软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
*Journal of Software*,2020,31(12):3787−3796 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.005888]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

# 面向完美回忆的时态认知逻辑*

张玉志, 唐晓嘉

(西南大学 逻辑与智能研究中心,重庆 400715)

通讯作者: 唐晓嘉, E-mail: tangxj@swu.edu.cn

**摘 要**: 传统时态认知逻辑对完美回忆的刻画是狭隘的,并不能完整表达主体记得自己先前的认知状态.新系统 $S5^tC^t$ 将认知与时态融合进同一个算子中,个体知识、普遍知识和公共知识都被时间点所标注.$S5^tC^t$ 系统从技术上实现了每个个体(群体)都可以完美回忆自己在之前所有时刻上的认知状态.利用典范模型技术可以证明,$S5^tC^t$ 系统在等价且单调递减的框架类上是完全的.

**关键词**: 时态认知逻辑; $S5^tC^t$ 系统;完美回忆;记忆公理
**中图法分类号**: TP18

中文引用格式: 张玉志,唐晓嘉.面向完美回忆的时态认知逻辑.软件学报,2020,31(12):3787−3796. http://www.jos.org.cn/1000-9825/5888.htm

英文引用格式: Zhang YZ, Tang XJ. Temporal epistemic logic for perfect recall. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2020, 31(12):3787−3796 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/5888.htm

# Temporal Epistemic Logic for Perfect Recall

ZHANG Yu-Zhi, TANG Xiao-Jia

(Institute for Logic and Intelligence, Southwest University, Chongqing 400715, China)

**Abstract**: Traditional temporal epistemic logic is defective to express perfect recall. It cannot express the memories of individuals' knowledge. Time and knowledge are integrated into a single operator in the new system $S5^tC^t$, such that individual knowledge, general knowledge and common knowledge can be indicated by certain time. With this simple setting, each agent (individual or group) can recall all of their historical knowledge and has memories. The main result of the study is completeness, and it can be proved by using canonical model that $S5^tC^t$ is complete with respect to the class of all equivalence and monotone decreasing frames.

**Key words**: temporal epistemic logic; system $S5^tC^t$; perfect recall; recall axioms

诞生于 20 世纪 60 年代的认知逻辑(epistemic logic),是刻画多主体关于知识推理的有力工具.从语义上看,认知逻辑仅仅是对模态逻辑中的必然算子进行了新的解释,在模型上并未涉及到变化,因而它是一种静态的逻辑刻画.然而世界本身是变化的,主体对于世界的认识也会随着时间发生变化.如何刻画多主体关于世界认识的动态变化?其中一种方法是在认知逻辑的基础上加入时间部分,由此形成了时态认知逻辑(temporal epistemic logic,简称 TEL),其动态性特点体现为在不同的时间点上成立不同的公式.广义上的 TEL 可以分为两类:第 1 类是为每个认知算子加入一个绝对时间点,代表人物是日本学者 Sato[1],他首次给出一个结合时间与认知的正规化形式系统;第 2 类是将各种类型的时态算子,如 *F*(future),*O*(next time),□(always),*U*(until)等,与认知算子置于同一个逻辑中,但两类算子均独立出现[2−7].TEL 的应用领域主要在分布式系统、人工智能、信息安全和博弈论等[8].20 世纪 90 年代,计算机界开始关注 TEL 的模型检测问题,如今已经形成 MCK,MCMAS,OBDD,DEMO 等

* 基金项目: 国家社会科学基金(14ZDB016)
Foundation item: National Social Science Foundation of China (14ZDB016)
收稿时间: 2018-12-16; 修改时间: 2019-05-05; 采用时间: 2019-06-20; jos 在线出版时间: 2019-12-05
CNKI 网络优先出版: 2019-12-05 14:53:15, http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20191205.1453.001.html

相关模型检测技术[8−11].我国学者吴立军、苏开乐、骆翔宇等在发展时态认知逻辑的模型检测方面也做出了一些贡献[12−14].

完美回忆(perfect recall)是指主体记得自己先前的知识.TEL 中,用公理“$K_i\mathrm{O}\varphi\to\mathrm{O}K_i\varphi$”对此进行刻画,它由文献[2]给出,读作“如果主体 $i$ 知道下一刻$\varphi$成立,那么下一刻 $i$ 知道$\varphi$”,可以理解为主体能够完美回忆自己在前一时刻关于当前时刻的认识.文献[2]同时强调,公式“$K_i\varphi\to\mathrm{O}K_i\varphi$”不是有效式,即主体当前时刻的知识不一定是他在下一时刻的知识.这意味着命题的真值会随着时间的变化而变化.例如,某人在当前时刻不知道 $p$,根据负内省公理可知:在当前时刻他知道自己不知道 $p$,但下一时刻他完全有可能知道 $p$,即下一时刻他知道自己不知道 $p$ 可能不再成立.

我们认为,理性主体可以记得自己先前的认知状态是一种认知规律.例如,某人在今天不知道 $p$ 的真假(并且他也不知道明天自己能否知道 $p$ 的真假),但是明天他一定可以回忆起他在今天不知道 $p$.换句话说,即使主体当前的认知状态中不含有关于下一刻会怎样的认识,到了下一刻主体仍旧可以回忆自己先前的认知状态.假定主体具有完美回忆在社会实践中具有重要意义,如法官在判断某人是否犯有窝藏包庇罪时,需要当事人完美回忆自己在过去的具体时间点上知道什么和不知道什么;再比如,重复博弈中需要假定参与者能够完美回忆博弈过去的历史(如之前选择了诚实还是欺骗).公理“$K_i\mathrm{O}\varphi\to\mathrm{O}K_i\varphi$”没有考虑主体先前所有的认知状态,因此无法对上述认知规律进行逻辑刻画.

文献[2]否定公式“$K_i\varphi\to\mathrm{O}K_i\varphi$”是有效式意味着命题的真值会随着时间发生变化,其哲学基础是可疑的.按照现代逻辑创始人 Frege 的观点,逻辑对于符号组合有从涵义进到意谓的要求[15].Frege 认为:句子的涵义是它的思想,句子的意谓是它的真值.因为思想是没有时间性的,所以句子的真值不受时间影响,即命题的真值不会随时间发生变化.Quine 则认为:时间是与空间等同的是非本质的东西,可以用“时间量词”,如“现在”、“在 $t$ 之前”等来取代句子中的时态动词,从而使得一个句子的真值得到固定[16].除此之外,原子命题的真值不随时间发生变化,是逻辑中的一种常见假设,如动态认知逻辑(dynamic epistemic logic,简称为 DEL)中的模型更新和公开宣告逻辑(public announcement logic,简称为 PAL)中的删减模型,在技术上都需要定义原子命题的真值在更新前后(模型删减前后)保持不变.

