软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2016,27(9):2185−2198 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004856]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel: +86-10-62562563

求解#SMT 问题的局部搜索算法*

周俊萍, 李睿智, 曾志勇, 殷明浩

(东北师范大学 计算机科学与信息技术学院,吉林 长春 130117)

通讯作者: 殷明浩, E-mail: mhyin@nenu.edu.cn

摘 要: #SMT 问题是 SMT 问题的扩展,它需要计算一阶逻辑公式 F 所有可满足解的个数.目前,该问题已被广泛应用于编译器优化、硬件设计、软件验证和自动化推理等领域.随着#SMT 问题的广泛应用,设计可以求解较大规模#SMT 实例的求解器亟待解决.基于以上原因,设计了一种求解较大规模#SMT 实例的近似求解器——VolComputeWithLocalSearch.它在现有的#SMT 精确求解算法的基础上加入差分进化算法,通过调用体积计算工具qhull,进而给出#SMT 问题的近似解.算法采用群体规则减少体积计算的次数,差分进化方法快速地枚举各个有解的区域.另外,从理论上证明了 VolComputeWithLocalSearch 求解器可以得到精确解的下界,使其可以应用在软件测试等只需要知道问题下界的领域.实验结果表明:VolComputeWithLocalSearch 求解器是稳定的、具有快速的求解能力,并在高维问题上具有很好的表现.

关键词: #SMT;满足性;差分进化;线性公式

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 周俊萍,李睿智,曾志勇,殷明浩.求解#SMT 问题的局部搜索算法.软件学报,2016,27(9):2185−2198. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4856.htm

英文引用格式: Zhou JP, Li RZ, Zeng ZY, Yin MH. Local search algorithm for solving #SMT problem. Ruan Jian Xue Bao/ Journal of Software, 2016,27(9):2185−2198 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4856.htm

Local Search Algorithm for Solving #SMT Problem

ZHOU Jun-Ping, LI Rui-Zhi, ZENG Zhi-Yong, YIN Ming-Hao

(School of Computer Science and Information Technology, Northeast Normal University, Changchun 130117, China)

Abstract: #SMT problem is an extension of SMT problem. It needs to compute the number of satisfiable solutions for a given first-order logic formula. Now the problem has been widely applied in the compiler optimization, hardware design, software verification, and automated reasoning. With widespread application of #SMT problem, the design of #SMT solver for large-scale instances is needed. This work presents a design of an approximate solver (VolComputeWithLocalSearch) for solving large-scale #SMT instances. It adds the differential evolution algorithm into the existing exact solution algorithm for #SMT, and gives the approximate solution by calling the volume calculation tool qhull. The algorithm reduces the number of volume calculations by bunch rule and enumerates all regions with solutions by differential evolution algorithm. This paper also proves in theory that the solution of new algorithm is the lower bound of the exact solution, thus it can be used in software testing and other fields which only need to know the lower bound. The experimental results show that VolComputeWithLocalSearch solver is stable, fast, and has a good performance in high dimension problems.

Key words: #SMT; satisfiability; differential evolution; linear formulation

* 基金项目: 国家自然科学基金(61370156, 61403076, 61403077); 高等学校博士学科点专项科研基金(20120043120017); 新世纪优秀人才支持计划(NCET-13-0724); 吉林省大型科学仪器装备共享共用专项项目(20150623024TC-03)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61370156, 61403076, 61403077); Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (20120043120017); Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-13-0724); The Large-scale Scientific Instrment and Equipment Sharing Project of Jilin Province(20150623024TC-03)

收稿时间: 2015-04-01; 修改时间: 2015-05-08; 采用时间: 2015-05-16

命题可满足性问题(简称 SAT 问题)是计算机科学领域的重要研究问题之一,作为第一个被证明为 NP 完全的问题[1],许多实际问题如电路设计、自动定理证明、限界模型检验、等价性检查都可以在多项式时间内转为 SAT 问题进行求解.但由于 SAT 问题以命题逻辑公式为处理对象,制约了其描述能力和抽象层次,同时也限制了 SAT 问题的应用.例如在 RTL 电路中,由于 SAT 求解器的抽象层次较低,用位级信息描述问题将丢失大量的逻辑信息同时增加问题的规模和复杂性,从而导致结果不准确并且增加求解的空间与时间开销[2].针对以上问题,以一阶逻辑公式为处理对象的可满足性模理论(简称 SMT 问题)获得了广泛的关注.由于其采用字级建模语言,其描述能力更强,可以提供一个更灵活的描述问题的框架,而且能够更加准确地反映系统模型的理论,因此,SMT 问题具有更加广阔的应用前景.目前,SMT 问题已经广泛应用于软件和硬件验证、类型推断、扩展静态检查、测试用例生成、调度、规划等问题中.例如:Intel 和 AMD 公司利用 SMT 求解器验证其设计的芯片的有效性;微软已经把 SMT 求解技术应用在其代码分析工具中[3−7].

SMT 问题的一种泛化问题是计数 SMT 问题(简称#SMT 问题),该问题不只需要找到一组解满足给定的一阶逻辑公式,还需要计算满足给定的一阶逻辑公式所有解的个数,因此,#SMT 问题的难度也难于 SMT 问题,其计算复杂性是#P 的.高效地解决#SMT 问题对人工智能、软件工程等很多领域都有着深远的影响.例如:在软件测试中,计算数据满足路径的个数问题可以转换成#SMT 问题进行求解;在电路设计上,可以利用#SMT 求解出使用较为频繁的电路,针对这些电路进行冗余设计,不仅可以省钱还会减少电路的体积.近年来,#SMT 问题的研究已经开始得到研究学者的重视,例如,马菲菲等人给出了一种精确求解#SMT 的方法,但该求解器只能求解小规模的线性问题[8].因此,如何求解较大规模的#SMT 问题、如何更准确地给出#SMT 问题的近似解的研究还处于空白.

本文设计了一种求解较大规模的#SMT 问题的近似求解器.我们在现有的#SMT 精确求解算法的基础上加入差分进化算法,提出了一种新的局部搜索算法 VolComputeWithLocalSearch,通过调用体积计算工具 qhull,进而给出#SMT 问题的近似解.算法采用群体规则减少体积计算的次数,差分进化方法快速地枚举各个有解的区域.我们从理论上证明了 VolComputeWithLocalSearch 算法得到的#SMT 近似解是精确解的下界.实验结果表明,VolComputeWithLocalSearch 算法在高维问题上具有很好的表现.

本文第 1 节介绍基本的定义.第 2 节给出基于差分进化的#SMT 问题求解算法.第 3 节给出实验结果并分析.最后给出全文的总结和未来的相关工作.

1 相关概念

为了方便理解,这部分给出与本文相关的基本概念.从本节起,如无特殊声明,将使用 $x_i(i>0)$表示布尔变量,$v_i(i>0)$和 y 表示数值变量,α表示真值赋值.另外说明,本文只研究包含线性算术理论的#SMT 问题,即:一阶逻辑公式中的函数变元和谓词变元的类型集合只包含整数、实数和布尔类型,变量之间的操作符只有逻辑运算符(例如析取、合取)和算术运算符(例如加、减)的#SMT 实例.

定义 1. 设 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$是布尔变量集合,定义在 X 上的真值赋值是函数$\mu:X\to\{\text{true,false}\}$.每个真值赋值可以用 n 元布尔向量表示,那么在 X 上存在 2^n 个不同的真值赋值.

