

一种基于信息分离的高维多目标进化算法^{*}

郑金华¹, 申瑞珉², 李密青³, 邹娟¹

¹(湘潭大学 信息工程学院, 湖南 湘潭 411105)

²(湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

³(Department of Information Systems and Computing, Brunel University, Uxbridge, UK)

通讯作者: 申瑞珉, E-mail: srm_lj@126.com

摘要: 高维多目标优化是指对目标维数大于三维的多目标问题(multi-objective optimization problem, 简称 MOP) 进行优化. 大多数传统的多目标进化算法采用 Pareto 支配关系指导搜索, 很难在高维多目标优化问题上得到较为理想的结果. 为此, 提出了一种基于信息分离的高维多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithm based on information separation, 简称 ISEA). 该算法在目标空间中将原坐标系进行旋转, 使第 1 条坐标轴与向量 $(1, 1, \dots, 1)^T$ 平行. ISEA 定义转换坐标的第 1 个坐标值为收敛信息(convergence information, 简称 CI), 剩余的坐标代表个体分布信息(diversity information, 简称 DI). 同时, 采用一种基于分层选择的邻域惩罚机制, 利用一种由两个超圆锥组成的邻域形状保持种群的分布性, 当个体被选入归档集后, 其邻域内的个体将被惩罚进入下一层选择, 防止邻近的个体同时被选入归档集. 邻域形状的第 1 部分利用分布信息覆盖邻近的个体, 第 2 部分覆盖边界上的差个体. 与 NNIA, ϵ -MOEA, MSOPS, AR+DMO 以及 IBEA 这 5 种经典算法进行了比较. 实验结果表明, ISEA 在处理高维多目标优化问题时具有良好的收敛性和分布性.

关键词: 多目标优化; 进化算法; 高维多目标优化; 信息分离

中图法分类号: TP18

中文引用格式: 郑金华, 申瑞珉, 李密青, 邹娟. 一种基于信息分离的高维多目标进化算法. 软件学报, 2015, 26(5): 1013–1036. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4676.htm>

英文引用格式: Zheng JH, Shen RM, Li MQ, Zou J. Evolutionary algorithm based on information separation for many-objective optimization. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2015, 26(5): 1013–1036 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4676.htm>

Evolutionary Algorithm Based on Information Separation for Many-Objective Optimization

ZHENG Jin-Hua¹, SHEN Rui-Min², LI Mi-Qing³, ZOU Juan¹

¹(Institute of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

²(School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

³(Department of Information Systems and Computing, Brunel University, Uxbridge, UK)

Abstract: Many-Objective optimization refers to optimizing the multi-objective optimization problems (MOPs) where the number of objectives is more than three. Most classical multi-objective evolutionary algorithms (MOEAs) use the Pareto dominance relation to guide the search and thus are hard to perform well in many-objective optimization problems. In this paper, a multi-objective evolutionary algorithm based on information separation (ISEA) is proposed. ISEA rotates the original coordinate system in the objective space, and makes the first axis parallel to the vector $(1, 1, \dots, 1)^T$. The first member of the new coordinate is defined as convergence information, and

* 基金项目: 国家自然科学基金(61379062, 61372049, 61403326); 湖南省教育厅项目(12A135, 12C0378); 湖南省自然科学基金(14JJ2072, 13JJ8006); 湖南省研究生科研创新项目(CX2013A011); 湖南省科技支撑计划(2014GK3027); 湖南省科技厅项目(2013SK3136)

收稿时间: 2013-09-06; 修改时间: 2014-01-10; 定稿时间: 2014-07-01

the remaining members are defined as diversity information. Moreover, a neighborhood penalty mechanism based on layered selection is adopted using the information of the neighborhood shape made of two hyper-cones to maintain the diversity of individuals. The first hyper-cone is used to cover neighbors, and the second one to cover extreme individual whose convergence performs significantly worse than others. Additionally, after an individual is selected into the archive set, its neighbors are punished into an inferior layer. From comparative experiments with other representative MOEAs, including NNIA, ϵ -MOEA, MSOPS, AR+DMO, and IBEA, the proposed algorithm is found to be successful in finding well-converged and well-distributed solution set.

Key words: multi-objective optimization; evolutionary algorithm; many-objective optimization; information separation

现实世界的很多问题通常由多个目标组成,相对于单目标优化问题(single objective optimization problem, 简称 SOP)而言,解决多目标优化问题(multi-objective optimization problem, 简称 MOP)相对困难.单目标优化问题通常只有一个最优解,而多目标优化问题的目标之间往往相互冲突,因此,只能在相互冲突的目标间做出折中,得到一组非支配解集^[1-3].多目标进化算法(MOEA)已被证明是一种解决多目标优化问题的有效方法^[2,4],已成功地应用于许多工业领域^[1,2,5].它可将多目标优化问题的解抽象成种群中的个体,并对这些个体同时进行进化.这样,单次运行算法就能得到一组非支配解集.

大多数多目标进化算法通过 Pareto 支配关系作为区分个体好坏的主要方法,根据个体之间的支配关系定义出一个排序^[1,4],用来衡量个体的收敛性.同时,把分布信息作为评价个体适应度的次要方法,在保证算法收敛性的前提下,尽量保证算法的分布性.这种做法被多数算法沿用^[6-9],而且,它能在 2~3 个目标的优化问题上取得很好的效果.然而,对于高维多目标优化问题^[10],也就是问题的目标数量增加到 4 个或 4 个以上时,Pareto 支配关系的优化效果随目标数的增加而变得越来越差.出现这种情况的主要的原因是:随着目标空间维数的增加,种群中非支配个体的比例迅速上升^[1,11],这样,基于 Pareto 支配关系的适应度将难以区分个体之间的好坏,从而极大地削弱了算法的搜索能力^[12,13].另外,由于 Pareto 关系在高维情况下效果变差,此时,分布性保持机制将成为算法选择个体的主导因素.然而,这种分布性主导的选择机制可能对算法的收敛性造成负面影响^[14-16].目前,大多数的分布性保持策略,如小生境(niche)、聚集距离(crowding distance)、聚类(clustering)等^[4,9],由于它们强调分布的广泛性,算法可能会偏好那些落在稀疏区域的极端个体,这些极端个体往往在某几个目标上要远逊于其他个体.因此,它们不仅不能增加种群向真实 Pareto 面逼近的选择压力,反而在某种程度上阻碍了进化搜索^[17],以至于在某些情况下,没有分布性保持机制的算法在高维情况下能够表现出更好的收敛性^[18,19].Purshouse 等人^[20]指出:当问题的目标个数增加到 4 个或 4 个以上时,基于 Pareto 支配关系的算法的优化效果将大为下降.Hughes^[21]通过实验表明:基于 Pareto 排序的多目标进化算法在具有较少目标(2 个或 3 个)时非常有效;然而在高维目标的优化问题中,其效果将弱于早期提出的非 Pareto 方法^[22,23].此外,最近一些研究结果表明:当优化问题的目标数量增加到 10 个或更多时,基于 Pareto 的多目标进化算法甚至比随机搜索算法表现得更差^[24-26].实际工程领域中存在许多高维多目标优化的应用范例,如雷达优化问题^[27]、水资源优化问题^[28]、地下水监控问题^[29]、航空管制问题^[30]、翼形设计问题^[31]、护士排班问题^[32]、变速箱设计问题和暴雨排水系统问题^[33]、车辆设计问题以及车辆碰撞安全性问题^[34]等等,这对高维多目标优化的研究提出了新的挑战.

为了解决高维优化带来的这些困难,研究者们对传统的基于 Pareto 支配关系的多目标进化算法进行了各种改进,提出了许多适用于高维多目标优化问题的算法,如 AR^[35],IBEA^[36],MSOPS^[21],SMS-EMOA^[37]等.AR (average ranking)通过比较解个体在每个目标上的优劣进行适应度赋值,该方法在高维问题上能得到很好的收敛效果^[24],但由于缺少分布性保持机制,AR 得到的解集一般为 Pareto 最优面的一个子集^[38,39].IBEA 是一种基于评价指标的算法,该算法在大多数问题上能得到很好的收敛性,但 IBEA 偏好边界个体,无法使解集均匀分布在 Pareto 最优面上^[40,41].MSOPS 能够在保持收敛性的情况下兼顾种群的均匀分布,但在某些多模问题上难以得到理想的收敛效果,如 DTLZ3^[42].Sato 等人提出了控制支配区域的方法^[43],该方法利用角度控制个体的支配区域,从而达到增强或减弱 Pareto 支配关系的目的是,增强在高维情况下的选择压力.但该算法对控制支配区域的参数较为敏感,选择一个合适的角度控制参数不是一件容易的事.SMS-EMOA 是一种基于 Hypervolume^[44,45]的多目标进化算法,其解集在收敛性和分布性上能得到很好的平衡.然而,该算法的时间耗费与目标维数呈指数级

增长,在一定程度上影响了其在高维问题上的应用。

以上介绍的算法利用不同的方法提高了算法在高维多目标优化问题上的性能,为解决高维多目标优化问题提供了新的选择和思路.本文提出一种基于信息分离的高维多目标进化算法(multi-objective evolutionary algorithm based on information separation,简称 ISEA).ISEA 首先在目标空间中坐标轴进行适当的旋转,使第 1 条坐标轴与向量 $(1,1,\dots,1)^T$ 平行,并定义转换坐标的第 1 个坐标值为收敛信息(convergence information,简称 CI),定义剩余的转换坐标为分布信息(diversity information,简称 DI),从而实现了个体信息的分离.同时,采用一种基于分层选择的邻域惩罚机制,当精英个体进入归档集后,邻域惩罚机制能够延迟其邻域内的其他个体进入归档集,从而防止邻近的个体同时被选入归档集,有效地维持了种群的良好分布.最后,为邻域惩罚机制设计了一种基于角度的邻域形状,它由两个超圆锥组成:第 1 个超圆锥利用分布信息构建而成,用于维护种群的分布性;第 2 个圆锥利用个体在目标空间中的原始坐标构建而成,能够有效防止边界上收敛性极差的个体被选入归档集。