其实,文献[1]已经给出了一种刻画完美回忆的方法,只是这种方法被人们忽视了.文献[1]曾给出公理系统 KT5,其基本形式语言包括原子命题集$\{p,q,...\}$、主体集$\{O,S_1,S_2,...\}$和对应正整数集的时间集$\{t_1,t_2,t_3,...\}$,其中,主体集中的“$O$”表示一个特殊个体“傻瓜”.合式公式递归定义为“$\varphi::=p|\bot|\varphi\supset\varphi|[St]\varphi$”,公式“$[St]\varphi$”结合了时态与认知,读作“$S$ 在 $t$ 时刻知道$\varphi$”.显然,KT5 系统将时态与认知融合进同一个算子,并且其形式语言没有涉及群体知识.内定理“$[St]\varphi\supset[Su]\varphi,t\leqslant u$”直接表达完美回忆,读作“如果 $S$ 在 $t$ 时刻知道$\varphi$并且 $t$ 早于 $u$,那么 $S$ 在 $u$ 时刻知道$\varphi$”.不难发现,此内定理成立依赖于命题的真值永远不会发生变化.由上述内定理结合负内省公理“$\neg[St]\varphi\supset[St]\neg[St]\varphi$”可以得到另外两条间接表述完美回忆的内定理:“$[St]\varphi\supset[Su][St]\varphi,t\leqslant u$”,读作“如果 $S$ 在 $t$ 时刻知道$\varphi$并且 $t$ 早于 $u$,那么 $S$ 在 $u$ 时刻知道 $S$ 在 $t$ 时刻知道$\varphi$”;“$\neg[St]\varphi\supset[Su]\neg[St]\varphi,t\leqslant u$”,读作“如果 $S$ 在 $t$ 时刻不知道$\varphi$并且 $t$ 早于 $u$,那么 $S$ 在 $u$ 时刻知道 $S$ 在 $t$ 时刻不知道$\varphi$”.后述两条内定理说明主体都可以完美回忆自己在先前所有时刻的认知状态,即知道自己认知状态的变化过程.

既然个体知识可以被人们完美回忆,那么公共知识(common knowledge)能否被群体完美回忆?答案是肯定的.文献[2]曾用公理“$C\mathrm{O}\varphi\to\mathrm{O}C\varphi$”表达群体关于公共知识的完美回忆,读作“如果下一刻$\varphi$成立是当前的公共知识,那么下一刻时$\varphi$是公共知识”.这跟表述个体完美回忆存在相同的弊端,不能表达群体完美回忆先前的所有的公共知识.文献[1]没有给出刻画完美回忆公共知识的公式,但在 KT5 系统中,傻瓜的知识一定是其他人的知识,这是早期公共知识的雏形,因此可以看做是一点前期工作.文献[17]曾将被时间标记的傻瓜知识“$[Ot]\varphi$”修改为被时间标记的公共知识“$C_G^T\varphi$”(在 $T$ 时刻,$\varphi$是群体 $G$ 的公共知识),但他们并未给出相关的形式系统,这是一点遗憾.

本文的目标是在文献[1]的基础上构造一个可以刻画对公共知识进行完美回忆的新系统,然后证明新系统的可靠性和完全性.由于目标系统的形式语言、公理、推理规则等与 S5C 系统[18]的非常相似,故将新系统取名

为 $S5^tC^t$ 系统.

## 1 $S5^tC^t$ 系统及其可靠性证明

**定义 1.1(形式语言)**. 令 $P=\{p,q,...\}$表示一个可数的常原子命题集;$A$ 表示一个有穷主体集,$B\subseteq A,a\in A$;$T$ 是自然数集 $N$(表明我们理解的时间是离散并且有起点)的一个有穷子集,$T\subset N,t,m,n\in T$.$S5^tC^t$ 系统的合式公式递归定义如下:

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi\to\varphi \mid K_a^t\varphi \mid C_B^t\varphi .$$

$K_a^t\varphi$ 读作主体 $a$ 在时刻 $t$ 知道$\varphi$; $C_B^t\varphi$ 读作公式$\varphi$在 $t$ 时刻是群体 $B$ 的公共知识.定义其他合式公式.

- $\varphi\wedge\psi=\neg(\varphi\to\neg\psi);\varphi\vee\psi=\neg\varphi\to\psi,\varphi\leftrightarrow\psi=(\varphi\to\psi)\wedge(\psi\to\varphi)$;
- $E_B^t\varphi=\wedge_{a\in B}K_a^t\varphi$ ,读作 $B$ 中所有主体在时刻 $t$ 都知道$\varphi$;
- $\langle K_a^t\rangle\varphi=\neg K_a^t\neg\varphi$ ,读作主体 $a$ 在时刻 $t$ 认为$\varphi$是可能的.

**定义 1.2**. $S5^tC^t$ 系统是一个如下形式的希尔伯特式公理系统.

Ax0:所有经典命题逻辑重言式特例

| | |
|---|---|
| Ax1: $K_a^t(\varphi\to\psi)\to(K_a^t\varphi\to K_a^t\psi)$ | 个体知识分配公理 |
| Ax2: $K_a^t\varphi\to\varphi$ | 知识公理 |
| Ax3: $K_a^t\varphi\to K_a^tK_a^t\varphi$ | 正内省公理 |
| Ax4: $\neg K_a^t\varphi\to K_a^t\neg K_a^t\varphi$ | 负内省公理 |
| Ax5: $K_a^m\varphi\to K_a^n\varphi\ (m<n)$ | 个体记忆公理 |
| Ax6: $C_B^t(\varphi\to\psi)\to(C_B^t\varphi\to C_B^t\psi)$ | 公共知识分配公理 |
| Ax7: $C_B^t\varphi\to(\varphi\wedge E_B^tC_B^t\varphi)$ | 固定点公理 |
| Ax8: $C_B^t(\varphi\to E_B^t\varphi)\to(\varphi\to C_B^t\varphi)$ | 归纳公理 |

*MP*:从$\varphi$和$\varphi\to\psi$推出$\psi$;

$N_K$:从$\varphi$推出 $K_a^t\varphi$;

$N_C$:从$\varphi$推出 $C_B^t\varphi$.