定义 2. 设 x 是一个布尔变量,则称 x 或$\neg x$ 是文字,其中,称 x 是正文字,$\neg x$ 是负文字.文字 x 的真值为 true 当且仅当布尔变量 x 赋值为 true;文字$\neg x$ 的真值为 true 当且仅当布尔变量 x 赋值为 false.

定义 3. 子句 $C=l_1\vee l_2\vee\ldots\vee l_k$,其中,$l_1,l_2,\ldots,l_k$ 是文字.子句 C 可满足当且仅当至少有一个文字 $l_i(1\leqslant i\leqslant k)$赋值为 true.

定义 4. 合取范式(简称 CNF 范式)$F=C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_i$,其中,$C_1,C_2,\ldots,C_i$ 是子句.CNF 范式 F 可满足当且仅当每一个子句都可满足.

定义 5. 给定 CNF 范式 F,计算 F 可满足的真值赋值个数的问题称为模型计数问题.

定义 6. 一阶逻辑公式φ是指由个体常量与个体变量、函数常量与函数变量、命题常量与命题变量、谓词常量与谓词变量以及逻辑连接符组成的公式.

定义 7. 给定一阶逻辑公式φ,可满足性模理论问题(简称 SMT 问题)是指判断给定的一阶逻辑公式φ是否存在可满足解的问题.

定义 8. 给定一阶逻辑公式φ,#SMT 问题是指计算一阶逻辑公式φ可满足解的个数的问题.

在本文中,我们只研究包含线性算术理论的#SMT 问题,即,一阶逻辑公式中的函数变元和谓词变元的类型集合只包含整数、实数和布尔类型,变量之间的操作符只有逻辑运算符(例如析取、合取)和算术运算符(例如加、减)的#SMT 实例.另外,对于只包含线性算术理论的#SMT 实例,它可以被表示为一个 CNF 范式:$X(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$,其中,布尔变量 $x_i=expr_{i1}\ op\ expr_{i2}(i=1,\ldots,n)$.$expr_{i1}$ 和 $expr_{i2}$ 是线性算术表达式,op 是运算符,例如"<","="等.

例 1: 给定#SMT 实例$\varphi=(((y+2v<1)\rightarrow(20<y))\vee(v<50))\wedge((20<y)\rightarrow\neg(v>4)\wedge(v<50))$,通过引入布尔变量$x_1=(y+2v<1)$,其中,$expr_{11}=y+2v$,$expr_{12}=1$,$op$ 为<.其他变量如下所示:

$$\begin{cases} x_1=(y+2v<1); \\ x_2=(20<y); \\ x_3=(v>4); \\ x_4=(v<50); \end{cases}$$

可以将#SMT 实例表示为 CNF 范式,首先得到$F'=((x_1\rightarrow x_2)\vee x_4)\wedge(x_2\rightarrow\neg x_3\wedge x_4)$,化简后得到 CNF 范式:

$$F=(\neg x_1\vee x_2\vee x_4)\wedge(\neg x_2\vee\neg x_3)\wedge(\neg x_2\vee x_4).$$

定义 9. 如果一个几何体上任意两点所连的线段都在该几何体的内部,则该几何体被称作凸面体.

定理 1. 线性公式所围成的几何体要么不存在,要么是凸面体.

对于以线性算术为背景理论的#SMT 问题,它实际上是计算一阶逻辑公式所形成的凸面体的体积,显然,这个问题包括模型计数问题和经典的凸面体体积计算问题.

定义 10. 设$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$是一个布尔变量集合,全赋值是指对 X 上的所有布尔变量都进行一次真值指派(即赋值为 true 或 false),部分赋值是指对 X 上的部分布尔变量赋值为 true 或 false.我们用向量$\alpha=\{l_1,l_2,l_3,\ldots\}$表示一个真值赋值,$\alpha$或者是一个全赋值,或者是一个部分赋值,其中,向量$\alpha$中的任意元素 l_i 的真值都为 true.

定义 11. 给定一阶逻辑公式φ和其对应的 CNF 范式 F,F 的可满足赋值是指满足 CNF 范式 F,同时满足φ的背景理论的真值赋值.

从第 2 节起,如无特殊说明,我们称 CNF 范式 F 的可满足赋值是指既满足 CNF 范式 F 又满足φ的背景理论的真值赋值.另外,对于 CNF 范式 F 的任意一个真值赋值都对应一个线性约束公式,见例 2.

例 2:考虑例 1 中的#SMT 实例$\varphi=(((y+2v<1)\rightarrow(20<y))\vee(v<50))\wedge((20<y)\rightarrow\neg(v>4)\wedge(v<50))$,其被表示为 CNF 范式$F=(\neg x_1\vee x_2\vee x_4)\wedge(\neg x_2\vee\neg x_3)\wedge(\neg x_2\vee x_4)$.我们可以得到一个真值赋值$\alpha=\{\neg x_1,\neg x_2,\neg x_3,\neg x_4\}$,其中,

$$\begin{cases} x_1=(y+2v<1); \\ x_2=(20<y); \\ x_3=(v>4); \\ x_4=(v<50); \end{cases}$$

其对应的线性约束公式为

$$\begin{cases} x_1=(y+2v\geqslant 1); \\ x_2=(20\geqslant y); \\ x_3=(v\leqslant 4); \\ x_4=(v\geqslant 50); \end{cases}$$

另外,我们可以看出:α可以满足 CNF 范式 F,但由于$\neg x_3$和$\neg x_4$存在冲突,其不满足φ的背景理论,故α不是 F 的可满足赋值.

2 基于差分进化的#SMT 问题求解算法

#SMT 问题是求解 SMT 实例的可满足解个数的问题,对于一个具有连续问题的解空间,该问题实际上是一

个计算体积的问题.而体积计算是一项耗时的过程,这个过程被 Dyer 和 Frieze 证明是#P-hard 的[9,10].因此,如何减少体积计算的次数,对提高算法效率具有重要作用.另外,对于#SMT 问题的近似求解,如何能够快速地枚举各个有解的区域,对提高算法的精确性具有重要的作用.本文给出的基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch 即采用群体规则来减少体积计算的次数、差分进化方法来快速地枚举各个有解的区域.

图 1 给出了基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch 的整体框架.

```
算法 1. VolComputeWithLocalSearch(φ).
输入:#SMT(LAC)实例φ;
输出:#SMT(LAC)实例φ的体积 V_φ.
1: V_φ=0;
2: 将一阶逻辑公式φ转换成 CNF 范式 F;
3: while TRUE do
4:     if BCP==CONFLICT then
5:         backtrack_level=AnalyzeConflict();
6:         if backtrack_level<0 then
7:             return V_φ;
8:         回退到 backtrack_level;
9:     else
10:        α=当前赋值;
11:        if α⊨F then
12:            if α在背景理论上是不一致的 then
13:                回溯到上一个决策层;
14:            else
15:                for 所有文字 l_i∈α do
16:                    if l_i 是一个决策变量或者是决策变量的非 then
17:                        α'=α−{l_i};
18:                        if α'⊨F then
19:                            α=α';
20:                顶点集合 Vertex=DE(α);
21:                V_φ+=qhull(Vertex);
22:                把α的非作为一个子句加入公式 F 中;
23:        else
24:            选择一个布尔变量扩展当前的赋值;
25: end
```

Fig.1 Algorithm VolComputeWithLocalSearch based on differential evolution for #SMT problem