1 基本概念

考虑到最小化与最大化问题可以相互转化,因此,本文以最小化多目标问题为研究对象.多目标优化问题的一般描述如下:

给定决策向量 $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 它满足下列约束:

$$g_t(\bar{x}) \geq 0, t = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

$$h_t(\bar{x}) = 0, t = 1, 2, \dots, l \quad (2)$$

设优化目标的个数为 m ,且这几个优化目标是相互冲突的,优化目标可表示为

$$\vec{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))^T \quad (3)$$

寻求 $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, 使 $\vec{f}(\bar{x}^*)$ 在满足上述两类约束的同时达到最小。

定义 1(个体的 Pareto 支配关系). 设 \bar{x}_a 和 \bar{x}_b 是进化种群中的任意两个不同的决策向量,称 \bar{x}_a 支配 \bar{x}_b , 则必须满足下列两个条件:

- 对所有的子目标, \bar{x}_a 不比 \bar{x}_b 差.即

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}, f_k(\bar{x}_a) \leq f_k(\bar{x}_b) \quad (4)$$

- 至少存在一个子目标,使 \bar{x}_a 比 \bar{x}_b 好.即

$$\exists l \in \{1, 2, \dots, m\}, f_l(\bar{x}_a) < f_l(\bar{x}_b) \quad (5)$$

其中, m 为子目标的数量,表示为 $\bar{x}_a \succ \bar{x}_b$, 其中,“ \succ ”表示支配关系。

定义 2(可行解). 给定决策向量 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, 若 \bar{x} 同时满足不等式约束(1)和等式约束(2),则称 \bar{x} 为可行解。

定义 3(可行解集). 所有可行解组成的集合称为可行解集,记为 Ω 即

$$\Omega = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_t(\bar{x}) \geq 0, h_t(\bar{x}) = 0, t = 1, 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, l\} \quad (6)$$

定义 4(Pareto 最优解). 给定一个多目标优化问题 $\min \vec{f}(\bar{x})$, 称 $\bar{x}^* \in \Omega$ 是最优解,当且仅当满足如下条件:

$$\nexists \bar{x} \in \Omega, \bar{x} \succ \bar{x}^* \quad (7)$$

定义 5(Pareto 最优解集). 给定一个多目标优化问题 $\min \vec{f}(\bar{x})$, 其 Pareto 最优解集 P^* 定义为

$$P^* = \{\bar{x}^* \mid \nexists \bar{x} \in \Omega, \bar{x} \succ \bar{x}^*\} \quad (8)$$

定义 6(Pareto 最优面). 给定一个多目标优化问题 $\min \vec{f}(\bar{x})$, 其 Pareto 最优面 PF^* 定义为

$$PF^* = \{\vec{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}^*), f_2(\bar{x}^*), \dots, f_m(\bar{x}^*))^T \mid \bar{x}^* \in P^*\} \quad (9)$$

2 信息分离与邻域惩罚机制

在高维多目标优化问题中,随着目标空间维数的增加,种群中非支配个体的比率迅速上升.这样,基于 Pareto 支配关系的适应度将难以区分个体之间的好坏.为了解决这个问题,ISEA 将个体的收敛信息与分布信息区分开,同时结合邻域惩罚机制,在提高算法收敛性的同时维持种群的良好分布。

2.1 信息分离

信息分离是 ISEA 的关键技术.收敛信息用于提高算法的收敛性;分布信息反映个体在空间中的位置.为了方便定义收敛信息与分布信息,我们首先定义收敛平面,然后分别给出收敛信息与分布信息的定义:

定义 7(收敛平面). 在目标空间中,给定一个第一象限的收敛方向向量 $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$, 满足 $c_1 > 0, c_2 > 0, \dots, c_m > 0$.收敛平面以 \vec{c} 为法向量,且经过原点.设 x_1, x_2, \dots, x_m 为自变量,则收敛平面的方程为

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i = 0 \tag{10}$$

定义 8(收敛信息(CI)). 个体的收敛信息是其目标向量 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ 在收敛方向向量 \vec{c} 上的投影:

$$CI = \sum_{i=1}^m c_i f_i \tag{11}$$

定义 9(分布信息(DI)). 个体的分布信息是一个 $m-1$ 维向量 $\vec{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{m-1})^T$, 是个体目标向量 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ 在收敛平面上的投影坐标.

收敛方向向量的取值将会影响信息分离的准确程度.对于最小化问题,它需要在第一象限内.然而,ISEA 面临的优化问题多种多样,其 Pareto 最优面也不尽相同,其形状往往不是与收敛平面平行的平面,因此,信息分离只能粗略估计个体的收敛程度.收敛方向不同的取值对于不同问题的准确程度也是不一样的,然而邻域惩罚机制能够很好地克服信息分离的误差对算法性能的影响,即使在第一象限取不同的收敛方向,也不会对算法的收敛性构成太大的影响,因此,本文将收敛方向简单设置为 $(1, 1, \dots, 1)^T$.

为阐述信息分离,我们举一个二目标的例子.如图 1(a)所示,将原坐标系 \vec{a}_1 和 \vec{a}_2 逆时针旋转 45° ,使第 1 个坐标轴与向量 $(1, 1)^T$ 平行,得到转换坐标轴 \vec{u}_1 和 \vec{u}_2 .设个体在原坐标系中的坐标为 $(f_1, f_2)^T$,在转换后的坐标系中的坐标为 $(f'_1, f'_2)^T$,则 f'_1 为收敛信息; f'_2 为分布信息.一般地,为了在任意维目标空间中分离个体信息,可以使第 1 条坐标轴与收敛方向向量 $(1, 1, \dots, 1)^T$ 平行,并计算个体目标向量 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ 在新坐标系中的转换坐标 $\vec{f}' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_m)^T$.转换坐标的第 1 个坐标值 f'_1 为收敛信息,其余的坐标值 $(f'_2, f'_3, \dots, f'_m)^T$ 为分布信息.

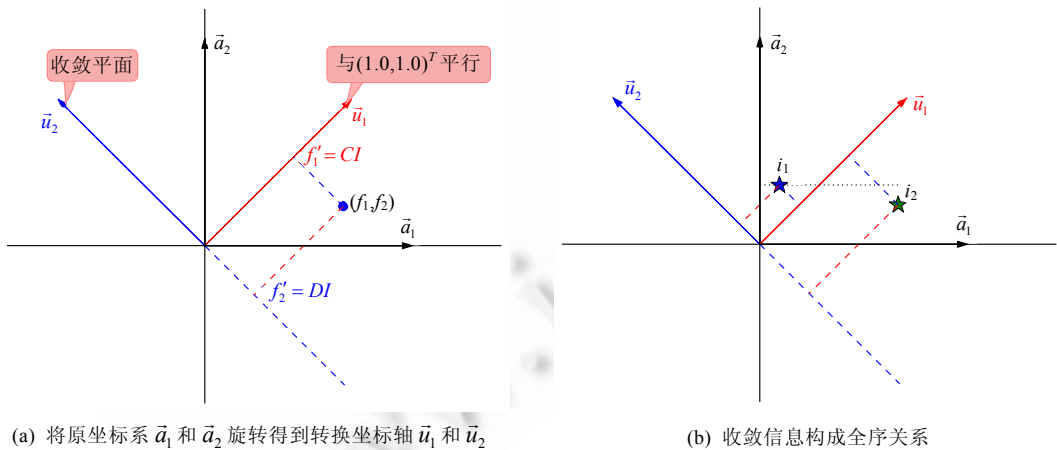


Fig.1 Rotate the coordinate axes to perform information separation

图 1 旋转坐标系使信息分离

收敛信息比 Pareto 支配关系能够更有效地提高算法在高维多目标优化问题上的收敛性.Pareto 支配关系之所以在高维问题上难以收敛的一个主要原因在于,它是一种偏序关系,随着目标数的增长,种群中将出现越来越多相互不支配的个体,此时,选择机制将无法区分个体间的好坏;而收敛信息构成全序关系,无论目标数如何增长,收敛信息都能比较准确地反映个体的收敛情况,能够更加有效地在高维多目标优化问题上提高选择压力.如图 1(b)所示,对于两个互不支配的个体 i_1 和 i_2 ,在第 1 个目标上, i_1 远胜于 i_2 ;而对于第 2 个目标, i_1 略逊于 i_2 .在这

种情况下,Pareto 支配关系已经无法区分个体间的好坏,但收敛信息却依然有效.可以看出, i_1 的收敛信息好于 i_2 ,即使目标数增长,这种全序关系依然能够有效保持选择压力.

邻域惩罚机制是 ISEA 保持种群分布性的重要组成部分,它需要搭配一个合理的邻域形状来防止邻近的个体同时被选入归档集.本文设计的邻域形状由两个圆锥构成,负责保持分布性的圆锥由分布信息构建.虽然也有其他方法构造邻域形状,但分布信息更适合用来构建它.

- 首先,分布信息与目标空间构成线性映射,构成的邻域形状在目标空间任意位置的大小都是一致的.若采用球面坐标等其他非线性方法构造,会导致目标空间中不同位置的邻域形状不一致,从而导致种群向某些区域聚集.
- 其次,分布信息不会偏好凸问题或凹问题,是一种更好的折中.
- 最后,分布信息是将个体中的收敛信息剔除得到的,能够更准确地反映个体在空间中的分布情况.

下面给出信息分离的计算方法.

设目标空间的维度为 m ,定义矩阵 $U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m), \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ 两两正交,代表旋转后的坐标系 m 条坐标轴在原坐标系中的向量.在目标空间中,设经过平移后的个体坐标 $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$,在旋转坐标系 U 中的坐标为 $\vec{f}' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_m)^T$,显然有 $\vec{f}' = U^{-1} \cdot \vec{f}$.又由于 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ 两两正交,因此, $\vec{f}' = U^{-1} \cdot \vec{f} = U^T \cdot \vec{f}$.

因此,为了对种群进行信息分离,可以先根据算法 1 计算旋转坐标系矩阵 U ;在算法运行的每一步,利用算法 2 计算每个个体的收敛信息与分布信息.

算法 1. 坐标系旋转.

输入:收敛方向向量 $\vec{c} = (1, 1, \dots, 1)^T$.

输出:旋转坐标系矩阵 $U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$.