Ax5 刻画个体完美回忆,读作“如果主体 $a$ 在时刻 $m$ 知道$\varphi$并且 $m$ 早于 $n$,那么主体 $a$ 在时刻 $n$ 知道$\varphi$”.其余公理模式及推理规则都是在 S5C 系统中的 $K,C$ 算子上加入时间点 $t$ 作为上标而已,例如,Ax4 表示主体的负内省是在当前时间点完成的.

**命题 1.1(导出规则)**. $\vdash\varphi\to\psi$,则$\vdash K_a^t\varphi\to K_a^t\psi$.

证明:

| | |
|---|---|
| (1) $\varphi\to\psi$ | 假设 |
| (2) $K_a^t(\varphi\to\psi)$ | (1) $N_K$ |
| (3) $K_a^t(\varphi\to\psi)\to(K_a^t\varphi\to K_a^t\psi)$ | Ax1 |
| (4) $K_a^t\varphi\to K_a^t\psi$ | (2),(3) *MP* |

**命题 1.2**. 公式“$C_B^m\varphi\to C_B^n\varphi\ (m<n)$”是 $S5^tC^t$ 系统的内定理.

证明:

| | |
|---|---|
| (1) $C_B^m\varphi\to(\varphi\wedge E_B^mC_B^m\varphi)$ | Ax7 |
| (2) $C_B^m\varphi\to E_B^mC_B^m\varphi$ | (1)命题逻辑规则 |
| (3) $K_a^m\varphi\to K_a^n\varphi\ (m<n)$ | Ax5 |
| (4) $\wedge_{a\in B}K_a^m\varphi\to\wedge_{a\in B}K_a^n\varphi\ (m<n)$ | (3)命题逻辑规则 |

| | |
|---|---|
| (5) $E_B^m\varphi \to E_B^n\varphi\ (m<n)$ | (4)$E_B^m\varphi$ 与 $E_B^n\varphi$ 的定义 |
| (6) $E_B^m C_B^m\varphi \to E_B^n C_B^m\varphi\ (m<n)$ | (5)公理模式 |
| (7) $C_B^m\varphi \to E_B^n C_B^m\varphi\ (m<n)$ | (2)(6)假言三段论 |
| (8) $C_B^n(C_B^m\varphi \to E_B^n C_B^m\varphi)\ (m<n)$ | (7)$N_C$ |
| (9) $C_B^n(C_B^m\varphi \to E_B^n C_B^m\varphi) \to (C_B^m\varphi \to C_B^n C_B^m\varphi)$ | Ax8 |
| (10) $C_B^m\varphi \to C_B^n C_B^m\varphi\ (m<n)$ | (8)(9)$MP$ |
| (11) $C_B^m\varphi \to \varphi$ | (1)命题逻辑规则 |
| (12) $C_B^n(C_B^m\varphi \to \varphi)$ | (11)$N_C$ |
| (13) $C_B^n(C_B^m\varphi \to \varphi) \to (C_B^n C_B^m\varphi \to C_B^n\varphi)$ | Ax6 |
| (14) $C_B^n C_B^m\varphi \to C_B^n\varphi$ | (12)(13)$MP$ |
| (15) $C_B^m\varphi \to C_B^n\varphi\ (m<n)$ | (10)(14)假言三段论 |

据此,容易证明如下两个公式也是 $S5^tC^t$ 系统的内定理.

- “$C_B^m\varphi \to C_B^n C_B^m\varphi$ ,$m<n$”,读作“如果群体 $B$ 在 $m$ 时形成公共知识$\varphi$并且 $m$ 早于 $n$,那么群体 $B$ 在 $n$ 时形成公共知识‘群体 $B$ 在 $m$ 时形成公共知识$\varphi$’”;
- “$\neg C_B^m\varphi \to C_B^n\neg C_B^m\varphi$ ,$m<n$”,读作“如果群体 $B$ 在 $m$ 时没有形成公共知识$\varphi$并且 $m$ 早于 $n$,那么群体 $B$ 在 $n$ 时形成公共知识‘群体 $B$ 在 $m$ 时没有形成公共知识$\varphi$’”.

这说明随着时间的流逝,公共知识总是可以得到保留,并且群体总可以形成关于之前所有时刻认知状态(是否形成公共知识)的公共知识.

**定义 1.3(模型)**. 给定一个可数的常原子命题集 $P$,一个有穷主体集 $A$,自然数集 $N$ 的一个有穷子集 $T$.$S5^tC^t$ 系统合式公式的模型 $M$ 是一个三元组$\langle W,R,V\rangle$,其中,

- $W$ 为可能世界的集合;
- $R$ 是一个函数:$A\times T\to \wp(W\times W)$.任意 $R(a,t)$满足以下两个条件.
  - (1) 等价关系(自返、传递和对称);
  - (2) 单调递减:对任意 $m,n\in T,a\in A$,如果 $m<n$,那么 $R(a,m)\supseteq R(a,n)$;
- $V$ 是一个赋值函数:$P\to \wp(W)$.

要求 $R$ 是单调递减函数,是为了使每个主体的不可区分世界有序对的集合随着时间的延伸只可能收缩而不可能扩大,直观上是指随着时间的流逝,每个主体的不可区分世界越来越少.

**定义 1.4(自返传递闭包)**. 令 $R_E(B,t)=\bigcup_{a\in B}R(a,t)$ .$(w,u)\in R_E(B,t)$表示群体 $B$ 在 $t$ 时刻从 $w$ 经 1 步之后可以到达 $u$.如果存在一个序列 $w_0,w_1,w_2,\ldots,w_n$,使得 $w_0=w,w_n=s$,并且对任意 $0\leqslant k<n$ 都有$(w_k,w_{k+1})\in R_E(B,t)$,那么$(w,s)\in(R_E(B,t))^n$,这表示群体 $B$ 在 $t$ 时刻从 $w$ 经 $n$ 步之后可以到达 $s$.

$R_C(B,t)$是 $R_E(B,t)$的自返传递闭包,即一个满足下列 3 个条件的最小集合.