图 1 基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch

算法是在 DPLL(T)[11,12]基础上的,首先初始化实例的体积 V_φ=0,并把一阶逻辑公式转换为 CNF 范式(第 1 行、第 2 行);然后,算法进入布尔约束传播过程(简称 BCP,即,运用单文字规则传播的全过程).如果布尔约束传播过程出现冲突,则进行冲突分析并产生新子句,然后判断新产生的子句的决策层(*backtrack_level*)是否小于 0.如果是,则算法结束返回体积 V_φ;否则回退到新子句所对应的决策层(即,新子句中的变量在 DPLL(T)搜索树中所对应节点的层数)(第 4 行~第 8 行).如果布尔约束传播过程不出现冲突,则把当前真值赋值赋给α(第 10 行).算法进入考察当前真值赋值α是否满足 CNF 范式 F 的过程:

- 如果当前真值赋值α不满足 CNF 范式 F,则选择一个未赋值的布尔变量扩展当前的赋值(第 24 行);
- 否则,判断α在背景理论上是否一致(第 12 行~第 22 行):如果不一致,则回溯到上一个决策层(第 12 行、第 13 行);否则,α即为 CNF 范式 F 的可满足赋值.此时,考察α中的文字是否可以从α中删除(第 15 行~第 19 行),以此获得尽可能小的部分赋值.这实际上就是群体规则的思想,这部分内容将在第 2.1 节中进行详细介绍.

最后,重复调用差分进化(DE)子过程获得 m 个满足#SMT 公式φ的解,即凸面体的顶点(第 20 行),这部分内容将在第 2.2 节介绍.顶点集合求出来以后,就把顶点集合放到体积计算工具中,将该线性公式φ的体积下界求解出来(第 21 行).在计算凸面体的体积上,我们调用一种体积计算工具 qhull,这是因为 qhull 是一种非常实用的工

具,它可以计算凸包、delaunay 三角网、voronoi 图、交汇于一点的半空间、最远位置的 delaunay 三角网、最远位置的 voronoi 图.另外,qhull 也可以计算 2 维、3 维、4 维甚至高维空间的凸面体的体积.

定理 2. 基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch 给出的解是#SMT 实例的下界,即,给出的体积是凸面体体积的下界.

证明:反证法.假设算法得出的解不是#SMT 的下界,即,算法给出的体积是有包含在凸面体外的体积的.因此,在差分进化过程中所给的顶点中,有一个或多个顶点在凸面体的外边;或者有顶点是满足一阶逻辑公式的,但顶点间连线在凸面体外边或者部分在外边.对于第 1 种情况,如果顶点在凸面体外边,则该顶点不满足一阶逻辑公式,这与顶点满足一阶逻辑公式是矛盾的;对于第 2 种情况,顶点满足一阶逻辑公式而顶点间连线全部或部分在凸面体外边,这与凸面体的定义是冲突的.如果给出的体积不包含在凸面体外部的部分,这时只有凸面体内部的部分,因此,基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch 给出的解是#SMT 实例的下界,即,给出的体积是凸面体的体积的下界. □

2.1 群体规则

基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch 采用群体规则[8]减少体积计算的次数,以提高算法的效率.接下来,首先给出群体的定义.

定义 12[8]. 给定 CNF 范式 F,F 的全赋值集合 S 被称为一个群体,当且仅当存在一个部分赋值 α_c,使得集合中的任意一个全赋值 α 满足 $\alpha\in S\leftrightarrow\alpha_c\subseteq\alpha$.

对于一个群体,计算它们体积将会简化.如下命题所示:

命题 1 [8]. 对一个具有部分赋值 α_c 的群体 S,一定有 $\sum_{\alpha\in s} volume(\alpha)=volume(\alpha_c)$,见例 3.

例 3:同样考虑例 1 中的#SMT 实例 $\varphi=(((y+2v<1)\rightarrow(20<y))\vee(v<50))\wedge((20<y)\rightarrow\neg(v>4)\wedge(v<50))$,$\varphi$可以被表示为对应的 CNF 范式 $F=(\neg x_1\vee x_2\vee x_4)\wedge(\neg x_2\vee\neg x_3)\wedge(\neg x_2\vee x_4)$,其中,

$$\begin{cases} x_1=(y+2v<1);\\ x_2=(20<y);\\ x_3=(v>4);\\ x_4=(v<50); \end{cases}$$

用 SMT 求解器很容易找到 7 个 CNF 范式 F 的可满足赋值,因此在直接求解方式中,需要调用 7 次体积计算工具计算体积,然后,把计算的体积加起来才能得到公式总的体积.这里,我们仅列举 7 个可满足赋值中的 3 个.

$$\alpha_1=\{\neg x_1,\neg x_2,x_3,\neg x_4\},$$
$$\alpha_2=\{\neg x_1,\neg x_2,\neg x_3,x_4\},$$
$$\alpha_3=\{\neg x_1,\neg x_2,x_3,x_4\}.$$

接下来,在这 3 个可满足赋值的基础上再添加一个真值赋值 $\alpha_4=\{\neg x_1,\neg x_2,\neg x_3,\neg x_4\}$,很容易校验出,这个赋值可以使 CNF 范式 F 为真.但由于 α_4 的背景理论谓词之间存在冲突关系,所以对应的线性公式组成的区域是不存在的,即 $volume(\alpha_4)=0$.根据群体的定义,以上 4 个真值赋值可以组成一个群体,与之对应的部分赋值是 $\{\neg x_1,\neg x_2\}$.根据命题 1,有:

$$volume(\alpha_1)+volume(\alpha_2)+volume(\alpha_3)=volume(\alpha_1)+volume(\alpha_2)+volume(\alpha_3)+volume(\alpha_4)=volume(\{\neg x_1,\neg x_2\}).$$

因此,我们只需要调用体积计算工具计算一次就可以得到体积.显然:即使赋值会造成谓词冲突,也不会影响体积计算的值.

2.2 差分进化方法

差分进化(differential evolution,简称 DE)是一种基于群体进化的算法,它首先产生#SMT 问题的初始种群,然后,通过适应度计算,再对每个个体进行变异、交叉和选择操作更新种群.新的种群再重新进行适应度计算、变异、交叉和选择操作,反复迭代,直到种群收敛或满足最大进化次数 Max_*Gen* 为止[13−17].图 2 给出了差分进化子过程的框架.