设置坐标系矩阵的第 1 条坐标轴 \bar{a}_1 为 \vec{c} , 即, $A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 1 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$.

填充 $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m$, 并保证 $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m$ 线性无关.一般可以令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

将坐标系矩阵正交化: $\begin{cases} \bar{o}_1 = \bar{a}_1 \\ \bar{o}_2 = \bar{a}_2 - \frac{[\bar{o}_1, \bar{a}_2]}{[\bar{o}_1, \bar{o}_1]} \bar{o}_1 \\ \vdots \\ \bar{o}_m = \bar{a}_m - \frac{[\bar{o}_1, \bar{a}_m]}{[\bar{o}_1, \bar{o}_1]} \bar{o}_1 - \frac{[\bar{o}_2, \bar{a}_m]}{[\bar{o}_2, \bar{o}_2]} \bar{o}_2 - \dots - \frac{[\bar{o}_{m-1}, \bar{a}_m]}{[\bar{o}_{m-1}, \bar{o}_{m-1}]} \bar{o}_{m-1} \end{cases}$,

然后单位化: $U = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) = \left(\frac{1}{\|\bar{o}_1\|} \bar{o}_1, \frac{1}{\|\bar{o}_2\|} \bar{o}_2, \dots, \frac{1}{\|\bar{o}_m\|} \bar{o}_m \right)$.

算法 2. 信息分离.

输入:种群 $P = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, 旋转坐标系矩阵 U .

输出:种群 P 的收敛信息 $\{CI_1, CI_2, \dots, CI_n\}$ 以及分布信息 $\{\overline{DI}_1, \overline{DI}_2, \dots, \overline{DI}_n\}$.

在目标空间中种群 P 平移至第一象限,得到平移种群 $P' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$.

For each $\vec{f}_i \in P'$

求转换坐标: $\vec{f}'_i = U^T \cdot \vec{f}_i = (f'_i, f'_2, \dots, f'_m)^T$.

第 i 个个体的收敛信息 $CI_i = f'_i$, 分布信息 $\overline{DI}_i = (f'_2, f'_3, \dots, f'_m)^T$.

End for

2.2 适应度赋值

适应度赋值是多目标进化算法的重要组成部分,不同算法采取的适应度赋值方法不尽相同.比如,NSGA-II^[6]将父代与子代的混合种群进行分层非支配排序,层数低的个体将获得更高的收敛适应度;当个体数大于归档集规模时,对临界层个体计算聚集距离,作为个体的分布适应度.在本文中,ISEA 的个体适应度也分为收敛适应度与分布适应度.收敛适应度采用收敛信息表示,对于最小化问题,ISEA 将优先选择收敛适应度值小的个体;而分布适应度实质上与分布信息密切相关,分布信息与精英个体越接近的个体被淘汰的可能性越大.

2.3 邻域惩罚机制

利用收敛信息可以提高算法在高维多目标优化问题上的收敛效果.但如果非支配集与超平面 $f_1+f_2+\dots+f_m=0$ 不平行,种群将会往一些区域聚集.如图 2 所示,若非支配集是凸面,处于中间的个体 i_1 会更占优势,将导致种群全部聚集到中间的某个点上;如果非支配集是凹面,处于边缘的个体 i_1 会更占优势,将会导致种群往边缘聚集.因此,本文采用邻域惩罚机制维持种群在高维空间下的分布性,能够防止最优个体附近的其他个体过早地进入归档集,从而保证种群的分布性.

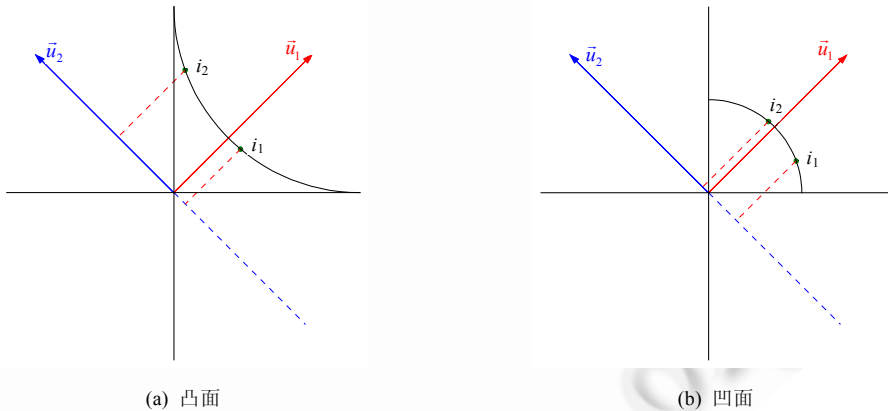


Fig.2 With the convergence information used, the influence on diversity of the shape of the Pareto front

图 2 采用收敛信息以后,Pareto 面形状对分布性造成的影响

邻域惩罚机制的基本思想是:当选择了一个精英个体之后,延迟其周围的个体进入归档集.下面是邻域惩罚机制的总体框架.

算法 3. 邻域惩罚机制.

输入:种群 $P=\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$.

输出:归档集 $A=\{i_1, i_2, \dots, i_x\}, x \leq n$.

可选集 $Q=\emptyset$, 归档集 $A=\emptyset$.

While $|A|<x$

 If $Q==\emptyset: Q=P$

$i_{elite} = LocateElite(Q), P = P - \{i_{elite}\}, Q = Q - \{i_{elite}\}, A = A \cup \{i_{elite}\}$

 For each $i \in Q$, If $i \in Neighbor(i_{elite}): Q = Q - \{i\}$

End while

在算法 3 中,LocateElite(Q)从可选集 Q 中挑选精英个体.Neighbor(i_{elite})返回精英个体 i_{elite} 的邻域,邻域的形状由算法设计者来设定.

图 3 描述了邻域惩罚法的过程.图 3(a)为选取第 1 个点的情形,LocateElite(Q)选取了一个收敛信息最小的精英个体 i₁,并将包含在 i₁ 邻域内的个体从 Q 中去除.因此,从图 3(b)可以看出:下一次选择时,避免了 i₁ 附近的个体被选入.图 3(c)反映了一轮选择结束时的情况,可以看出,即使个体不是分布在平面上,邻域惩罚法也能防止种群往一个或多个点聚集.若第 1 轮选择结束,即 Q=∅时,选入归档集 A 的个体数量仍小于 x,则将 P 复制到 Q,进行下一轮选择.图 3(d)反映了第 2 轮选择时的情况:i₁ 左边的个体 j₁ 被选中,降低了归档集 A 的分布均匀性.因此,邻域形状的选择非常关键:覆盖的空间过大,会导致算法进行多轮选择,从而降低种群的分布均匀性;覆盖的空间过小,会导致 P 中某些区域的个体选不上,将会降低种群的分布广泛性.一般来说,最理想的邻域形状能够使算法只需一轮即可完成选择,即,第 1 轮选择完成之后,可选集 Q 刚好为空.

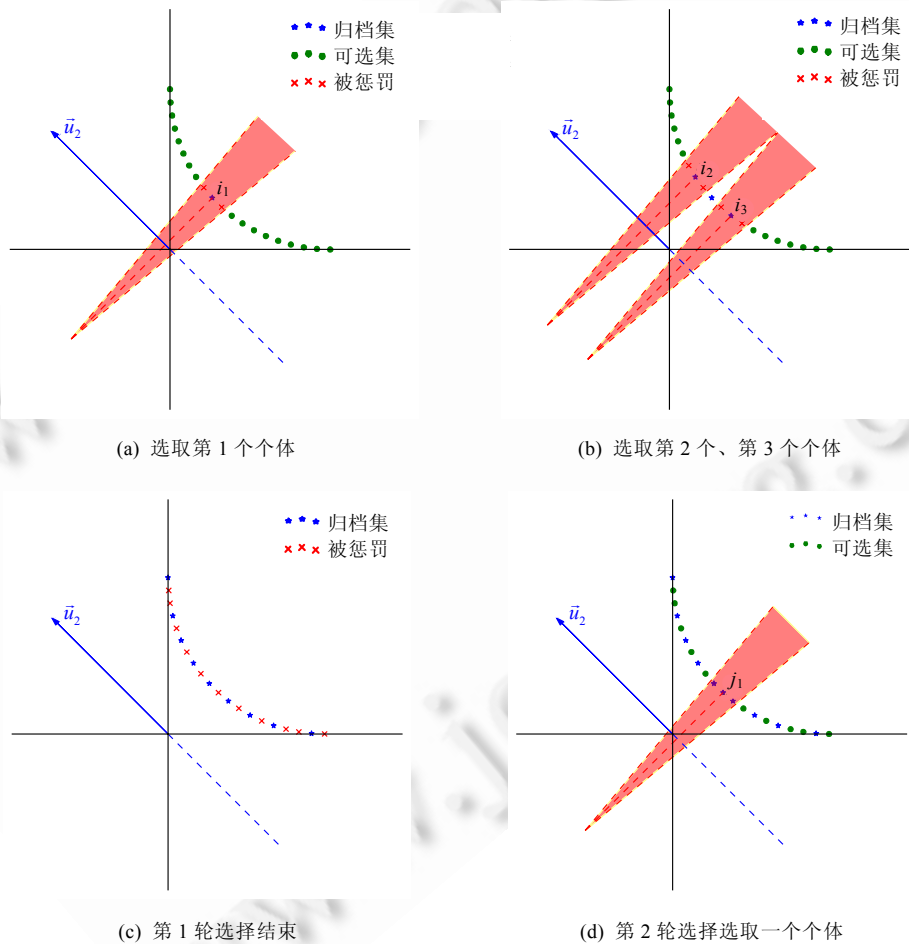


Fig.3 Individual selection process of the neighbor punishment mechanism

图 3 邻域惩罚机制选择个体的过程

采用邻域惩罚机制能够消除 Pareto 面的形状对收敛信息造成的影响,防止种群往一个或多个点聚集.但它还存在另外一个问题:如果邻域形状设计不当,邻域惩罚机制可能会将边界上收敛性极差的极端个体(extreme individual)选入到归档集中.出现该现象的原因在于:当一轮选择快要完成的时候,Q 中剩下的个体数量非常少,而且收敛性可能非常差.邻域惩罚机制可能将这些点选入归档集,使算法的收敛性受到影响.如图 4 所示,精英个

体 i_{elite} 的邻域形状没有把差个体 i_1 覆盖到,这样, i_1 将会被选入归档集 A .因此,邻域的设置不仅需要考虑当前精英个体的邻近个体,而且还要考虑边界上的极端个体.