(1) $R_E(B,t)\subseteq R_C(B,t)$;

(2) 对任意 $w,u,v\in W$,若$(w,u)\in R_C(B,t)$并且$(u,v)\in R_C(B,t)$,则$(w,v)\in R_C(B,t)$;

(3) 对任意 $w\in W,(w,w)\in R_C(B,t)$.

**定义 1.5(语义)**. 给定模型 $M=\langle W,R,V\rangle$,公式$\varphi$在点模型$(M,w)$上是真的记为 $M,w\vDash\varphi$.本文将公式$\varphi$在满足等价且单调递减框架类上的所有点模型上都是真的记为$\vDash\varphi$.对 $M,w\vDash\varphi$的定义如下.

- $M,w\vDash p$ 当且仅当 $w\in V(p)$;
- $M,w\vDash\neg\varphi$当且仅当 $M,w\nvDash\varphi$;
- $M,w\vDash\varphi\wedge\psi$当且仅当 $M,w\vDash\varphi$并且 $M,w\vDash\psi$;
- $M,w\vDash K_a^t\varphi$ 当且仅当对所有 $v\in W$,若$(w,v)\in R(a,t)$,则 $M,v\vDash\varphi$;

- $M,w\vDash E_B^t\varphi$ 当且仅当对所有 $v\in W$,若$(w,v)\in R_E(B,t)$,则 $M,v\vDash\varphi$;
- $M,w\vDash C_B^t\varphi$ 当且仅当对所有 $v\in W$,若$(w,v)\in R_C(B,t)$,则 $M,v\vDash\varphi$.

**命题 1.3(可靠性)**. 对任意公式$\varphi$,若$\vdash\varphi$,则$\vDash\varphi$.

容易证明 $S5^tC^t$ 系统的推演规则保持有效性,只需证明 $S5^tC^t$ 系统的公理是有效的.本文仅证明 Ax5 是有效的($\vDash K_a^m\varphi\to K_a^n\varphi$ ,$m<n$),其他公理的有效性证明见文献[18].

证明:给定模型 $M=\langle W,R,V\rangle$,假设存在 $w\in W$,使得:

$$M,w\nvDash K_a^m\varphi\to K_a^n\varphi\ ,m<n \tag{1}$$

根据语义定义可得:

$$M,w\vDash K_a^m\varphi \tag{2}$$

并且

$$M,w\vDash\neg K_a^n\varphi\ ,m<n \tag{3}$$

由公式(3),根据语义定义可知,存在 $u\in W$,使得:

$$(w,u)\in R(a,n)\text{并且 }M,u\vDash\neg\varphi \tag{4}$$

由于 $R$ 单调递减并且 $m<n$,所以 $R(a,m)\supseteq R(a,n)$,所以$(w,u)\in R(a,m)$.再由公式(2),根据语义定义可知:

$$M,u\vDash\varphi \tag{5}$$

得出矛盾,所以假设不成立.所以$\vDash K_a^m\varphi\to K_a^n\varphi$ ,$m<n$.证毕. □

## 2 完全性证明

可靠性是指系统中所有可证公式经过语义解释后都是真的,它是所有逻辑系统都必须具备的基本性质(因为人们无法容忍一门理论能够推出虚假结论).与此不同,完全性是指所有在语义上为真的公式都是该系统的可证公式,它是部分逻辑系统才具有的一种美好性质.一个逻辑系统同时具有可靠性和完全性,意味着语义为真的公式构成的集合与系统中的可证公式集完全相同.$S5^tC^t$ 系统具有完全性,但其证明需要构造较为特殊的典范模型.本节证明主要参考了 S5C 系统完全性的证明[18].

**定义 2.1**. 任给公式$\varphi$,$\varphi$的闭包 $cl(\varphi)$是指一个满足如下条件的最小集合.

(1) $\varphi\in cl(\varphi)$;

(2) 若$\psi\in cl(\varphi)$,则$\psi$的子公式集 $Sub(\psi)\subseteq cl(\varphi)$;

(3) 若$\psi\in cl(\varphi)$且$\psi$不是形如$\neg\chi$的公式,则$\neg\psi\in cl(\varphi)$;

(4) 若 $C_B^t\psi\in cl(\varphi)$ ,则 $\{K_a^tC_B^t\psi\mid a\in B\}\subseteq cl(\varphi)$ ;

(5) 若 $K_a^m\psi,K_a^n\chi\in cl(\varphi)$ ,且 $m<n$,则 $K_a^nK_a^m\psi,K_a^n\neg K_a^m\psi\in cl(\varphi)$ .

**引理 2.1**. 对任意公式$\varphi$,$cl(\varphi)$总是有穷集.

利用结构归纳法容易证明.

**定义 2.2**. 令$\Phi$是某公式的闭包,称$\Gamma$是$\Phi$中的极大一致集当且仅当:

(1) $\Gamma\subseteq\Phi$;

(2) $\Gamma$是一致的:$\Gamma\nvdash\bot$,即:不存在一个有穷子集$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}\subseteq\Gamma$,使得$\vdash\neg(\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_n)$;

(3) $\Gamma$在$\Phi$中是极大的:不存在$\Gamma'\subseteq\Phi$,使得$\Gamma\subset\Gamma'$且$\Gamma'\nvdash\bot$.

显然,$\Phi$中的每个极大一致集$\Gamma$都是有穷的.令$\underline{\Gamma}=\wedge_{\varphi\in\Gamma}\varphi$.

**定义 2.3**. 令$\Phi$是某公式的闭包,$A$ 是$\Phi$中出现主体的集合,$T$ 是$\Phi$中出现时间点的集合,$a\in A,t\in T$.$\Phi$的典范模型 $M^c=\langle W^c,R^c,V^c\rangle$定义如下.

(1) $W^c=\{\Gamma|\Gamma$是$\Phi$中的极大一致集$\}$;

(2) $R^*$是一个函数:$A\times T^*\to\wp(W^c\times W^c)$,其中,$T^*=\{0,1,\dots,n\}\supseteq T$.设 $0<k\leqslant n$,对 $R^*(a,t^*)$归纳定义如下:

① 若$\Phi$中无形如 $K_a^0\varphi$ 的公式,$R^*(a,0)=W^c\times W^c$;

若$\Phi$中有形如$K_a^0\varphi$的公式, $R^*(a,0)=\{(\Gamma,\Delta)\mid\{K_a^0\varphi\mid K_a^0\varphi\in\Gamma\}=\{K_a^0\varphi\mid K_a^0\varphi\in\Delta\}\}$.