算法 2. 差分进化子过程(DE).

```
1:  随机初始化种群 E;
2:  初始化全局最优解 gbest;
3:  while 种群收敛或满足最大进化次数 Max_Gen do
4:      for I_e in E do
5:          在 E 中随机选 3 个候选解 I_a,I_b 和 I_c,且 I_a≠I_b≠I_c≠I_e;
6:          随机选一个整数 R∈{1,2,…,n},其中,n 是该优化问题的维数;
7:          I_y=I_a+F(I_b−I_c);          //变异操作
8:          for i=0; i<n; i++ do    //交叉操作
9:              生成一个位于[0,1)区间的随机实数 r_i;
10:             生成一个位于[0,n)区间的随机整数 R;
11:             if r_i<CR||i==R then
12:                 I_zi=I_yi;
13:             else
14:                 I_zi=I_ei;
15:         if f(I_z)<f(I_e) then    //选择操作
16:             I_e=I_z;
17:         if f(gbest)<f(I_e) then
18:             gbest=I_e;
19: end
```

Fig.2 Subprocedure of differential evolution

图 2 差分进化子过程

子过程首先进入初始化阶段,在#SMT 求解的迭代过程可以得到一个 CNF 范式 F 的可满足赋值 α,将其表示为对应的线性约束公式;然后,在公式的变量取值域中随机初始化变量的值,得到个体(也称为候选解或解):

$$I_e=(i_{e1},...,i_{ei},...,i_{en}).$$

其中,$1\leqslant i\leqslant n$,n 是#SMT 实例的维数.以这种方式形成 NP 个个体,形成种群 $E(E=\{I_1,I_2,\ldots,I_{NP}\})$(第 1 行).根据适应度函数计算 NP 个个体的适应度,把适应度最好的个体作为全局最优解 $gbest$ 的初始值(第 2 行).如例 3 中 F 的可满足赋值 $\alpha_1=\{\neg x_1,\neg x_2,x_3,\neg x_4\}$,其所对应的线性约束公式为

$$\begin{cases}\neg x_1=(y+2v\geqslant 1);\\ \neg x_2=(20\geqslant y);\\ x_3=(v>4);\\ \neg x_4=(v\geqslant 50);\end{cases}$$

在变量取值域中随机初始化变量取值 v=51.50,y=20.23 后,可以得到个体 I_e=(51.50,20.23)(其中,n=2).以这种方式形成 NP 个个体,形成种群 E.最后,算法进入一个迭代过程,对种群 E 中的每一个个体 I_e 进行更新(第 3 行~第 18 行).在考虑个体 I_e 时,在种群 E 中随机地选择 3 个其他候选解 I_a,I_b 和 I_c(其中,$a\neq b\neq c\neq e$),并且随机地选择一个整数 R(其中,$1\leqslant R<n$,n 是#SMT 实例的维数)(第 5 行、第 6 行),然后进行变异操作(第 7 行).该操作是形成新个体的第 1 步,目的是形成中间解,为交叉操作提供一个用于操作的解.它首先用候选解 I_b 和 I_c 相减得到差分因子,然后差分因子会与缩放因子 F 相乘后再经过与候选解 I_a 相加得到新解 I_y,即 $I_y=I_a+F(I_b-I_c)$.算法进行交叉操作(第 8 行~第 14 行),该操作在变异的基础上形成下一代的准个体.交叉操作可以用数学公式描述如下:

$$I_{zi}=\begin{cases}I_{ei} & rand(0,1)>CR \text{ or } i\neq rand(0,NP)\\ I_{yi} & rand(0,1)\leqslant CR \text{ or } i=rand(0,NP)\end{cases}.$$

其中,I_{ei} 和 I_{yi} 表示变异操作生成中间解的第 i 维变量;$rand(0,1)$是一个生成区间位于[0,1)随机实数的函数;$rand(0,NP)$是一个生成区间位于[0,NP)随机整数的函数,NP 是种群中个体的数量,NP 一般大于等于 4;CR 是取值范围为[0,1]的交叉概率.交叉概率决定着整个种群的变异大小,变异大,有利于局部搜索和加速收敛速度;变异小,有利于保持种群多样性和全局搜索.最后,算法进行选择操作(第 15 行~第 18 行).经过交叉和变异操作后,生成的中间解 I_z 将与种群中的个体 I_e 进行竞争.只有当解 I_z 的适应度比解 I_e 的适应度好时,才能用解 I_z 替代解 I_e,否则,I_e 仍会留在种群中.以最小优化为例,选择操作可以用数学公式描述如下:

$$I_e=\begin{cases}I_z, f(I_z)<f(I_e)\\ I_e, f(I_z)\geqslant f(I_e)\end{cases}.$$

其中,$f:R_n\to R$ 表示适应度函数.适应度函数可以是代价最小化函数,也可以是适应度最大的函数.该函数把候选解以实数向量的形式作为输入产生一个实数,该数表示候选解的适应度.在本文中,我们采用的适应度函数如下所示:

$$f(I_e)=\sum_{j=1}^{l} distance(j,I_e).$$

其中,

$$distance(j,I_e)=\begin{cases}0, & \text{if } A_jI_e\leqslant w_j\\ |A_jI_e-w_j|, & \text{otherwise}\end{cases}.$$

A_j 表示 $l\times d$ 矩阵 A 的第 j 行,w 是 d 维列向量,w_j 表示向量的第 j 个元素,I_e 是一个解.该公式在数学上的含义是解 I_e 到不满足约束的距离.若以例 1 中的约束为例,则 I_e 就是一个解,l 取值为 4,表示有 4 个约束,d 取值为 2,表示有 2 个变量,则 A 是一个 4×2 的矩阵,w 是一个 2 维列向量.我们用 $I_e(p,q)$表示解,用α_{ij} 表示矩阵 A 第 i 行第 j 列的数,用 w_i 表示列向量 w 的第 i 个数.对于这个几何体,点 $I_e(p,q)$到第 1 根直线的距离可以用如下公式计算:

$$d=\frac{|a_{00}p+a_{01}q-w_0|}{\sqrt{a_{00}^2+a_{01}^2}}.$$

因为在矩阵 A 不变的情况下需要重复计算 $\sqrt{a_{00}^2+a_{01}^2}$,为了提高计算性能,我们在算法中去掉 $\sqrt{a_{00}^2+a_{01}^2}$.采取这种方法对适应度的影响较小,同时可以提高计算速度.注意:根据本文的变异方案可以得知,种群所有个体不一定都会参与变异操作,但所有的个体均会参与交叉操作,并且只会进行一次交叉操作.另外,为了在快速收敛过程中避免算法陷入局部最优,我们在每一代进化过程后,当前最好的个体会被重新随机初始化.

3 实验比较

我们在 Linux 环境下,用 C++实现了基于差分进化的#SMT 问题求解算法 VolComputeWithLocalSearch.为了测试 VolComputeWithLocalSearch 求解器的性能,我们下载了文献[8]所设计的精确求解器 VolComputeBunches 和一种基于蒙特卡罗的体积估算器 DirectMonteCarloMethod.所有的实验在一台 DELL OPTIPLEX 990 上运行,实验的运行环境如下:操作系统为 Ubuntu 11.10 x64;编译器为 GCC4.6(在编译时使用的优化选项是 O2);处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU@3.40GHz(8CPUs);内存为 8GB DDR3.在差分进化子过程中,我们选择缩放因子 F 的值为 2,交叉概率 CR 取值 0.5,种群中个体数量 NP 的值为 500,最大进化次数 Max_Gen 取值为 100.本实验总共有 4 个,这 4 个实验分别从不同的角度验证算法的计算能力、精确度以及稳定性.

3.1 VolComputeWithLocalSearch算法与精确算法的比较

本实验的主要目的是通过对比实验,考察 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算能力和验证算法求得的结果是精确值的下界.在实验中,将会与文献[8]提出的#SMT 精确算法 VolComputeBunches 进行比较,实验中用的所有实例均来自于文献[8].表 1 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法与精确算法的比较结果.在表中,实验结果以科学计数法表示,cnf 表示实例 CNF 公式的子句数,v 表示实例的维数.从表中的数据可以看出,精确算法 VolComputeBunches 只能求解八维以内的实例和部分八维实例.与精确算法 VolComputeBunches 比较,VolComputeWithLocalSearch 算法表现最好的实例可以达到精确值的 80%左右.另外,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果均小于精确算法 VolComputeBunches,这也在一定程度上说明了 VolComputeWithLocalSearch 算法求出的结果是精确值的下界.