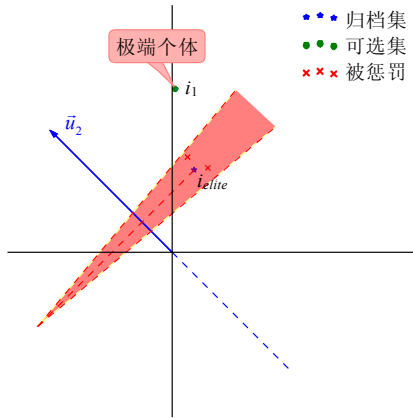


Fig.4 Neighborhood of the elite i_{elite} cannot cover the poorly converged extreme individual i_1

图 4 精英个体 i_{elite} 的邻域不能覆盖收敛性差的极端个体 i_1

为了防止极端个体被选入到归档集中,本文设计了基于角度的邻域形状,如图 5 所示,它由 $Cone_1$ 和 $Cone_2$ 两个超圆锥组成. $Cone_1$ 建立在旋转后的新坐标系中,利用分布信息排斥精英个体附近的个体,保证算法的分布性; $Cone_2$ 建立在原坐标系中,防止极端个体被选入归档集.

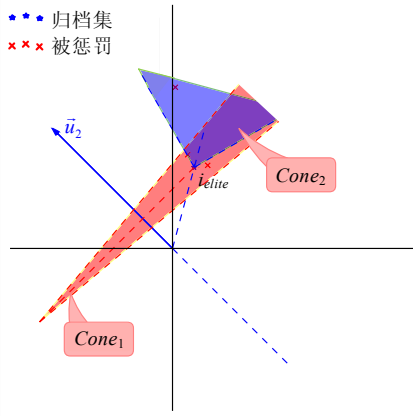


Fig.5 Neighborhood shape of ISEA

图 5 ISEA 的邻域形状

设 θ 为角度参数, i_{elite} 和 i 分别为精英个体和普通个体, $CI_{i_{elite}}$ 为精英个体的收敛信息值, $\overline{DI}_{i_{elite}}$ 和 \overline{DI}_i 分别表示精英个体和普通个体的分布信息, $\vec{f}_{i_{elite}}$ 和 \vec{f}_i 分别为精英个体和普通个体的目标向量.邻域形状描述如下:

$$Neighbor(i_{elite}) = Cone_1(i_{elite}) \cup Cone_2(i_{elite}) \tag{12}$$

$$Cone_1(i_{elite}) = \left\{ i \mid \arctan \frac{\|\overline{DI}_{i_{elite}} - \overline{DI}_i\|}{3 \times CI_{i_{elite}}} \leq \theta \right\} \tag{13}$$

$$Cone_2(i_{elite}) = \left\{ j \mid \arccos \frac{\vec{f}_{i_{elite}} \cdot (\vec{f}_j - \vec{f}_{i_{elite}})}{\|\vec{f}_{i_{elite}}\| \|\vec{f}_j - \vec{f}_{i_{elite}}\|} \leq 45^\circ \right\} \quad (14)$$

根据邻域惩罚机制框架以及基于角度的邻域形状,可以实现 ISEA 的临界层选择算法,流程如下:

算法 4. 临界层选择算法.

描述: $A=CriticalSelection(P, \theta, x)$.

输入:非支配集 $P=\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, 邻域形状角度控制参数 θ , 输出种群大小 $x, x \leq n$.

输出:归档集 $A=\{i_1, i_2, \dots, i_x\}$.

可选集 $Q=\emptyset$, 归档集 $A=\emptyset$.

While $|A| < x$

 If $Q = \emptyset: Q = P$

$i_{elite} = CI_{\min}(Q), P = P - \{i_{elite}\}, Q = Q - \{i_{elite}\}, A = A \cup \{i_{elite}\}$

 For each $i \in Q$

 If $i \in \left\{ j \mid \arctan \frac{\|\overline{DI}_{i_{elite}} - \overline{DI}_j\|}{3 \times CI_{i_{elite}}} \leq \theta \text{ or } \arccos \frac{\vec{f}_{i_{elite}} \cdot (\vec{f}_j - \vec{f}_{i_{elite}})}{\|\vec{f}_{i_{elite}}\| \|\vec{f}_j - \vec{f}_{i_{elite}}\|} \leq 45^\circ \right\}$:

$i \in Q, Q = Q - \{i\}$

 End if

 End for

End while

在算法 4 中, $CI_{\min}(Q)$ 表示从可选集 Q 中选取一个收敛信息值最小的个体.

3 算法流程与时间复杂度

3.1 算法框架

ISEA 先随机初始化种群.在运行的每一代,首先通过匹配选择、交叉和变异产生子代种群;然后对所有个体进行信息分离,计算每个个体的收敛信息与分布信息;最后,将父代和子代种群混合,并对混合种群进行环境选择得到父代种群.流程如下:

算法 5. 算法框架.

输入:种群规模 n , 目标数 m , 运行代数 g_{\max} .

随机初始化种群 $P=\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$

$U=RotateAxes(m)$

$FitnessAssignment(P, U)$

For $g=1$ To g_{\max}

$Q=MatingSelection(P)$

$Q=Variation(Q)$

$FitnessAssignment(Q, U)$

$M=P \cup Q$

$P=EnvironmentSelection(M, |P|)$

End for

在算法 5 中, $MatingSelection$ 为二元锦标赛选择; $Variation$ 包含交叉及变异; $RotateAxes$ 用于计算旋转坐标系矩阵, 为算法 1; $FitnessAssignment$ 计算个体的目标向量, 并调用算法 2 进行信息分离.环境选择流程如下:

算法 6. 环境选择.

描述: $Q=EnvironmentSelection(P, x)$.

输入:种群 $P=\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, 输出种群大小 $x, x \leq n$.

输出:种群 $Q=\{i_1, i_2, \dots, i_x\}$.

$\mathcal{F}=\text{NondominateSort}(P)=\{F_1, F_2, \dots, F_r\}$

$Q=\emptyset$

For each $F_i \in \mathcal{F}$

 If $|Q| + |F_i| \leq x$:

$Q = Q \cup F_i$

 Else

$Q = Q \cup \text{CriticalSelection}(F_i, \theta, x - |Q|)$

 End If

End for

在算法 6 中, *NondominateSort* 用擂台赛法^[46]对种群进行非支配排序, *CriticalSelection* 为算法 4.

3.2 时间复杂度

ISEA 的时间耗费主要分为 3 个部分:匹配选择、信息分离与环境选择.设种群规模为 n , 目标空间维数为 m , 下面我们将分别对这 3 个部分进行分析.

匹配选择采用了二元锦标赛选择,在 n 个父代个体中,选择 n 个个体需要两次随机洗牌,时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$; 每选出一个个体需要比较两个父代个体,依次比较支配关系和收敛信息,时间复杂度为 $\mathcal{O}(m)$.因此,选择 n 个个体的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \times n)$.

信息分离主要取决于坐标系转换.坐标系转换进行了 n 次矩阵乘法,相乘的两个矩阵的规模分别为 $m \times m$ 和 $m \times 1$,因此,信息分离的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \times m^2)$.

环境选择的计算耗费主要取决于非支配排序以及邻域惩罚机制.非支配排序的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \times n^2)$ ^[46].对于邻域惩罚机制,选出一个精英个体的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$;另外,邻域惩罚机制需要判断临界层可选集 Q 中的每个个体是否落在最佳个体的邻域形状内,每次判断的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m)$,因此,邻域惩罚机制每选出一个个体进入归档集的计算量为 $\mathcal{O}(m \times n)$,执行 n 次的执行时间为 $\mathcal{O}(m \times n^2)$.因此,环境选择的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \times n^2)$.

从上面的分析可以得知,ISEA 执行一步的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \times m^2 + m \times n^2)$.

4 对比实验

为了检验 ISEA 的性能,本文与 NNIA^[47], ϵ -MOEA^[48], MSOPS^[21], AR+DMO^[39], IBEA^[36]这 5 种算法做了对比实验,并与 NSGA-II 对比了时间开销. ISEA 和 AR+DMO 均采用 C++ 实现. NSGA-II 和 ϵ -MOEA 的 C 代码可以在 www.iitk.ac.in/kangal/index.shtml 得到. NNIA 的源代码可以在 see.xidian.edu.cn/iip/mggong/Projects/NNIA.htm 下载.对于 IBEA,本文采用了 jMetal 3.1 中的实现,可以在 jmetal.sourceforge.net 获得源代码. MSOPS 采用了 MATLAB 实现的代码,可以在 code.evanhughes.org 获得源代码.所有实验均在浪潮 NF5240M3 服务器上进行,机器配置为 Intel Xeon E5-2407 CPU, 8G RAM. 操作系统为 CentOS 6.4 x86_64, C 编译器采用 GCC 4.4.7, C++ 编译器为 GCC 4.6.4, Java 采用 OpenJDK 1.7.0, 此外,采用开源的 Octave 3.6.3 运行 MATLAB 程序.

4.1 测试函数及评价指标

实验采用 DTLZ^[42]系列测试函数.设目标空间维数为 m , 决策空间维数为 n . 参照 Huband 的表述^[49], 将决策向量 \bar{x} 分成了位置向量 \bar{x}_p 和距离向量 \bar{x}_d , 结合距离函数、形状函数和转换函数计算目标向量 \vec{f} . 表 1 是对这些测试函数的简单描述.