② 若$\Phi$中无形如$K_a^k\varphi$的公式,$R^*(a,k)=R^*(a,k-1)$;

若$\Phi$中有形如$K_a^k\varphi$的公式, $R^*(a,k)=\{(\Gamma,\Delta)\mid\{K_a^k\varphi\mid K_a^k\varphi\in\Gamma\}=\{K_a^k\varphi\mid K_a^k\varphi\in\Delta\}\}$.

$R^c$是$R^*$上的一个限制函数:$A\times T\to\wp(W^c\times W^c)$,即$R^c(a,t)=\{(\Gamma,\Delta)\in R^*(a,t)|(a,t)\in A\times T\}$.

(3) $V^c(p)=\{\Gamma\in W^c|p\in\Gamma\}$.

之所以如上定义$R^c$,是因为存在一些如“$\neg K_a^1p\wedge K_b^3p$”这样的公式,其闭包中不含$K_a^3\varphi$和$K_b^1\varphi$的形式,但在典范模型中仍然需要定义出$R^c(a,3)$和$R^c(b,1)$,否则,其典范模型不可能是$S5^tC^t$系统的模型.对此问题的第2种解决方法是:将定义1.3中$S5^tC^t$系统的模型修改为四元组$\langle W,f,R,V\rangle$,其中,$f$是一个函数,$A\to\wp(T)$.即,为每个主体指派一些时间点,这样在定义典范模型时,可以相应地将一些无意义的$(a,t)$二元组删除.这两种补救方法都可以在技术上实现定义出的典范模型是$S5^tC^t$系统模型的目标,因此二者效果是相同的.本文出于对克里普克模型三元组$\langle W,R,V\rangle$的敬意,采纳第1种解决方法.

**引理 2.2**. 令$\Phi$是某公式的闭包,则$\Phi$的每个一致子集都是$\Phi$中某个极大一致集的子集.

证明:令$\Delta\subseteq\Phi$是一致集并且$|\Phi|=n$,令$\varphi_k$是$\Phi$中第$k$个公式.考虑如下公式集的序列.

① $\Gamma_0=\Delta$;

② 若$\Gamma_k\cup\{\varphi_{k+1}\}$是一致集,则$\Gamma_{k+1}=\Gamma_k\cup\{\varphi_{k+1}\}$;

若$\Gamma_k\cup\{\varphi_{k+1}\}$不是一致集,则$\Gamma_{k+1}=\Gamma_k$.

显然,$\Delta\subseteq\Gamma_n$,我们需要证明$\Gamma_n$是$\Phi$中的极大一致集.首先,对$k$进行归纳可知,每个$\Gamma_k$都是一致集,所以$\Gamma_n$是一致集.另外,任取公式$\varphi_k\in\Phi$,假设$\varphi_k\notin\Gamma_n$.所以,$\Gamma_{k-1}\cup\{\varphi_k\}$是不一致的,那么$\Gamma_n\cup\{\varphi_k\}$也是不一致的.由于$\varphi_k\in\Phi$是任取的,所以不存在$\Gamma'\subseteq\Phi$,使得$\Gamma\subset\Gamma'$且$\Gamma'$是一致的.即,$\Gamma_n$也是$\Phi$中的极大集.

**定义 2.4(路径)**. 令$\Phi$是某公式的闭包,$\Gamma$是$\Phi$中的某个极大一致集.

一个从$\Gamma$开始的“$B(t)$-路径”是指$\Phi$中的某些极大一致集的序列$\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$.这个序列满足:对任意$k(0\leqslant k<n)$,都存在$a\in B$,使得$(\Gamma_k,\Gamma_{k+1})\in R^c(a,t)$且$\Gamma_0=\Gamma$.一个“$\varphi$-路径”是$\Phi$中的某些极大一致集的序列$\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$.这个序列满足:对任意$k(0\leqslant k<n)$,都有$\varphi\in\Gamma_k$.路径$\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$的长度是$n$.若路径$\Gamma_0,\dots,\Gamma_n$既是$B(t)$-路径又是$\varphi$-路径,则称其为“$B(t)$-$\varphi$-路径”.

**引理 2.3**. 令$\Phi$是某公式的闭包,$M^c=\langle W^c,R^c,V^c\rangle$是$\Phi$的典范模型,$\Gamma$与$\Delta$是$\Phi$中的极大一致集.则如下几点成立:

(1) $\Phi$中的$\Gamma$是演绎封闭的(对任意$\varphi\in\Phi$,若$\vdash\underline{\Gamma}\to\varphi$,则$\varphi\in\Gamma$);

(2) 若$\neg\varphi\in\Phi$,则$\varphi\in\Gamma$当且仅当$\neg\varphi\notin\Gamma$;

(3) 若$(\varphi\wedge\psi)\in\Phi$,则$(\varphi\wedge\psi)\in\Gamma$当且仅当$(\varphi\in\Gamma$且$\psi\in\Gamma)$;

(4) 若$\underline{\Gamma}\wedge\langle K_a^t\rangle\underline{\Delta}$是一致的,则$(\Gamma,\Delta)\in R^c(a,t)$;

(5) 若$K_a^t\psi\in\Phi$,则$\{K_a^t\varphi\mid K_a^t\varphi\in\Gamma\}\vdash\psi$当且仅当$\{K_a^t\varphi\mid K_a^t\varphi\in\Gamma\}\vdash K_a^t\psi$;

(6) $\vdash\vee\{\underline{\Gamma}|\Gamma$是$\Phi$中的极大一致集$\}$;

(7) 若$K_a^t\varphi\in\Phi$,则$(\Gamma,\Delta)\in R^c(a,t)$当且仅当$\{K_a^t\varphi\mid K_a^t\varphi\in\Gamma\}\subseteq\Delta$;

(8) 若$C_B^t\varphi\in\Phi$,则$C_B^t\varphi\in\Gamma$当且仅当始于$\Gamma$的每个$B(t)$-路径都是$\varphi$-路径.

证明:可以参考文献[18],仅在原有S5C系统认知算子上增加时间参数,证明方法相同. □

**引理 2.4(真值引理)**. 令$\Phi$是某公式的闭包,令$M^c=\langle W^c,R^c,V^c\rangle$是关于$\Phi$的典范模型.则对任意$\varphi\in\Phi$,任意$\Gamma\in W^c$, $M^c,\Gamma\vDash\varphi$当且仅当$\varphi\in\Gamma$.

