 (1.26e+1) -	1.4432e+1 (5.83e-1)	
		+/-/=	6/21/1	2/19/7	-

注: '+', '-' 和 '=' 分别表示该结果显著地优于、显著地劣于以及统计上无差别于 NSGA-II/DM-DD 算法所获得的结果

## 6 总结

为克服 Pareto 支配在高维目标空间中的不足, 本文从改进支配关系着手, 提出一种结合双距离的支配关系, 即 CDD-支配关系. 该支配方法不仅具有良好的性质, 而且无需引入额外的参数; 其次, 利用双距离构造了一种多样性保持方法, 即 DM-DD 方法. DM-DD 方法不仅考虑了高维目标空间中解个体的收敛性与多样性, 而且还能根据待解问题的目标数的变化, 自适应地调整多样性所占的比重, 较好地平衡了高维多目标算法的收敛性与多样性. 进一步地, 将 CDD-支配和 DM-DD 方法嵌入 NSGA-II 算法框架, 设计了一种利用双距离构造支配关系和多样性方法的高维多目标进化算法 MaOEA/d<sup>2</sup>. 实验将 MaOEA/d<sup>2</sup> 与 5 种高效的高维多目标进化算法一同在 DTLZ 和 WFG 系列测试问题进行性能测试, 结果表明, MaOEA/d<sup>2</sup> 算法具有显著较优的收敛性与多样性. 因此, 本文算法是一种颇具前景的高维多目标进化算法. 未来将利用一些更加复杂的 MaOP 问题检验本文算法的性能, 并利用 MaOEA/d<sup>2</sup> 算法求解现实应用中的一些 MaOP 问题. 另外, 设计一些高效的非支配排序方法对种群实施有效划分, 也是未来的努力方向之一.

## References:

- [1] Falcón-Cardona JG, Coello CAC. Indicator-based multi-objective evolutionary algorithms: A comprehensive survey. ACM Computing Surveys, 2020, 53(2): 1-35.

- [2] Xie CW, Yu WW, Bi YZ, *et al.* Many-objective evolutionary algorithm based on decomposition and coevolution. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2020, 31(2): 356–373 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/5617.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005617]
- [3] Zhang ZX, Cao Y, Cui ZH, *et al.* A many-objective optimization based intelligent intrusion detection algorithm for enhancing security of vehicular networks in 6G. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 2021. [doi: 10.1109/TVT.2021.3057074]
- [4] Zhu ZH. A hybrid indicator many-objective optimization algorithm for selection and delivery of disaster relief materials problem. *Concurrency Computation*, 2021, 33(6): e5948.
- [5] Pan LQ, Li LH, He C, *et al.* A subregion division-based evolutionary algorithm with effective mating selection for many-objective optimization. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2020, 50(8): 3477–3490.
- [6] Gong D, Liu Y, Yen GG. A meta-objective approach for many-objective evolutionary optimization. *Evolutionary Computation*, 2020, 28(1): 1–25.
- [7] Yang S, Li M, Liu X, *et al.* A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2013, 17(5): 721–736.
- [8] Zou X, Chen Y, Liu M, *et al.* A new evolutionary algorithm for solving many-objective optimization problems. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, 38(5): 1402–1412.
- [9] Zhu C, Xu L, Goodman ED. Generalization of Pareto-optimality for many-objective evolutionary optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 299–315.
- [10] Liu Y, Gong D, Sun J, *et al.* A many-objective evolutionary algorithm using a one-by-one selection strategy. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2017, 47(9): 2689–2702.
- [11] Fan Z, Fang Y, Li W, *et al.* MOEA/D with angle-based constrained dominance principle for constrained multi-objective optimization problems. *Applied Soft Computing*, 2019, 74: 621–633.
- [12] Jiang S, Yang S. A strength Pareto evolutionary algorithm based on reference direction for multi-objective and many-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2017, 21(3): 329–346.
- [13] Xiang Y, Zhou Y, Li M, *et al.* A vector angle-based evolutionary algorithm for unconstrained many-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2017, 21(1): 131–152.
- [14] Liu Y, Zhu N, Li K, *et al.* An angle dominance criterion for evolutionary many-objective optimization. *Information Sciences*, 2020, 509: 376–399.
- [15] Xie CW, Yu WW, Guo H, *et al.* DAV-MOEA: A many-objective evolutionary algorithm adopting dynamic angle vector based dominance relation. *Chinese Journal of Computers*, 2022, 45(2): 317–333 (in Chinese with English abstract).
- [16] Tian Y, Cheng R, Zhang X, *et al.* A strengthened dominance relation considering convergence and diversity for evolutionary many-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 331–345.
- [17] Yuan Y, Xu H, Wang B, *et al.* A new dominance relation-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2016, 20(1): 16–37.
- [18] Elarbi M, Bechikh S, Gupta A, *et al.* A new decomposition-based NSGA-II for many-objective optimization. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics: Systems*, 2018, 48(7): 1191–1210.
- [19] Ma X, Yu Y, Li X, *et al.* A survey of weight vector adjustment methods for decomposition based multi-objective evolutionary algorithms. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2020, 24(4): 634–649.
- [20] Deb K, Pratap A, Agarwal S, *et al.* A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Trans. on Computation*, 2002, 6(2): 182–197.
- [21] Deb K, Thiele L, Laumanns M, *et al.* Scalable multi-objective optimization test problems. In: *Proc. of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*. 2002. 825–830.
- [22] Huband S, Barone L, While L, *et al.* A scalable multi-objective test problem toolkit. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. 2005. 280–295.
- [23] Ishibuchi H, Masuda H, Tanigaki Y, *et al.* Modified distance calculation in the generational distance and inverted generational distance. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. 2015. 110–125.

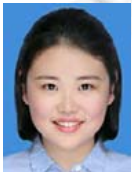
- [24] Jiang S, Ong YS, Zhang J, *et al.* Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2014, 44(12): 2391–2404.
- [25] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point-based nondominated sorting approach, part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2014, 18(4): 577–601.
- [26] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, *et al.* A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773–791.
- [27] Sun Y, Yen GG, Yi Z. IGD indicator-based evolutionary algorithm for many-objective optimization problems. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2019, 23(2): 173–187.
- [28] Tian Y, Cheng R, Zhang X, *et al.* PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73–87.

#### 附中文参考文献:

- [2] 谢承旺, 余伟伟, 闭应洲, 汪慎文, 胡玉荣. 一种基于分解和协同的高维多目标进化算法. *软件学报*, 2020, 31(2): 356–373. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/5617.htm> [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005617]
- [15] 谢承旺, 余伟伟, 郭华, 张伟, 张琼冰. DAV-MOEA: 一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法. *计算机学报*, 2022, 45(2): 317–333.



谢承旺(1974—), 男, 博士, 教授, CCF 高级会员, 主要研究领域为智能计算的理论与应用.



郭华(1996—), 女, 硕士生, 主要研究领域为智能计算, 多目标优化.



韦伟(1998—), 男, 硕士生, 主要研究领域为智能计算, 多目标优化.



姜磊(1974—), 男, 博士, 副教授, CCF 高级会员, 主要研究领域为进化计算, 机器学习.