Table 1 Test functions

表 1 测试函数

问题	定义	决策空间
DTLZ1	$f_i(\vec{x}) = \frac{1+d1(\vec{x}_d)}{2}s1(\vec{x}_p)$	$n=m-1+5$
DTLZ2	$f_i(\vec{x}) = (1+d2(\vec{x}_d))s2(\vec{x}_p)$	$n=m-1+10$
DTLZ3	$f_i(\vec{x}) = (1+d1(\vec{x}_d))s2(\vec{x}_p)$	
DTLZ4	$f_i(\vec{x}) = (1+d2(\vec{x}_d))s2(t1(\vec{x}_p, \alpha)),$ $\alpha = 100$	
DTLZ6	$d = d3(\vec{x}_d),$ $f_i(\vec{x}) = (1+d)s2(t2(\vec{x}_p, d, 1))$	$n=m-1+20$
DTLZ7	$d = 2 + 9 \times d4(\vec{x}_d),$ $h(\vec{x}, d) = m - \sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{x_i}{d} (1 + \sin(3\pi x_i)) \right],$ $f_i(\vec{x}) = \begin{cases} x_i, & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ d \times h(\vec{x}, d), & i = m \end{cases}$	
距离函数	$d1(\vec{x}_d) = 100 \left(\vec{x}_d + \sum_{x_i \in \vec{x}_d} [(x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5))] \right),$ $d2(\vec{x}_d) = \sum_{x_i \in \vec{x}_d} (x_i - 0.5)^2,$ $d3(\vec{x}_d) = \sum_{x_i \in \vec{x}_d} x_i^{0.1},$ $d4(\vec{x}_d) = \frac{1}{ \vec{x}_d } \sum_{x_i \in \vec{x}_d} x_i$	
形状函数	$s1(\vec{x}_p) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{m-1} x_j, & i = 1 \\ (1 - x_{m-i+1}) \prod_{j=1}^{m-1} x_j, & i = 2, 3, \dots, m \end{cases}$ $s2(\vec{x}_p) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_j\right), & i = 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} x_{m-i+1}\right) \prod_{j=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2} x_j\right), & i = 2, 3, \dots, m \end{cases}$	
转换函数	$t1(\vec{x}_p, \alpha) = x_i^\alpha,$ $t2(\vec{x}_p, d, k) = \begin{cases} x_i, & i = 1, 2, \dots, k \\ \frac{0.5 + x_i d}{1 + d}, & i = k + 1, k + 2, \dots, \vec{x}_p , k \geq 1 \end{cases}$	
决策向量	$\vec{x} \in [0, 1]^n,$ $\vec{x}_p = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})^T,$ $\vec{x}_d = (x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)^T$	

为了比较上述 5 种算法的性能,采用目前流行的几种评价方法对最终解集进行评价^[50],分别是 Generational Distance^[51],Inverted Generational Distance^[52],Diversity Metric^[53].下面对它们作简要介绍.

- Generational Distance(GD)评价收敛性,定义如下:

$$GD = \frac{\sqrt{\sum_{i \in P} d_i^2}}{n} \tag{15}$$

其中, n 是解集中个体的数目, $d_i = \min_{j \in PF^*} |\vec{i} - \vec{j}|$ 表示个体 \vec{i} 到 Pareto 最优面的欧几里德距离.GD 的值越小,表明解集越靠近 Pareto 最优边界,收敛性就越好.

- Inverted Generational Distance(IGD)为算法综合性能评价指标,它能够同时评价解集的收敛性、分布广

泛性和分布均匀性,定义如下:

$$IGD = \frac{\sum_{j \in PF^*} d'_j}{n} \quad (16)$$

IGD 为 GD 的逆向映射,即 $d'_j = \min_{\bar{i} \in P} |\bar{j} - \bar{i}|$ 表示 Pareto 最优面上的点 \bar{j} 到最终解集的最小欧几里德距离. IGD 值越小,就意味着算法的综合性能越好.

- Diversity Metric(DM)评价解集的分布均匀性,它的值位于开区间 0 到闭区间 1 之间,解集分布越均匀,DM 的值就越接近 1.

4.2 实验参数设置

对所有算法,都采用实数编码.交叉算子采用模拟二进制交叉, $\eta_c=20$,交叉率 $p_c=1$;变异算子采用多项式变异, $\eta_m=20$,变异率 $p_m = \frac{1}{n}$ (n 为决策空间的维数).每次实验独立重复进行 30 次.种群大小均为 100.目标空间维数分别为 3,4,5,6,8,10.运行代数设置见表 2.

Table 2 Terminate condition (in generation)

表 2 终止条件(以代数为单位)

问题	DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ4	DTLZ6	DTLZ7
运行代数	1 000	300	1 000	300	1 000	300

如图 6 所示,为了分析不同 θ 参数对 ISEA 性能的影响,我们在一定范围内将 θ 等分成 100 份,并统计 ISEA 在不同的 θ 参数下,GD,IGD,DM 以及邻域惩罚机制选择轮数(round)的变化规律,实验独立重复进行 30 次.限于篇幅,我们仅给出 DTLZ1,DTLZ2,DTLZ5 和 DTLZ7 在 3 目标和 6 目标下的结果.

从图 6 的结果不难看出:

- 1) ISEA 的收敛性能比较稳定,无论 θ 参数如何变化,ISEA 总能得到较好的 GD 指标;
- 2) θ 参数主要影响 ISEA 的分布性能,但 IGD 与 DM 指标的变化较为平稳,对 θ 参数并不是特别敏感,容易确定最佳的 θ 参数;
- 3) 当邻域惩罚机制选择轮数(round)从 1 变为 2 时,ISEA 往往能获得较好的性能;
- 4) 对于 Pareto 面较简单的测试函数,如 DTLZ1~DTLZ6,最佳 θ 参数基本随着目标数的增长呈线性上升的趋势.

因此,参数 θ 的设置可以按照以下原则进行:(1) 在设置参数时,应参考邻域惩罚机制选择轮数.假设测试独立重复进行 30 次,邻域惩罚机制选择轮数的均值应介于 1~2 之间;(2) 对于 Pareto 面较简单的测试函数,可以利用目标数与最佳 θ 参数间的线性关系估算参数;(3) 对于最优 Pareto 面相似的测试问题,如 DTLZ1~DTLZ4,ISEA 在这些问题上的各种指标的变化曲线比较接近,可以用相同的 θ 参数.同样,DTLZ5 和 DTLZ6 也可以用相同的 θ 参数.根据这些观测结果,我们挑选了一些 θ 参数,见表 3.

Table 3 Settings of θ parameter for ISEA, in degrees

表 3 ISEA 的 θ 参数设置,以度为单位

目标数	问题		
	DTLZ1-4	DTLZ6	DTLZ7
3	2.4	0.4	0.8
4	5.4	0.4	1
5	8.5	0.5	1.3
6	10.2	0.5	1.5
8	12.8	0.5	10.5
10	15.6	0.6	13.5

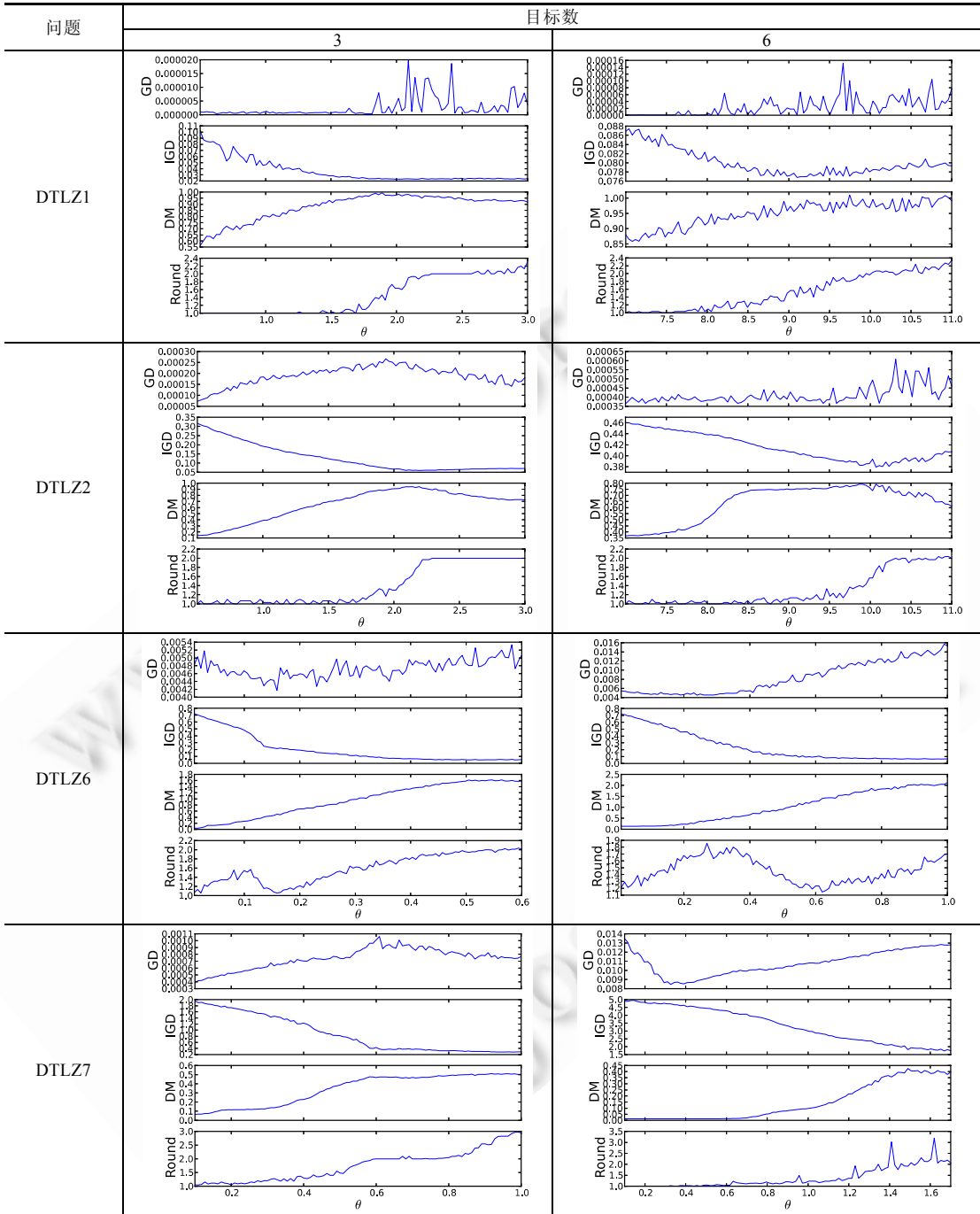


Fig.6 Splitting the parameter θ into 100 parts in certain ranges, and analyzing the different indicators' mean values of ISEA

图 6 在一定范围内将 θ 等分成 100 份,分析 ISEA 在不同指标下的均值

NNIA 的参数参照文献[47]设置,支配种群的最大大小 $n_D=100$,活跃种群的最大大小 $n_A=20$,克隆种群大小 $n_C=100$ 。 \mathcal{E} -MOEA 在不同目标维数下的参数设置见表 4。

Table 4 Settings of ε parameter for ε -MOEA**表 4** ε -MOEA 中参数 ε 设置

目标数	问题					
	DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ4	DTLZ6	DTLZ7
3	0.033	0.06	0.06	0.06	0.022 7	0.048
4	0.052	0.131 2	0.138 5	0.131 2	0.12	0.105
5	0.059	0.192 7	0.2	0.192 7	0.355 2	0.158
6	0.055 4	0.234	0.227	0.234	0.75	0.15
8	0.054 9	0.29	0.156 7	0.29	1.15	0.225
10	0.056 5	0.308	0.85	0.308	1.45	0.46

为了计算 IGD 指标,为每个测试函数生成了 10 000 个分布均匀的非支配解.此外,DM 需要设置参数,参数设置见表 5.