证明:对公式$\varphi\in\Phi$的结构进行归纳证明.

(1) 假设$\varphi$是一个命题变元$p$.由典范模型的定义可知,$p\in\Gamma$当且仅当$\Gamma\in V^c(p)$.根据语义定义可知,$p\in\Gamma$当且仅当$M^c,\Gamma\vDash p$;

(2) 假设对任意极大一致集$\Gamma$和任意公式$\varphi,\psi\in\Phi$,都成立$M^c,\Gamma\vDash\varphi$当且仅当$\varphi\in\Gamma$,成立$M^c,\Gamma\vDash\psi$当且仅当$\psi\in\Gamma$.现在考虑公式$\varphi\in\Phi$的其他结构形式.

① $\neg\varphi$.给定公式$\neg\varphi$与任意$\Gamma\in W$.首先,$M^c,\Gamma\vDash\neg\varphi$当且仅当$M^c,\Gamma\nvDash\varphi$;其次,由归纳假设得,$M^c,\Gamma\nvDash\varphi$当且仅当$\varphi\notin\Gamma$;最后,由引理 2.3(2)可得,$\varphi\notin\Gamma$当且仅当$\neg\varphi\in\Gamma$.所以,$M^c,\Gamma\vDash\neg\varphi$当且仅当$\neg\varphi\in\Gamma$.

② $\varphi\wedge\psi$.首先,$M^c,\Gamma\vDash\varphi\wedge\psi$当且仅当($M^c,\Gamma\vDash\varphi$并且 $M^c,\Gamma\vDash\psi$);其次,根据归纳假设上述结论适用于$\varphi$与$\psi$可得,$M^c,\Gamma\vDash\varphi\wedge\psi$当且仅当($\varphi\in\Gamma$且$\psi\in\Gamma$);最后,由引理 2.3(3)可得,$M^c,\Gamma\vDash\varphi\wedge\psi$当且仅当$(\varphi\wedge\psi)\in\Gamma$.

③ $K_a^t\varphi$:

从右到左:假设 $K_a^t\varphi\in\Gamma$ .任取$\Phi$中的任意极大一致集$\Delta$.假设$(\Gamma,\Delta)\in R^c(a,t)$.根据对$\Phi$中典范模型的定义可知 $K_a^t\varphi\in\Delta$ .因为$\vdash K_a^t\varphi\rightarrow\varphi$ 且$\Phi$中的$\Delta$是演绎封闭的,所以$\varphi\in\Delta$.根据归纳假设可知:对$\Phi$中任意极大一致集$\Delta$,$M^c,\Delta\vDash\varphi$.因为$(\Gamma,\Delta)\in R^c(a,t)$,所以根据语义定义可得 $M^c,\Gamma\vDash K_a^t\varphi$;

从左到右:假设 $M^c,\Gamma\vDash K_a^t\varphi$ .所以对任意$\Delta\in W^c$,若$(\Gamma,\Delta)\in R^c(a,t)$,则 $M^c,\Delta\vDash\varphi$.假设集合$\Lambda=\{\neg\varphi\}\cup\{K_a^t\chi\mid K_a^t\chi\in\Gamma\}$ 是一致集.根据引理 2.2 可知,$\Lambda$是$\Phi$中某个极大一致集$\Theta$的子集.所以 $\{K_a^t\chi\mid K_a^t\chi\in\Gamma\}\subseteq\Theta$.根据引理 2.3(7)可知$(\Gamma,\Theta)\in R^c(a,t)$.因为$\neg\varphi\in\Lambda$并且$\Theta$是$\Phi$中极大一致集,所以$\varphi\notin\Theta$.根据归纳假设可知 $M^c,\Theta\nvDash\varphi$.因为 $M^c,\Gamma\vDash K_a^t\varphi$ 并且$(\Gamma,\Theta)\in R^c(a,t)$,所以 $M^c,\Theta\vDash\varphi$,得出矛盾.所以$\Lambda=\{\neg\varphi\}\cup\{K_a^t\chi\mid K_a^t\chi\in\Gamma\}$ 不是一致集.所以 $\{K_a^t\chi\mid K_a^t\chi\in\Gamma\}\vdash\varphi$ .根据引理 2.3(5)可知 $\Gamma\vdash K_a^t\varphi$ ,故 $K_a^t\varphi\in\Gamma$ ;

④ $C_B^t\varphi$ .假设 $C_B^t\varphi\in\Gamma$ .由引理 2.3(8)可知, $C_B^t\varphi\in\Gamma$ 当且仅当从$\Gamma$开始的每个 $B(t)$-路径都是$\varphi$-路径.根据归纳假设可知,从$\Gamma$开始的每个$B(t)$-路径都是$\varphi$-路径,等价于是说从$\Gamma$开始的每个$B(t)$-路径的$\Phi$中极大一致集上都成立$\varphi$是真的.根据语义定义可得, $C_B^t\varphi\in\Gamma$ 当且仅当 $M^c,\Gamma\vDash C_B^t\varphi$ .

综上情形(1)、情形(2),结论得证.

**引理 2.5(典范模型性).** 令$\Phi$是某公式的闭包, $K_a^m\varphi,K_a^n\psi\in\Phi$ ,$m<n$,$M^c=\langle W^c,R^c,V^c\rangle$是$\Phi$的典范模型,$\Gamma$与$\Delta$是$\Phi$中极大一致集.则 $R^c(a,t)$满足等价关系和单调递减.

证明:分别证明 $R^c$ 满足如下两种情况.

(1) 等价关系:根据定义 2.3 中对 $R^c$ 的定义容易得到;

(2) 单调递减:对任意 $a\in A,m<n$,都有 $R^c(a,m)\supseteq R^c(a,n)$.

不妨假设 $K_a^m\varphi\in\Gamma$ 且 $K_a^m\varphi\notin\Delta$ ,即$(\Gamma,\Delta)\notin R^c(a,m)$.由 Ax3,Ax4,Ax5 结合定义 2.1 和引理 2.3 容易得到:

$$K_a^nK_a^m\varphi\in\Gamma \text{ 且 } K_a^n\neg K_a^m\varphi\in\Delta .$$

所以,$(\Gamma,\Delta)\notin R^c(a,n)$.证毕. □

引理 2.5 表明,定义 2.3 给出的典范模型是 $S5^tC^t$ 模型.