Table 1 Compare of algorithm VolComputeWithLocalSearch and exact algorithm

表 1 VolComputeWithLocalSearch 算法与精确算法的比较

cnf	*v*	VolComputeBunches	VolComputeWithLocalSearch
20	5	5.86E+11	4.7E+11
40	15	–	1.66E+27
20	8	2.71E+18	3.99E+17
50	10	–	1.16E+21
40	5	4.02E+10	1.11E+10
40	5	3.84E+10	1.52E+10
50	8	–	4.01E+11
100	8	–	8.7E+14
50	9	–	1.26E+15
80	8	5.23E+18	3.21E+17

3.2 VolComputeWithLocalSearch算法的计算性能实验

本实验的目的主要是验证 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算能力以及影响算法性能的因素.因为在求解#SMT 问题时需要计算#SMT 实例所对应的 CNF 范式 F 的可满足赋值,CNF 范式的难度对求解#SMT 问题有一定影响,因此在本实验中,我们选择 CNF 范式中子句和变量的比值在 4~5 之间的相变区域[18−25].本实验共分为 6 组,表 2~表 8 给出了实验的结果.在表中,*instance* 表示实例名称,P 表示实例所对应的 CNF 范式中变量个数,*cls* 表示实例所对应的 CNF 范式中子句个数,V 表示实例的维数,*LB* 表示 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果(科学计数法表示),*Time* 表示 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算耗时(单位是秒),r 表示子句个数和变量个数的比值.在表 2~表 5 的数据中,各表内子句个数和变量个数的比值不变,实例的维数增加,各表间子句个数和变量个数的比值增加.在各表中,前 7 个实例的维数即 V 值逐个增加 1,剩余的 9 个实例的维数即 V 值逐个增加 5.在表 7 的数据中,子句个数和变量个数的比值和实例的维数不变,CNF 范式的规模将不断扩大.在表 8 的数据中,子句个数和变量个数的比值和实例的规模不变,实例的维数将不断增加.

表 2 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法在 r=4 时的计算结果.从表中的计算结果即 *LB* 的数据上看,我们可以得出 VolComputeWithLocalSearch 算法已经可以计算出当 r=4 维数是 55 的#SMT 问题.从表中的计算时间上我们可以看出,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算时间与维数基本上成正比关系.

Table 2 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with r=4

表 2 当 r=4 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果

Instance	P cls V	LB	Time
9_36_4	9 36 4	8.91E+08	21
9_36_5	9 36 5	4.3E+11	66
9_36_6	9 36 6	5.52E+13	71
9_36_7	9 36 7	9.83E+15	129
9_36_8	9 36 8	1.56E+18	370
9_36_9	9 36 9	1.09E+20	2 219
9_36_10	9 36 10	3.16E+21	7 199
9_36_15	9 36 15	4.89E+26	8 042
9_36_20	9 36 20	3.46E+32	5 667
9_36_25	9 36 25	4.52E+37	7 532
9_36_30	9 36 30	1.38E+39	6 168
9_36_35	9 36 35	2.12E+39	4 368
9_36_40	9 36 40	1.02E+39	5 815
9_36_45	9 36 45	2.38E+39	6 176
9_36_50	9 36 50	2.04E+39	8 853
9_36_55	9 36 55	1.02E+39	10 514

表 3 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法在 r=4.33 时的计算结果.表中的计算结果即 *LB* 的数据上看,我们可以得出当 r=4.33 时,VolComputeWithLocalSearch 算法已经可以计算出维数是 55 的#SMT 问题.从表中的计算时间上我们可以看出,VolComputeWithLocalSearch 算法在计算时间上具有递增趋势.

Table 3 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with r=4.33

表 3 当 r=4.33 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果

Instance	P cls V	LB	Time
9_39_4	9 39 4	1.37E+09	39
9_39_5	9 39 5	3.46E+11	62
9_39_6	9 39 6	2.62E+13	30
9_39_7	9 39 7	2.13E+15	97
9_39_8	9 39 8	2.21E+18	527
9_39_9	9 39 9	2.24E+20	3 159
9_39_10	9 39 10	3.4E+21	5 266
9_39_15	9 39 15	3.91E+26	7 106
9_39_20	9 39 20	2.31E+31	4 534
9_39_25	9 39 25	9.51E+37	7 048
9_39_30	9 39 30	7.31E+38	3 828
9_39_35	9 39 35	3.06E+39	5 580
9_39_40	9 39 40	1.36E+39	6 090
9_39_45	9 39 45	2.04E+39	6 944
9_39_50	9 39 50	1.7E+39	8 059
9_39_55	9 39 55	1.36E+39	7 848

表 4 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法在 r=4.67 时的计算结果.从表中的计算结果即 *LB* 的数据上看,我们可以得出当 r=4.67 时,VolComputeWithLocalSearch 算法也可以计算出维数是 55 的#SMT 问题.从表中的计算时间上我们可以看出,VolComputeWithLocalSearch 算法在计算时间上也具有递增趋势.

Table 4 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with r=4.67

表 4 当 r=4.67 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果

Instance	P cls V	LB	Time
9_42_4	9 42 4	8.99E+08	22
9_42_5	9 42 5	3.31E+11	53
9_42_6	9 42 6	1.63E+13	12
9_42_7	9 42 7	1.13E+16	98
9_42_8	9 42 8	5.12E+17	199
9_42_9	9 42 9	1.18E+20	2 126
9_42_10	9 42 10	3.47E+21	6 032
9_42_15	9 42 15	7.24E+26	8 281
9_42_20	9 42 20	3.12E+32	4 738
9_42_25	9 42 25	7.36E+36	3 546
9_42_30	9 42 30	1.71E+39	4 964
9_42_35	9 42 35	3.81E+39	5 908
9_42_40	9 42 40	3.4E+39	7 503
9_42_45	9 42 45	2.38E+39	6 231
9_42_50	9 42 50	1.7E+39	4 418
9_42_55	9 42 55	1.7E+39	6 960

表 5 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法在 r=5 时的计算结果.从表中的计算结果即 *LB* 的数据上看,我们可以得出当 r=5 时,VolComputeWithLocalSearch 算法也可以计算出维数是 55 的#SMT 问题.从表中的计算时间上我们可以看出,VolComputeWithLocalSearch 算法在计算时间上也具有递增趋势.

Table 5 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with r=5

表 5 当 r=5 时 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果

Instance	P cls V	LB	Time
9_45_4	9 45 4	2.63E+08	21
9_45_5	9 45 5	1.24E+11	42
9_45_6	9 45 6	4.27E+13	79
9_45_7	9 45 7	7.45E+15	99
9_45_8	9 45 8	4.46E+17	196
9_45_9	9 45 9	7.2E+19	1 189
9_45_10	9 45 10	3.08E+21	4 949
9_45_15	9 45 15	2.52E+26	5 776
9_45_20	9 45 20	1.05E+33	4 795
9_45_25	9 45 25	4.35E+38	4 647
9_45_30	9 45 30	1.77E+39	4 232

Table 5 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with r=5 (Continued)

表 5 当 r=5 时 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果(续)

Instance	P cls V	LB	Time
9_45_35	9 45 35	2.72E+39	4 308
9_45_40	9 45 40	2.04E+39	6 499
9_45_45	9 45 45	2.72E+39	6 656
9_45_50	9 45 50	1.7E+39	4 393
9_45_55	9 45 55	1.7E+39	6 468

表 6 给出了表 2~表 5 的执行时间横向对比.