Table 5 Settings of grid division for Diversity Metric**表 5** Diversity Metric 的网格划分数设置

目标数	3	4	5	6	8	10
网格划分数	10	6	4	3	3	3

4.3 实验结果

为了比较上述几种算法在各项性能指标上的差别,本文计算这些算法在不同指标上的均值(mean)和标准差(standard deviation).但用一个容量有限的样本来推断总体,可能会造成抽样误差.因此,还需要对样本数据进行方差分析(ANOVA),对样本均值进行多重比较(multiple comparison),以此判断 ISEA 与其他算法在各项性能指标上的差别有无统计学意义.首先提出原假设 H_0 和备择假设 H_1 :

$$\begin{cases} H_0, \mu_{ISEA} = \mu_{Other} \\ H_1, \mu_{ISEA} \neq \mu_{Other} \end{cases} \quad (17)$$

根据中心极限定理,经过独立重复实验得到的最终解集服从正态分布,因此,本文不再检验样本是否服从正态分布,只对样本用 Levene^[54]方法进行方差齐性检验(homogeneity of variance test).若各算法的性能指标满足方差齐性要求,则采用准确度相对较高的 Tukey^[55]方法执行多重比较;否则,采用 Tamhane's T2^[56]方法,因为它不要求样本数据满足方差齐性要求.方差分析的显著性水平(significant level) α 设置为 0.05.方差分析完成后会得到一个 P 值(也称 Sig 值或 P -Value), P 值越大,就表明在原假设成立的条件得到数据结果的统计量的概率越大.一般情况下,当 P 值大于 α 时,就可以认为原假设成立.

下面将以表格的形式给出各算法性能指标样本的统计结果.表格左边的部分为样本的均值与标准差,并分别用深色和浅色标记在对应指标上表现最好和次好的两个算法.同时给出 Levene 方法计算得到的 P 值,若该值小于 α ,则说明各算法的性能指标不满足方差齐性要求.表格右边的部分给出 ISEA 与其他算法在对应性能指标上的方差分析结果.其中,第 1 项为平均差 $\mu_{ISEA} - \mu_{Other}$,即,ISEA 算法性能指标的均值与其他算法的均值之差;第 2 项为 P 值,该值小于 α 时,应拒绝原假设 H_0 ,即,认为 ISEA 在该项性能指标上的均值与对比算法的均值有显著区别,并将这些位置的字体加粗.值得注意的是:若各算法的性能指标满足方差齐性要求,则该 P 值为 Tukey 方法计算得到的结果;否则为 Tamhane's T2 方法得到的结果.

首先根据表 6 分析各算法在收敛性上的差别.NNIA 在低维情况下表现较好,但由于不是针对高维问题的算法,因此,在高维情况下收敛性有所下降.但 NNIA 的性能较为稳定,即使目标数增多也没有出现收敛性能大幅下降的情况.MSOPS,AR+DMO 和 ε -MOEA 的收敛效果差于 IBEA 和 ISEA.其中,MSOPS 在 DTLZ1,DTLZ3,DTLZ6 问题上的收敛性稍差;AR+DMO 在 DTLZ7 问题上的表现欠佳;而 ε -MOEA 在 DTLZ2 和 DTLZ4 上表现稍差.收敛性最好的算法是 IBEA 和 ISEA,且两者之间的差别并不显著.然而,ISEA 的分布性比 IBEA 好得多.从后文图 7 与图 8 可以看出,IBEA 的最终解集都集中到了几个点上.从表 7 和表 8 给出的统计数据可以看出,IBEA 不能在保持收敛性的同时较好地兼顾分布性;而 ISEA 不仅能够取得较好的分布性,同时也能保持较高的收敛性.