**命题 2.1(完全性).** 对任意公式$\varphi$,若$\vDash\varphi$,则$\vdash\varphi$.

证明:假设$\nvdash\varphi$.所以$\{\neg\varphi\}$是一致集.由引理 2.2 可知,$\{\neg\varphi\}$是闭包 $cl(\neg\varphi)$中某个极大一致集$\Gamma$的子集.由引理 2.4 可知 $M^c,\Gamma\vDash\neg\varphi$,即 $M^c,\Gamma\nvDash\varphi$.所以,$\nvDash\varphi$.

## 3 应 用

$S5^tC^t$ 系统能够刻画哪些认知变化规律?我们以分析如下情景作答.

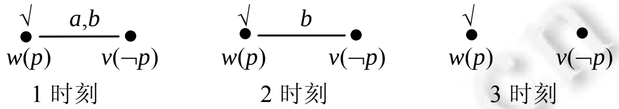
- 情景

*a* 与 *b* 进入一个内设远程控制投掷硬币机器的大房间里.有人按下按钮,硬币随之旋转落下,进入桌上的一个小盒子里,盒子关闭.而 *a*,*b* 二人都离硬币太远,以致于二人都没有看清楚硬币究竟哪面朝上.假定如下两点是主体 *a*,*b* 之间的公共知识:① 落入盒子中的硬币要么正面朝上,要么反面朝上;② *a*,*b* 二人都不知道盒中硬币究竟是正面朝上还是反面朝上.

然后,*a* 独自打开盒子,发现硬币正面朝上.*b* 看到 *a* 打开盒子,但 *b* 看不到盒子中的硬币.而且,*a* 也没有告诉 *b* 盒中硬币究竟是哪面朝上.

最后,*b* 在 *a* 面前打开盒子,两人都看到硬币正面朝上.

记硬币正面朝上为 $p$,硬币反面朝上为$\neg p$,硬币落入盒子时刻为 1,$a$ 打开盒子时刻为 2,$b$ 打开盒子时刻为 3.常原子命题集 $P=\{p\}$,主体集 $A=\{a,b\}$,时间点集 $T=\{1,2,3\}$.$a,b$ 在 1 时刻都无法区分硬币哪面朝上,$a$ 在 2 时刻已经可以区分,但 $b$ 直到 3 时刻才可以区分.模型 $M=\langle W,R,V\rangle$,其中,$W=\{w,v\}$;$R(a,1)=R(b,1)=R(b,2)=\{(w,w),(w,v),(v,w),(v,v)\}$,$R(a,2)=R(a,3)=R(b,3)=\{(w,w),(v,v)\}$;$V(p)=\{w\}$.模型图示如下,其中,√标注的世界为现实世界.




根据语义定义,可以得出如下一些结论:

$$M,w \vDash C_A^1(\neg K_a^1 p \wedge \neg K_b^1 p) \wedge C_A^2(K_a^2 p \vee K_a^2 \neg p) \tag{6}$$

即:在现实世界 $w$ 上,群体 $A$ 在 1 时刻形成公共知识“$a,b$ 在 1 时刻都不知道 $p$”,并且群体 $A$ 在 2 时刻形成公共知识“$a$ 在 2 时刻知道 $p$ 或者知道$\neg p$”;

$$M,w \vDash C_A^3(p \wedge (\neg K_a^1 p \wedge \neg K_b^1 p) \wedge (K_a^2 p \vee K_a^2 \neg p)) \tag{7}$$

即:在现实世界 $w$ 上,群体 $A$ 在 3 时刻形成公共知识“$p$,并且‘$a,b$ 在 1 时刻都不知道 $p$’,并且‘$a$ 在 2 时刻知道 $p$ 或者知道$\neg p$’”.

由公式(6)、公式(7)可知,群体 $A$ 在 1 和 2 时刻形成的公共知识在 3 时刻得到保留.这说明公共知识可以不断进行积累,说明主体(群体)当前时刻的知识已经包含了之前所有时刻的知识;

$$M,w \vDash K_a^3(\neg K_a^1 p \wedge K_a^2 p \wedge K_a^2 \neg K_b^1 p) \tag{8}$$

即:在现实世界 $w$ 上,$a$ 在 3 时刻知道“$a$ 在 1 时刻不知道 $p$,并且 $a$ 在 2 时刻知道 $p$,并且 $a$ 在 2 时刻知道 $b$ 在 1 时刻不知道 $p$”;

$$M,w \vDash C_A^3(C_A^1(\neg K_a^1 p \wedge \neg K_b^1 p) \wedge C_A^2(K_a^2 p \vee K_a^2 \neg p)) \tag{9}$$

即:在现实世界 $w$ 上,群体 $A$ 在 3 时刻形成公共知识“‘$a,b$ 在 1 时刻都不知道 $p$’是群体 $A$ 在 1 时刻的公共知识,并且‘$a$ 在 2 时刻知道 $p$ 或者知道$\neg p$’是群体 $A$ 在 2 时刻的公共知识”.

公式(8)、公式(9)说明主体(群体)能够完美回忆自己先前所有时刻的认知状态,即能够掌握自己认知状态变化的过程.

上述分析表明,$S5^tC^t$ 系统可以在模型上对如下直观进行合理解释:理性主体可以完美回忆自己在先前所有时刻的认知状态,并且可以将知识不断积累.

$S5^tC^t$ 系统与 PAL 非常类似,都在随着时间的变化而破坏模型上的关系,但 PAL 中主体在更新后的模型中显然无法对之前的认知状态进行回忆.与带有时态算子的 TEL 相比,$S5^tC^t$ 系统可以精确刻画主体完美回忆之前所有具体时间点上的认知状态,这是过去算子所不能表达的.相比 KT5 系统,$S5^tC^t$ 系统增加了公共知识算子,群体可以对公共知识进行完美回忆,能够对公共知识的不断积累进行逻辑刻画.这些对比说明,$S5^tC^t$ 系统在刻画完美回忆方面优于其他逻辑.

## 4 结 语

带有时态算子的 TEL 认为,命题的真值会随时发生变化.这种观点导致它不能对这样一种认知规律进行逻辑刻画:即理性主体(群体)可以回忆自己先前的认知状态,在此基础上实现知识的不断积累.这是一种具有普适性的认知规律,例如,假定北京的一个朋友在 2018 年 12 月 5 日打电话告诉你“北京今天下雪了”.如果不将句子“北京今天下雪了”处理为常原子命题,你就很难据此扩充自己的知识库,也无法掌握自己认知状态的变化过程.