Table 6 Compare of run time from Table 2 to Table 5

表 6 表 2~表 5 的运行时间横向对比

P	V	r=4	r=4.33	r=4.67	r=5
9	4	21	39	22	21
9	5	66	62	53	42
9	6	71	30	12	79
9	7	129	97	98	99
9	8	370	527	199	196
9	9	2 219	3 159	2 126	1 189
9	10	7 199	5 266	6 032	4 949
9	15	8 042	7 106	8 281	5 776
9	20	5 667	4 534	4 738	4 795
9	25	7 532	7 048	3 546	4 647
9	30	6 168	3 828	4 964	4 232
9	35	4 368	5 580	5 908	4 308
9	40	5 815	6 090	7 503	6 499
9	45	6 176	6 944	6 231	6 656
9	50	8 853	8 059	4 418	4 393
9	55	10 514	7 848	6 960	6 468

从表中可以看出:当实例的维数为 9 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的执行时间产生了较大的波动.从整体上看,VolComputeWithLocalSearch 算法在 r=4 时执行时间最长,在某种程度上也说明了#SMT 问题在 r=4 时较难求解.表 7 给出了当 V=50 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果.从表中可以看出:随着实例规模的增加,算法的执行时间出现了递减-不变-递增的趋势.同时也可以发现,算法可以计算出维数为 50 的实例.

Table 7 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with V=50

表 7 当 V=50 时 VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果

Instance	P cls V	LB	Time
10_42_50	10 42 50	3.4E+38	2 947
11_46_50	11 46 50	1.63E+19	1 988
12_50_50	12 50 50	1.39E+24	348
13_54_50	13 54 50	1.44E+19	996
14_59_50	14 59 50	2.1E+22	798
15_63_50	15 63 50	9.35E+16	955
16_69_50	16 69 50	1.41E+09	935
17_73_50	17 73 50	1.54E+13	1 754
18_78_50	18 78 50	4.88E+20	3 761
19_85_50	19_85_50	1.77E+13	3 632

表 8 给出了当 P=15,r=4.27 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果.在表中所有实例的维数即 V 值逐个增加 5.从表中的计算结果即 LB 的数据上看,我们可以得出 VolComputeWithLocalSearch 算法已经可以计算出维数是 50 的#SMT 问题.从表中的计算时间上可以看出,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算时间与维数基本上成正比关系.

Table 8 Results of algorithm VolComputeWithLocalSearch with P=15, r=4.27

表 8 当 P=15,r=4.27 时,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算结果

Instance	P cls V	LB	Time
15_64_5	15 64 5	8.76E+08	4
15_64_10	15 64 10	2.5E+16	187
15_64_15	15 64 15	1.49E+15	299
15_64_20	15 64 20	2.78E+30	424
15_64_25	15 64 25	2.71E+25	316
15_64_30	15 64 30	6.19E+19	548
15_64_35	15 64 35	2.35E+20	848
15_64_40	15 64 40	3.4E+38	3 319
15_64_45	15 64 45	3.81E+18	858
15_64_50	15 64 50	3.46E+15	1 005

综上所述,VolComputeWithLocalSearch 算法能够处理较大规模的问题,且算法的计算耗时与实例的维数具有较强的关系,与子句数和变量个数关系不大.通过表 2~表 5 中的数据可以初步得出,算法的计算耗时与实例的维数相关的.表 7 中数据则在很大程度上排除了与实例的子句数和变量个数的关系.表 8 中数据进一步验证了算法的计算耗时与实例的维数具有较强的关系,与子句数和变量个数关系不大.

从计算结果上,VolComputeWithLocalSearch 算法的计算能力是可以到 55 维的.

3.3 VolComputeWithLocalSearch算法的精确度实验

本实验的目的是考察 VolComputeWithLocalSearch 算法的精确度.在实验中,将进行基于蒙特卡罗的体积估算算法 DirectMonteCarloMethod 的对比实验[26].基于蒙特卡罗的体积估算算法 DirectMonteCarloMethod 是一种经典的体积计算算法,该算法利用蒙特卡洛法随机均匀地在约束范围内生成顶点,然后随机取一定数量的单位球体,在球体计算顶点的密度,再利用密度估算体积.我们在实验中所用到的实例均出自于文献[26],表 9 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法与 DirectMonteCarloMethod 算法的比较结果.在表中,*Vol* 表示实例的实际体积(采用数学方法计算),*Time* 表示计算耗时,*Ratio* 表示精确度(算法计算的结果与精确体积的比值).从表中可以看出,VolComputeWithLocalSearch 算法的精确度都达到了 95%以上.

在与算法 DirectMonteCarloMethod 精确度的比较上,VolComputeWithLocalSearch 算法除了在 Sample1, Sample5,Sample6 略低于算法 DirectMonteCarloMethod,在其他实例上均有较大幅度的提高.尤其对于实例 Sample3,精确度从原来的 0.01777 提高到 0.95321.在计算耗时方面,VolComputeWithLocalSearch 算法则全面优胜于 DirectMonteCarloMethod 算法,最大的提高幅度约达 95.8%(实例 Sample8).

Table 9 Compare of accuracy of algorithm VolComputeWithLocalSearch and DirectMonteCarloMethod

表 9 VolComputeWithLocalSearch 与 DirectMonteCarloMethod 在精确度方面的比较结果

	Vol	DirectMonteCarloMethod		VolComputeWithLocalSearch	
		Ratio	Time	Ratio	Time
Sample1	253	**0.998 54**	873.838	0.993 50	**190.891**
Sample2	20 000	0.642 20	1 882.048	**0.999 68**	**159.683**
Sample3	400	0.011 06	643.291	**0.994 37**	**95.292**
Sample4	20 000	0.998 02	1 664.748	**0.999 70**	**89.452**
Sample5	1 600 000 000	**0.996 26**	1 963.366	0.960 01	**164.553**
Sample6	2763562.5	**0.999 19**	2 039.159	0.993 60	**174.18**
Sample7	235 200 000	0.017 77	2 135.570	**0.953 21**	**172.027**
Sample8	12916.66699	0.443 85	2 028.618	**0.999 54**	**85.446**

3.4 VolComputeWithLocalSearch算法的稳定性实验

本实验的目的是考察 VolComputeWithLocalSearch 算法的稳定性.在实验中,同样与基于蒙特卡罗的体积估算算法 DirectMonteCarloMethod[26]进行比较.我们在实验中所用到的实例均出自于文献[26],每个实例进行 10 次重复实验,分别记录 VolComputeWithLocalSearch 算法和 DirectMonteCarloMethod 算法的计算结果和执行时间.表 10、表 11 给出了 VolComputeWithLocalSearch 算法与 DirectMonteCarloMethod 算法的稳定性实验结果,

其中,*Ratio* 为算法的精确度(计算结果与真实值的比值),*Time* 表示耗时,*Average* 是精确度的平均值,*Variance* 是精确度的方差.