Table 6 Statistical results of the convergence indicator GD

表 6 收敛性指标 GD 的统计数据

问题	目标数	均值与标准差						Levene	平均差与 P 值				
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA		NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTLZ1	3	7.77E-07	8.53E-05	4.06E-06	6.03E-02	2.16E-02	9.73E-05	3.13E-05	-8.46E-05	-3.28E-06	-6.03E-02	-2.16E-02	-9.65E-05
		9.28E-07	2.17E-04	6.78E-06	4.71E-02	1.05E-01	8.67E-05		1.00E+00	1.00E+00	2.41E-05	4.81E-01	1.00E+00
	4	1.26E-05	2.69E-01	3.22E-03	9.02E-02	2.62E-02	1.91E-04	1.07E-29	-2.69E-01	-3.21E-03	-9.02E-02	-2.62E-02	-1.78E-04
		6.76E-05	6.73E-01	1.52E-02	6.37E-02	9.48E-02	1.57E-04		3.37E-03	1.00E+00	8.10E-01	9.99E-01	1.00E+00
	5	7.76E-05	1.02E+01	6.96E-03	7.59E-02	2.02E-02	2.95E-04	2.59E-30	-1.02E+01	-6.88E-03	-7.58E-02	-2.01E-02	-2.18E-04
		2.58E-04	1.06E+03	3.80E-02	6.53E-02	6.35E-02	1.47E-04		5.93E-13	1.00E+00	9.85E-01	1.00E+00	1.00E+00
	6	2.25E-05	1.62E+01	1.65E-06	8.83E-02	1.38E-02	3.68E-04	3.13E-05	-1.62E+01	2.09E-05	-8.83E-02	-1.38E-02	-3.46E-04
		8.89E-05	1.19E+00	2.08E-06	5.88E-02	2.50E-02	1.68E-04		5.93E-13	1.00E+00	9.81E-01	1.00E+00	1.00E+00
	8	6.91E-05	1.62E+01	2.81E-06	9.85E-02	8.90E-03	8.53E-04	1.07E-29	-1.62E+01	6.63E-05	-9.84E-02	-8.83E-03	-7.84E-04
		2.76E-04	4.54E-01	3.95E-06	8.49E-02	2.04E-02	1.59E-03		5.93E-13	1.00E+00	3.36E-01	1.00E+00	1.00E+00
10	3.65E-05	1.49E+01	2.78E-06	1.08E-01	1.45E-02	1.24E-02	2.59E-30	-1.49E+01	3.38E-05	-1.08E-01	-1.44E-02	-1.24E-02	
	1.80E-04	3.43E-01	3.28E-06	8.33E-02	4.05E-02	2.00E-02		5.93E-13	1.00E+00	5.13E-02	9.99E-01	9.99E-01	
DTLZ2	3	1.06E-04	1.09E-03	7.36E-06	8.13E-06	5.19E-04	7.27E-04	9.99E-24	-9.86E-04	9.90E-05	9.82E-05	-4.12E-04	-6.21E-04
		4.38E-05	2.09E-04	6.84E-06	9.20E-07	2.19E-04	5.33E-05		5.93E-13	3.31E-02	3.54E-02	5.93E-13	5.93E-13
	4	7.36E-05	1.17E-02	1.22E-05	2.05E-05	1.21E-03	2.08E-03	4.25E-31	-1.16E-02	6.14E-05	5.31E-05	-1.14E-03	-2.00E-03
		3.89E-05	5.67E-03	5.88E-06	3.33E-06	2.91E-04	1.80E-04		5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00	4.05E-01	1.28E-02
	5	8.30E-05	9.41E-02	2.55E-05	2.39E-04	4.37E-03	4.41E-03	9.74E-28	-9.40E-02	5.74E-05	-1.56E-04	-4.29E-03	-4.33E-02
		4.30E-05	1.49E-02	1.60E-05	9.29E-04	1.35E-03	8.42E-04		5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00	8.05E-02	7.49E-02
	6	1.07E-04	1.50E-01	2.71E-05	2.29E-04	9.05E-03	5.19E-03	9.99E-24	-1.49E-01	7.96E-05	-1.23E-04	-8.95E-03	-5.09E-03
		3.52E-05	9.06E-03	1.19E-05	2.05E-04	1.93E-03	2.90E-04		5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00	5.95E-13	7.91E-06
	8	1.24E-04	1.84E-01	1.62E-05	1.05E-03	2.07E-02	6.83E-03	4.25E-31	-1.84E-01	1.08E-04	-9.28E-04	-2.06E-02	-6.71E-03
		2.96E-05	4.68E-03	1.22E-05	6.46E-04	3.01E-03	6.58E-04		5.93E-13	1.00E+00	6.25E-01	5.93E-13	5.93E-13
10	1.91E-04	1.92E-01	1.45E-05	1.04E-03	3.11E-02	5.52E-04	9.74E-28	-1.92E-01	1.76E-04	-8.46E-04	-3.09E-02	-5.33E-03	
	5.16E-05	6.01E-03	1.10E-05	9.95E-04	3.16E-03	6.95E-04		5.93E-13	1.00E+00	8.53E-01	5.93E-13	1.28E-10	
DTLZ3	3	2.32E-04	8.05E-02	2.82E-04	9.69E-01	1.32E-02	1.33E-03	3.65E-10	-8.03E-02	-5.05E-05	-9.69E-01	-1.30E-02	-1.10E-03
		1.35E-04	4.33E-01	3.56E-04	5.58E-01	3.50E-02	3.84E-04		8.90E-01	1.00E+00	5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00
	4	3.89E-04	6.38E+00	1.52E-04	1.27E+00	2.10E-02	5.02E-03	4.12E-33	-6.38E+00	2.37E-04	-1.27E+00	-2.06E-02	-4.63E-03
		2.44E-04	5.17E+00	1.07E-04	7.69E-01	4.26E-02	1.59E-03		5.93E-13	1.00E+00	1.99E-01	1.00E+00	1.00E+00
	5	4.43E-04	6.64E+01	1.15E-03	1.16E+00	1.36E-01	1.05E-02	1.92E-22	-6.64E+01	-7.08E-04	-1.16E+00	-1.35E-01	-1.01E-02
		2.56E-04	1.07E+01	5.12E-03	4.79E-01	3.87E-01	8.50E-03		5.93E-13	1.00E+00	9.10E-01	1.00E+00	1.00E+00
	6	5.02E-04	1.10E+02	1.06E-03	1.28E+00	3.81E-02	1.46E-02	3.65E-10	-1.10E+02	-5.54E-04	-1.28E+00	-3.76E-02	-1.41E-02
		2.63E-04	1.21E+01	4.98E-03	6.51E-01	1.19E-01	1.08E-02		5.93E-13	1.00E+00	9.15E-01	1.00E+00	1.00E+00
	8	4.77E-04	1.46E+02	1.06E-03	1.86E+00	3.42E-01	2.14E+00	4.12E-33	-1.46E+02	-5.80E-04	-1.16E+00	3.42E-01	-2.14E+00
		3.55E-04	7.44E+00	4.90E-03	9.67E-01	7.86E-01	2.34E+00		5.93E-13	1.00E+00	2.29E-01	9.98E-01	1.11E-01
10	6.36E-04	1.57E+02	1.46E-04	2.37E+00	5.75E-02	2.57E+00	1.92E-22	-1.57E+02	4.91E-04	-2.37E+00	-5.69E-02	-2.57E+00	
	3.83E-04	5.24E+00	9.83E-05	1.13E+00	6.00E-02	3.11E+00		5.93E-13	1.00E+00	4.83E-03	1.00E+00	1.65E-03	
DTLZ4	3	9.33E-05	9.37E-04	3.76E-06	3.77E-04	6.06E-04	8.82E-04	1.05E-10	-8.44E-04	8.95E-05	-2.84E-04	-5.12E-04	-7.89E-04
		4.72E-05	3.13E-04	5.50E-06	6.29E-05	2.97E-04	3.19E-04		5.93E-13	6.22E-01	2.39E-05	6.00E-13	5.93E-13
	4	6.53E-05	4.79E-03	1.08E-05	9.68E-04	1.29E-03	2.72E-03	5.14E-26	-4.73E-03	5.46E-05	-9.02E-04	-1.22E-03	-2.65E-03
		4.04E-05	1.70E-03	9.66E-06	1.32E-04	4.55E-04	1.11E-03		5.93E-13	1.00E+00	8.84E-04	1.59E-06	5.93E-13
	5	7.34E-05	5.01E-02	1.79E-05	1.14E-03	2.74E-03	5.05E-03	6.49E-18	-5.00E-02	5.55E-05	-1.07E-03	-2.66E-03	-4.98E-03
		3.70E-05	1.08E-02	1.16E-05	2.56E-04	1.81E-03	1.10E-03		5.93E-13	1.00E+00	9.42E-01	2.04E-01	4.36E-04
	6	5.24E-05	1.38E-01	2.10E-05	8.82E-04	4.60E-03	8.53E-03	1.05E-10	-1.38E-01	3.14E-05	-8.30E-04	-4.55E-03	-8.48E-03
		2.78E-05	1.09E-02	1.45E-05	2.24E-04	2.69E-03	4.09E-03		5.93E-13	1.00E+00	9.86E-01	5.41E-03	3.86E-09
	8	4.73E-05	1.95E-01	4.54E-05	4.17E-04	1.47E-02	1.47E-02	5.14E-26	-1.95E-01	1.89E-06	-3.69E-04	-1.46E-02	-1.47E-02
		1.03E-04	9.04E-03	4.95E-05	1.24E-04	3.58E-03	1.25E-02		5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00	6.20E-13	6.15E-13
10	4.05E-05	2.12E-01	7.09E-05	3.01E-04	3.06E-02	1.38E-02	6.49E-18	-2.12E-01	-3.04E-05	-2.60E-04	-3.06E-02	-1.37E-02	
	2.99E-05	7.23E-03	3.88E-05	9.70E-05	4.47E-03	8.43E-03		5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00	5.93E-13	5.93E-13	
DTLZ6	3	4.18E-03	6.37E+01	3.61E-03	3.26E+01	6.33E-03	6.75E-03	8.66E-34	-6.37E+01	5.68E-04	-3.26E+01	-2.15E-03	-2.57E-03
		1.30E-03	3.92E+00	2.12E-03	5.02E+00	3.60E-03	2.03E-04		5.93E-13	1.00E+00	5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00
	4	4.52E-03	1.15E+02	1.20E-01	5.97E+01	4.12E-02	8.65E-02	2.62E-25	-1.15E+02	-1.15E-01	-5.97E+01	-3.67E-02	-8.20E-02
		1.13E-03	6.34E+00	1.76E-02	9.07E+00	6.69E-02	5.35E-03		5.93E-13	1.00E+00	5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00
	5	6.97E-03	1.53E+02	2.99E-01	8.03E+01	2.57E-01	1.38E-01	5.22E-32	-1.53E+02	-2.92E-01	-8.03E+01	-2.50E-01	-1.31E-01
	3.59E-03	3.47E+00	7.75E-02	5.90E+00	1.71E-01	3.88E-03		5.93E-13	9.99E-01	5.93E-13	9.99E-01	1.00E+00	

Table 6 Statistical results of the convergence indicator GD (Continued)

表 6 收敛性指标 GD 的统计数据(续)

问题	目标数	均值与标准差						Levene	平均差与 P 值				
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA		NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTLZ6	6	8.62E-03	1.66E+02	3.71E-01	8.89E+01	3.84E-01	1.99E-01	6.86E-34	-1.66E+02	-3.62E-01	-8.89E+01	-3.75E-01	-1.90E-01
		4.06E-03	3.22E+00	5.59E-02	6.30E+00	1.93E-02	6.19E-03		5.93E-13	9.97E-01	5.93E-13	9.96E-01	1.00E+00
	8	6.20E-03	1.81E+02	3.76E-01	8.30E+01	6.24E-01	2.33E-01	2.62E-25	-1.81E+02	-3.70E-01	-8.30E+01	-6.18E-01	-2.27E-01
		2.71E-03	3.40E+00	3.01E-02	1.03E+01	6.15E-02	5.55E-02		5.93E-13	1.00E+00	5.93E-13	9.94E-01	1.00E+00
	10	7.14E-03	1.89E+02	3.69E-01	8.86E+01	7.85E-01	1.91E-01	5.22E-32	-1.89E+02	-3.62E-01	-6.86E+01	-7.77E-01	-1.83E-01
		3.42E-03	1.49E+00	3.29E-02	8.71E+00	4.78E-02	4.26E-02		5.93E-13	9.99E-01	5.93E-13	9.61E-01	1.00E+00
DTLZ7	3	8.38E-04	2.90E-03	4.78E-04	1.88E-03	2.29E-02	1.18E-03	2.01E-30	-2.07E-03	3.59E-04	-1.04E-03	-2.21E-02	-3.44E-04
		3.84E-04	6.22E-04	8.08E-05	1.78E-04	8.28E-03	9.28E-05		1.77E-01	9.98E-01	8.43E-01	5.93E-13	9.99E-01
	4	4.17E-03	9.98E-03	4.87E-03	4.84E-03	8.52E-02	3.02E-03	5.41E-30	-5.80E-03	-6.98E-04	-6.63E-04	-8.11E-02	1.15E-03
		3.69E-04	4.06E-04	5.67E-04	1.27E-04	2.28E-02	4.05E-04		1.56E-01	1.00E+00	1.00E+00	5.93E-13	9.97E-01
	5	7.74E-03	2.30E-02	8.25E-03	1.12E-02	1.86E-01	4.40E-03	2.88E-25	-1.53E-02	-5.11E-04	-3.42E-03	-1.78E-01	3.34E-03
		9.27E-04	6.55E-03	1.98E-03	9.49E-04	5.75E-02	1.62E-03		1.30E-01	1.00E+00	9.93E-01	5.93E-13	9.94E-01
	6	1.25E-02	7.94E-02	1.29E-02	1.85E-02	2.94E-01	5.19E-03	2.01E-30	-6.69E-02	-4.70E-04	-5.99E-03	-2.81E-01	7.29E-03
		5.18E-04	3.45E-02	2.06E-03	8.45E-03	5.50E-02	1.88E-03		5.93E-13	1.00E+00	9.54E-01	5.93E-13	8.98E-01
	8	2.15E-02	4.54E-01	1.23E-02	4.50E-02	3.68E-01	2.18E-02	5.41E-30	-4.32E-01	9.20E-03	-2.35E-02	-3.47E-01	-3.63E-04
		9.74E-04	9.75E-02	6.79E-04	2.56E-02	8.39E-02	1.63E-02		5.93E-13	9.86E-01	5.40E-01	5.93E-13	1.00E+00
10	4.44E-02	1.71E+00	2.16E-02	1.21E-01	6.41E-01	5.06E-02	2.88E-25	-1.66E+00	2.28E-02	-7.61E-02	-5.97E-01	-6.15E-03	
	2.04E-03	4.34E-01	1.50E-03	9.31E-02	1.01E-01	5.07E-02		5.93E-13	9.97E-01	6.16E-01	5.93E-13	1.00E+00	