本文在文献[1]的基础上构造了 $S5^tC^t$ 系统,它在等价且单调递减的框架类上具备可靠性和完全性,它能够对主体(群体)的知识积累及完美回忆自己先前的认知状态进行合理解释.按照 $S5^tC^t$ 系统的观点,你会先将句子“北京今天下雪了”处理为“北京在 2018 年 12 月 5 日下雪了”这种常原子命题(记为 $p$),然后将命题 $p$ 放入自己的

知识库进行存储,认知状态会立即变成你在 2018 年 12 月 5 日知道 $p$(记为 $K_a^n p$).在此之后的任何时间点上你都知道 $p$,并且你都记得 $\neg K_a^{n-2}p,\neg K_a^{n-1}p,K_a^n p,K_a^{n+1}p,K_a^{n+2}p,\ldots$ .

$S5^tC^t$ 系统的构建理念及其结论在人工智能、分布式系统、博弈论等领域具有潜在应用价值,如可以据此探讨智能机器人的知识库扩充原则和方法,可以从模型上解释博弈中的主体(群体)如何根据自己认知状态的变化历史而制定策略等.鉴于时态逻辑在人工智能、软件工程、规划问题和信息安全等领域有着广泛应用,在 $S5^tC^t$ 系统的基础上考虑兼顾更多时序方面的性质,或许是未来一项有意义的工作.另外,$S5^tC^t$ 系统的公式中存在时间点,在模型上可以在不同的时间点上任意跳跃,这与混合逻辑(hybrid logic)的一些思想存在共性.利用混合逻辑的技术,完全可以在语形上达到准确刻画主体认知状态的效果.例如,文中公理 Ax5 完全可以利用混合逻辑的技术表述为“$@_m K_a\varphi\to @_n K_a\varphi, m<n$”.但是,加入混合逻辑的技术后给出一套合适的模型会成为一个新的难题.我们认为,这也是未来值得进一步研究的方向之一.

**References**:


[1] Sato M. A study of kripke-type models for some modal logics by gentzen's sequential method [Ph.D. Thesis]. University of Kyoto, 1977.

[2] Lehmann D. Knowledge, common knowledge, and related puzzles (extended summary). In: Proc. of the 3rd Annual ACM Symp. on Principles of Distributed Computing. 1984. 62−67. [doi: 10.1145/800222.806736]

[3] Parikh R, Ramanujam R. Distributed processes and the logic of knowledge. In: Proc. of the Logic of Programs Conf. Springer-Verlag, 1985. 256−268. [doi: 10.1007/3-540-15648-8_21]

[4] Kraus S, Lehmann D. Knowledge, belief and time. Theoretical Computer Science, 1988,58(1-3):155−174. [doi: 10.1016/0304-3975(88)90024-2]

[5] Halpern JY, Vardi MY. The complexity of reasoning about knowledge and time. i. lower bounds. Journal of Computer and System Sciences, 1989,38(1):195−237. [doi: 10.1016/0022-0000(89)90039-1]

[6] Spaan E. Nexttime is not necessary. In: Proc. of the Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge Conf. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1990. 241−256.

[7] Meyden RVD. Axioms for knowledge and time in distributed systems with perfect recall. In: Proc. of the 9th Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science. 1994. 448−457.

[8] Ditmarsch HV, Halpern JY, Hoek WVD, Kooi B. Handbook of Epistemic Logic. College Publications, 2015. 395−442.

[9] Halpern JY, Vardi MY. Model checking vs. theorem proving: A manifesto. Artificial Intelligence and Mathematical Theory of Computation, 1991,212:151−176. [doi: 10.1016/B978-0-12-450010-5.50015-3]

[10] Meyden RVD, Shilov NV. Model checking knowledge and time in systems with perfect recall. In: Proc. of the Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science. 1999. 432−445. [doi: 10.1007/3-540-46691-6_35]

[11] Hoek WVD, Wooldridge M. Model checking knowledge and time. In: Proc. of the Int’l Spin Workshop on Model Checking of Software. 2002. 95−111. [doi: 10.1007/3-540-46017-9_9]

[12] Wu LJ, Su KL. A model checking algorithm for temporal logics of knowledge in multi-agent systems. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2004,15(7):1012−1020 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1012.htm

[13] Luo XY, Su KL, Yang JJ. Bounded model checking for temporal epistemic logic in synchronous multi-agent systems. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2006,17(12):2485−2498 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/2485.htm

[14] Luo XY, Su KL, Gu M. A model checking approach for solving epistemic riddles. Chinese Journal of Computers, 2010,33(3):406−414 (in Chinese with English abstract).

[15] Frege G, Wrote; Wang L, Trans. Anthology of Frege’s Philosophical Works. Beijing: Commercial Press, 2006. 128 (in Chinese).

[16] Haack S, Wrote; Luo Y, Trans. Philosophy of Logics. Beijing: Commercial Press, 2003. 193−200 (in Chinese).

[17] Fagin R, Halpern JY, Moses Y, Vardi MY. Reasoning About Knowledge. MIT Press, 1995.

[18] Ditmarsch HV, Hoek WVD, Kooi B. Dynamic Epistemic Logic. Springer Press, 2007.

**附中文参考文献**:

[12] 吴立军,苏开乐.多智体系统时态认知规范的模型检测算法.软件学报,2004,15(7):1012−1020. http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1012.htm

[13] 骆翔宇,苏开乐,杨晋吉.有界模型检测同步多智体系统的时态认知逻辑.软件学报,2006,17(12):2485−2498. http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/2485.htm

[14] 骆翔宇,苏开乐,顾明.一种求解认知难题的模型检测方法.计算机学报,2010,33(3):406−414.

[15] Frege G,著;王路,译.弗雷格哲学论著选辑.北京:商务印书馆,2006.128.

[16] Haack S,著;罗毅,译.逻辑哲学.北京:商务印书馆,2003.193−200.

**张玉志**(1988－),男,博士生,CCF 专业会员,主要研究领域为时态逻辑,认知逻辑.

**唐晓嘉**(1954－),女,教授,博士生导师,主要研究领域为逻辑哲学,动态认知逻辑.