Table 10 Results of stability of algorithm VolComputeWithLocalSearch

表 10 VolComputeWithLocalSearch 算法稳定性实验结果

实验次数		Sample1	Sample2	Sample3	Sample4	Sample5	Sample6	Sample7	Sample8
1	Ratio	0.993 518	0.999 58	0.994 518	0.999 815	0.960 5	0.994 709	0.951 577	0.999 569
	Time	192.20	161.52	91.96	89.07	161.34	172.74	166.53	87.68
2	Ratio	0.993 494	0.999 7	0.994 523	0.999 645	0.962 844	0.992 422	0.949 345	0.999 569
	Time	190.7	157.50	96.61	89.66	165.43	178.04	173.68	85.87
3	Ratio	0.994 538	0.999 685	0.995 19	0.999 675	0.962 506	0.992 067	0.954 528	0.999 515
	Time	189.11	158.98	91.81	89.73	164.40	174.70	173.63	85.58
4	Ratio	0.993 96	0.999 555	0.995 508	0.999 685	0.956 594	0.995 034	0.952 696	0.999 445
	Time	190.53	161.18	94.51	89.93	166.91	174.23	174.44	86.6
5	Ratio	0.993 174	0.999 725	0.993 428	0.999 645	0.958 85	0.992 871	0.952 636	0.999 569
	Time	191.05	158.89	96.54	89.93	165.10	173.43	175.70	82.00
6	Ratio	0.992 767	0.999 665	0.992 558	0.999 725	0.958 756	0.992 194	0.958 95	0.999 639
	Time	190.43	157.02	98.55	90.40	167.39	173.68	171.73	85.51
7	Ratio	0.994 012	0.999 715	0.993 93	0.999 675	0.959 756	0.995 404	0.955 48	0.999 561
	Time	191.13	159.95	99.29	88.50	163.20	174.10	173.19	85.18
8	Ratio	0.993 549	0.999 635	0.993 703	0.999 745	0.960 388	0.993 877	0.948 508	0.999 561
	Time	190.1	158.79	97.37	89.03	164.63	174.57	174.18	85.54
9	Ratio	0.993 791	0.999 705	0.994 965	0.999 72	0.959 944	0.992 831	0.955 901	0.999 554
	Time	192.42	159.32	91.66	89.26	164.01	171.74	170.07	84.43
10	Ratio	0.992 277	0.999 835	0.995 458	0.999 69	0.960 044	0.994 676	0.952 483	0.999 507
	Time	191.24	163.68	94.62	89.01	163.12	174.57	167.12	86.07
Average	Ratio	0.993 508	0.999 68	0.994 378	0.999 702	0.960 018	0.993 608	0.953 21	0.999 549
	Time	190.89	159.68	95.29	89.45	164.55	174.18	172.03	85.44
Variance	Ratio	3.78E−07	5.62E−09	8.36E−07	2.39E−09	2.93E−06	1.46E−06	8.79E−06	2.33E−09
	Time	0.843 249	3.557 221	7.169 236	0.293 876	2.920 401	2.432 28	8.881 721	1.990 044

Table 11 Results of stability of algorithmDirectMonteCarloMethod

表 11 DirectMonteCarloMethod 算法稳定性实验结果

实验次数		Sample1	Sample2	Sample3	Sample4	Sample5	Sample6	Sample7	Sample8
1	Ratio	0.992 672	0.640 181	0.010 35	0.997 055	1.006 677	0.999 792	0.018 01	0.441 733
	Time	862.966 8	1 884.131	650.426 8	1 656.687	1 950.42	1 996.876	2 138.781	2 015.006
2	Ratio	1.009 394	0.630 025	0.010 828	1.001 698	1.000 717	0.999 079	0.017 349	0.445 468
	Time	869.329 6	1 892.382	674.389 2	1 655.636	1 955.599	2 073.645	2 129.395	2 023.088
3	Ratio	0.997 644	0.638 916	0.010 958	0.999 352	1.002 781	0.999 936	0.016 612	0.446 69
	Time	896.416 6	1 880.987	658.370 1	1 658.089	1 957.85	2 064.349	2 147.92	2 032.872
4	Ratio	1.007 667	0.643 082	0.010 517	1.000 008	1.001 123	0.990 397	0.017 375	0.446 845
	Time	858.967 4	1 884.524	639.438 5	1 661.594	1 958.3	2 026.864	2 128.407	2 034.148
5	Ratio	1.006 079	0.650 907	0.010 847	0.997 399	1.002 125	1.004 173	0.017 715	0.438 905
	Time	882.418 6	1 886.095	637.982 2	1 658.089	1 967.531	2 019.067	2 134.088	2 032.021
6	Ratio	0.996 28	0.639 319	0.011 088	1.003 02	0.992 118	0.999 423	0.016 46	0.437 729
	Time	883.872 9	1 882.952	636.393 5	1 658.79	1 970.908	2 023.865	2 139.028	2 030.745
7	Ratio	0.997 893	0.625 419	0.010 943	1.000 962	0.999 582	0.996 836	0.017 539	0.434 64
	Time	880.418 9	1 879.415	632.024 7	1 661.243	1 966.856	2 068.547	2 131.371	2 032.872
8	Ratio	0.997 74	0.637 704	0.010 812	1.000 594	0.990 889	0.999 735	0.017 859	0.445 648
	Time	857.876 7	1 877.451	632.554 3	1 659.491	1 970.458	2 024.165	2 138.781	2 028.618
9	Ratio	0.994 025	0.632 085	0.010 733	0.998 887	0.997 974	1.005 272	0.016 393	0.461 062
	Time	874.783 3	1 874.7	634.804 9	1 695.94	1 967.081	2 068.547	2 125.69	2 029.894
10	Ratio	1.010 849	0.643 383	0.011 403	0.997 625	0.991 023	0.997 427	0.017 717	0.431 717
	Time	871.329 3	1 877.844	636.525 9	1 681.921	1 968.657	2 025.665	2 142.239	2 026.916
Average	Ratio	1.001 024	0.638 102	0.010 848	0.999 66	0.998 501	0.999 207	0.017 303	0.443 044
	Time	873.838	1 882.048	643.291	1 664.748	1 963.366	2 039.159	2 135.57	2 028.618
Variance	Ratio	4.1E−05	4.86E−05	7.59E−08	3.49E−06	2.66E−05	1.49E−05	3.23E−07	6.11E−05
	Time	134.902	23.531 97	169.598 2	158.993 1	46.251 82	653.454 9	43.646 17	30.326 33

可以看出:

- 在算法精确度的平均值上,相较于 DirectMonteCarloMethod 算法,VolComputeWithLocalSearch 算法计

算用时均较短;

- 从算法精确度的方差来看,VolComputeWithLocalSearch 算法除了在实例 Sample3 和 Sample7 的精确度的方差较大以外,其他实例不论在精确度还是在时间上都全面优于 DirectMonteCarloMethod 算法.

综上所述,VolComputeWithLocalSearch 算法在收敛速度上变化不大,算法在迭代次数上是稳定的,因此,VolComputeWithLocalSearch 算法是稳定的.

综合以上数据分析,VolComputeWithLocalSearch 算法在小规模问题上精确度和计算能力上是有保证的;在大规模问题上,由于目前还没有精确算法能够与之相比较,故在精确度等方面有待考证.通过实验,我们的算法计算耗时与维数成不严格的正比例关系,与实例的子句数和变量个数关系不大.由此可见,#SMT 的求解效率的瓶颈并不是 SAT 求解器,而是在于体积计算过程.

4 结论和展望

本文设计了一种求解 SMT 计数问题的近似求解器,在现有的#SMT 精确求解算法的基础上加入差分进化算法,提出了一种新的局部搜索算法 VolComputeWithLocalSearch,通过调用体积计算工具 qhull,进而给出#SMT 问题的近似解.我们从理论上证明了 VolComputeWithLocalSearch 算法可以得到精确解的下界.实验结果表明:VolComputeWithLocalSearch 算法是稳定的,具有快速的求解能力,并在高维问题上具有很好的表现.

对于基于线性公式的背景理论的#SMT 问题且只要求下界的问题应用中,本文的研究可以提供很大的帮助,但 VolComputeWithLocalSearch 算法仅可以求解基于线性公式的背景理论的#SMT 实例,对于其他背景理论如非线性公式、位向量、指针等理论的求解则还有待突破.

References:

[1] Cook SA. The complexity of theorem-proving procedures. In: Proc. of the 3rd Annual ACM Symp. on Theory of Computing. ACM Press, 1971. 151−158. [doi: 10.1145/800157.805047]

[2] Li J, Liu WF. A survey on theoretical combination techniques of SMT solvers. Computer Engineering & Science, 2011,33(10): 111−119 (in Chinese with English abstract).

[3] Bozzano M, Bruttomesso R, Cimatti A, Junttila T, Ranise S, van Rossum P, Sebastiani R. Efficient satisfiability modulo theories via delayed theory combination. In: Proc. of the Computer Aided Verification. Berlin Heidelberg: Springer-Valag, 2005. 335−349. [doi: 10. 1007/11513988_34]

[4] Nieuwenhuis R, Oliveras A, Tinelli C. Solving SAT and SAT modulo theories: From an abstract davis-putnam-logemann-loveland procedure to DPLL(*T*). Journal of the ACM, 2006,53(6):937−977. [doi: 10.1145/1217856.1217859]

[5] Jha S, Limaye R, Seshia SA. Beaver: Engineering an efficient smt solver for bit-vector arithmetic. In: Proc. of the Computer Aided Verification. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 668−674. [doi: 10.1007/978-3-642-02658-4_53]

[6] Zhou J, Su WH, Wang JY. New worst-case upper bound for counting exact satisfiability. Int'l Journal of Foundations of Computer Science, 2014, 25(6):667−678.

[7] Huang P, Yin MH, Xu K. Exact phase transitions and approximate algorithm of #CSP. In: Proc. of the AAAI. 2011.

[8] Ma FF, Liu S, Zhang J. Volume computation for boolean combination of linear arithmetic constraints. In: Proc. of the Automated Deduction. Springer-Verlag, 2009. 453−468. [doi: 10.1007/978-3-642-02959-2_33]

[9] Gomes CP, Hoffmann J, Sabharwal A, Selman B. From sampling to model counting. In: Proc. of the 20th Int'l Joint Conf. on ArtificialIntelligence (IJCAI 2007). 2007. 2293−2299.

[10] Dyer ME, Frieze AM. On the complexity of computing the volume of a polyhedron. SIAM Journal on Computing, 1988,17(5): 967−974. [doi: 10.1137/0217060]

[11] Davis M, Putnam H. A computing procedure for quantification theory. Journal of the ACM, 1960,7(3):201−215. [doi: 10.1145/321033.321034]

[12] Davis M, Logemann G, Loveland D. A machine program for theorem-proving. Communications of the ACM, 1962,5(7):394−397. [doi: 10.1145/368273.368557]

[13] Storn R, Price K. Differential evolution—A simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. Journal of Global Optimization, 1997,11(4):341−359. [doi: 10.1023/A:1008202821328]

[14] Storn R. On the usage of differential evolution for function optimization. In: Proc. of the '96 Biennial Conf. of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS). IEEE, 1996. 519−523. [doi: 10.1109/NAFIPS.1996.534789]

[15] Storn R, Price K. Minimizing the real functions of the ICEC'96 contest by differential evolution. In: Proc. of the Int'l Conf. on Evolutionary Computation. 1996. 842−844. [doi: 10.1109/ICEC.1996.542711]

[16] Li XT, Yin MH. Application of differential evolution algorithm on self-potential data. PloS one, 2012,7(12):e51199. [doi: 10.1371/journal.pone.0051199]

[17] Li XT, Yin MH. An opposition-based differential evolution algorithm for permutation flow shop scheduling based on diversity measure. Advances in Engineering Software, 2013,55:10−31. [doi: 10.1016/j.advengsoft.2012.09.003]

[18] Zhou JP, Yin MH, Zhou CG. New worst-case upper bound for #2-SAT and #3-SAT with the number of clauses as the parameter. In: Proc. of the 24th AAAI Conf. on Artificial Intelligence (AAAI 2010). 2010. 217−222.

[19] Gao J, Wang JN, Yin MH. Experimental analyses on phase transitions in compiling satisfiability problems. Science China Information Sciences, 2015,58(3):1−11. [doi: 10.1007/s11432-014-5154-0]

[20] Huang P, Yin MH. An upper (lower) bound for max (min) CSP. Science China Information Sciences, 2014,57(7):1−9. [doi: 10.1007/s11432-013-5052-x]

[21] Zhou JP, Yin MH, Gu WX, Sun JG. Research on decreasing observation variables for strong planning under partial observation. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2009,20(2): 290−304 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3152.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03152]

[22] Yin MH, Sun JG, Lin H, Wu X. Possibilistic extension rules for reasoning and knowledge compilation. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2010,21(11):2826−2837 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3690.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03690]

[23] Yin MH, Zhou JP, Sun JG, Gu WX. Heuristic survey propagation algorithm for solving QBF problem. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2011,22(7):1538−1550 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3859.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03859]

[24] Yin MH, Lin H, Sun JG. Solving #SAT using extension rules. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2009,20(7):1714−1725 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/3320.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03320]

[25] Xu L. Improved SMT-Based Bounded Model Checking for Real-Time Systems. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2010, 21(7):1491−1502. http://www.jos.org.cn/1000-9825/585.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.00585]

[26] Liu S, Zhang J, Zhu B. Volume computation using a direct Monte Carlo method. In: Proc. of the Computing and Combinatorics. Springer-Verlag, 2007. 198−209. [doi: 10.1007/978-3-540-73545-8_21]

附中文参考文献:

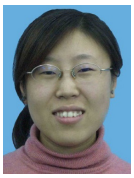
[2] 李婧,刘万伟.SMT 求解器理论组合技术研究.计算机工程与科学,2011,33(10):111−119.

[21] 周俊萍,殷明浩,谷文祥,孙吉贵.部分可观察强规划中约减观察变量的研究.软件学报,2009,20(2):290−304. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3152.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03152]

[22] 殷明浩,孙吉贵,林海,吴瑕.可能性扩展规则的推理和知识编译.软件学报,2010,21(11):2826−2837. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3690.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2010.03690]

[23] 殷明浩,周俊萍,孙吉贵,谷文祥.求解 QBF 问题的启发式调查传播算法.软件学报,2011,22(7):1538−1550. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3859.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03859]

[24] 殷明浩,林海,孙吉贵.一种基于扩展规则的#SAT 求解系统.软件学报,2009,20(7):1714−1725. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3320.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03320]



周俊萍(1981−),女,吉林蛟河人,博士,讲师,CCF 会员,主要研究领域为智能规划,自动推理.

曾志勇(1989−),男,硕士生,主要研究领域为并行计算,大数据处理.

李睿智(1989−),女,博士生,主要研究领域为算法设计与分析.

殷明浩(1979−),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为自动推理,智能规划.