Table 7 Statistical results of the uniformity indicator DM

表 7 分布均匀性指标 DM 的统计数据

问题	目标数	均值与标准差						Levene	平均差与 P 值				
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA		NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTLZ1	3	9.18E-01	7.84E-01	6.15E-02	2.24E-01	4.64E-01	1.07E+00	4.19E-25	1.34E-01	8.57E-01	6.94E-01	4.54E-01	-1.49E-01
		3.57E-02	6.64E-02	1.57E-02	3.20E-01	1.32E-01	1.69E-02		5.85E-03	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	1.34E-03
	4	8.97E-01	6.01E-01	6.16E-02	1.17E-01	3.03E-01	9.04E-01	3.52E-35	2.96E-01	8.35E-01	7.80E-01	5.94E-01	6.76E-03
		3.59E-02	2.59E-01	1.33E-02	2.48E-01	1.30E-01	8.34E-02		3.06E-10	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	1.00E+00
	5	9.03E-01	2.98E-02	5.65E-02	4.00E-01	2.43E-01	7.46E-01	1.98E-05	8.73E-01	8.46E-01	5.03E-01	6.60E-01	1.57E-01
		4.05E-02	5.39E-02	1.48E-02	4.44E-01	1.11E-01	1.18E-01		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	2.51E-02
	6	9.94E-01	0.00E+00	9.01E-02	5.96E-01	2.93E-01	7.93E-01	4.19E-25	9.94E-01	9.04E-01	3.98E-01	7.01E-01	2.01E-01
		7.73E-02	0.00E+00	1.95E-02	8.13E-01	1.01E-01	3.76E-02		5.93E-13	5.93E-13	1.27E-04	2.25E-12	1.93E-01
	8	7.31E-01	0.00E+00	4.87E-02	5.16E-01	2.23E-01	6.26E-01	3.52E-35	7.31E-01	6.82E-01	2.15E-01	5.08E-01	1.05E-01
		9.75E-02	0.00E+00	1.01E-02	5.74E-01	4.60E-02	1.81E+00		4.64E-03	1.05E-02	8.92E-01	1.19E-01	9.95E-01
10	6.80E-01	0.00E+00	3.31E-02	3.07E-01	1.73E-01	2.37E+00	1.98E-05	6.80E-01	6.47E-01	3.74E-01	5.07E-01	-1.69E+00	
	6.79E-02	0.00E+00	5.28E-03	4.41E-01	5.21E-02	7.49E+00		9.55E-01	9.64E-01	9.97E-01	9.88E-01	2.74E-01	
DTLZ2	3	9.74E-01	7.72E-01	5.09E-01	6.05E-01	2.95E-01	9.33E-01	2.67E-10	2.02E-01	4.65E-01	3.69E-01	6.79E-01	4.13E-02
		2.28E-02	4.17E-02	1.44E-02	8.62E-03	9.54E-02	2.44E-02		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	6.65E-03
	4	9.19E-01	6.59E-01	4.76E-01	5.66E-01	2.45E-01	9.42E-01	5.81E-16	2.60E-01	4.43E-01	3.53E-01	6.74E-01	-2.33E-02
		1.09E-02	5.76E-02	2.44E-02	1.31E-02	9.88E-02	4.83E-02		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.11E-01
	5	9.52E-01	2.72E-01	5.41E-01	6.51E-01	3.44E-01	9.28E-01	2.72E-14	6.80E-01	4.11E-01	3.00E-01	6.07E-01	2.35E-02
		2.02E-02	5.21E-02	1.88E-02	1.98E-02	1.08E-01	6.51E-02		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	6.09E-01
	6	8.54E-01	1.40E-01	5.07E-01	7.35E-01	3.12E-01	8.50E-01	2.67E-10	7.14E-01	3.47E-01	1.19E-01	5.42E-01	4.32E-03
		3.56E-02	3.72E-02	7.37E-02	2.85E-02	5.26E-02	3.31E-02		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	9.99E-01
	8	6.80E-01	3.71E-02	2.26E-01	7.25E-01	2.76E-01	9.83E-01	5.81E-16	6.43E-01	4.54E-01	4.50E-02	4.05E-01	-3.03E-01
		2.67E-02	2.38E-02	8.89E-02	2.91E-02	4.79E-02	1.41E-01		5.93E-13	5.93E-13	1.71E-01	5.93E-13	5.93E-13
10	7.97E-01	3.12E-02	1.87E-01	7.31E-01	2.79E-01	1.14E+00	2.72E-14	7.65E-01	6.09E-01	6.56E-02	5.18E-01	-3.41E-01	
	3.00E-02	2.04E-02	6.80E-02	3.12E-02	6.28E-02	2.23E-01		5.93E-13	5.93E-13	1.22E-01	5.93E-13	5.93E-13	
DTLZ3	3	9.26E-01	7.47E-01	2.78E-02	0.00E+00	1.92E-01	9.15E-01	3.83E-08	1.79E-01	8.99E-01	9.26E-01	7.35E-01	1.12E-02
		5.63E-02	3.53E-02	8.39E-03	0.00E+00	1.33E-01	3.01E-02		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	9.82E-01
	4	8.61E-01	7.06E-02	2.62E-02	0.00E+00	2.32E-01	8.42E-01	1.40E-25	7.91E-01	8.35E-01	8.61E-01	6.29E-01	1.95E-02
		8.01E-02	1.81E-01	5.10E-03	0.00E+00	8.76E-02	1.21E-01		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	9.76E-01
	5	8.67E-01	0.00E+00	2.79E-02	0.00E+00	1.93E-01	7.52E-01	4.33E-16	8.67E-01	8.39E-01	8.67E-01	6.74E-01	1.15E-01
9.42E-02	0.00E+00	4.02E-03	0.00E+00	9.30E-02	2.29E-01	5.93E-13	5.93E-13		5.93E-13	5.93E-13	7.84E-04		

Table 7 Statistical results of the uniformity indicator DM (Continued)

表 7 分布均匀性指标 DM 的统计数据(续)

问题	目标数	均值与标准差						Levene	平均差与 P 值				
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA		NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTLZ3	6	8.26E-01	0.00E+00	3.00E-02	0.00E+00	1.53E-01	8.97E-01	3.83E-08	8.26E-01	7.96E-01	8.26E-01	6.73E-01	7.03E-02
		4.13E-02	0.00E+00	5.97E-03	0.00E+00	9.84E-02	3.77E-01		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.32E-01
	8	6.86E-01	0.00E+00	2.06E-02	0.00E+00	1.07E-01	4.34E-01	1.40E-25	6.86E-01	6.66E-01	6.86E-01	5.80E-01	2.52E-01
		3.08E-02	0.00E+00	4.25E-03	0.00E+00	4.55E-02	1.09E+00		2.24E-07	5.48E-07	2.24E-07	1.89E-05	2.50E-01
DTLZ4	3	7.55E-01	0.00E+00	1.90E-02	0.00E+00	1.32E-01	8.32E-03	4.33E-16	7.55E-01	7.36E-01	7.55E-01	6.23E-01	7.47E-01
		4.96E-02	0.00E+00	4.36E-03	0.00E+00	6.30E-02	2.10E-02		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13
	4	8.76E-01	7.47E-01	2.48E-01	6.45E-01	4.14E-01	6.87E-01	7.00E-16	1.29E-01	6.28E-01	2.31E-01	4.62E-01	1.89E-01
		2.91E-01	2.06E-01	1.99E-01	2.00E-02	1.34E-01	3.89E-01		2.86E-01	5.93E-13	2.98E-03	3.56E-11	2.82E-02
DTLZ7	3	8.77E-01	7.77E-01	3.14E-01	6.11E-01	3.74E-01	3.47E-01	1.61E-09	9.97E-02	5.62E-01	2.65E-01	5.03E-01	5.30E-01
		1.42E-01	4.08E-02	1.42E-01	2.03E-02	7.68E-02	3.30E-01		1.68E-01	5.93E-13	2.78E-08	5.93E-13	5.93E-13
	4	8.99E-01	5.20E-01	3.56E-01	6.71E-01	3.56E-01	3.61E-01	2.93E-23	3.79E-01	5.43E-01	2.27E-01	5.43E-01	5.38E-01
		1.50E-01	5.93E-02	1.34E-01	2.39E-02	1.81E-01	2.67E-01		5.94E-13	5.93E-13	1.24E-06	5.93E-13	5.93E-13
DTLZ7	5	7.52E-01	2.17E-01	4.05E-01	7.17E-01	2.83E-01	3.71E-01	7.00E-16	5.36E-01	3.48E-01	3.52E-02	4.69E-01	3.82E-01
		3.09E-02	4.88E-02	1.20E-01	2.91E-02	1.67E-01	2.55E-01		5.93E-13	5.93E-13	9.17E-01	5.93E-13	5.93E-13
	6	6.23E-01	2.27E-02	4.59E-01	6.57E-01	2.96E-01	6.00E-01	1.61E-09	6.00E-01	1.64E-01	3.45E-02	3.27E-01	2.32E-02
		1.93E-02	2.50E-02	1.19E-01	3.71E-02	8.12E-02	2.95E-01		5.93E-13	8.23E-05	9.21E-01	5.94E-13	9.86E-01
DTLZ7	8	8.29E-01	7.65E-03	6.24E-01	5.86E-01	2.71E-01	8.12E-01	2.93E-23	8.21E-01	2.04E-01	2.43E-01	5.58E-01	1.68E-02
		5.42E-02	1.22E-01	1.28E-01	3.10E-02	6.92E-02	3.65E-01		5.93E-13	3.66E-05	4.79E-07	5.93E-13	9.99E-01
	10	1.36E+00	1.37E+00	9.65E-01	3.96E-02	1.17E+00	1.45E+00	2.83E-05	-1.12E-02	3.92E-01	1.32E-01	1.89E-01	-9.41E-02
		1.14E-01	4.13E-01	1.17E-01	2.17E-01	2.65E-01	1.16E-01		1.00E+00	1.21E-08	5.93E-13	2.45E-02	6.26E-01
DTLZ7	3	9.31E-01	5.08E-02	8.61E-01	0.00E+00	6.46E-01	4.65E-01	1.24E-27	8.80E-01	6.92E-02	9.31E-01	2.85E-01	4.66E-01
		2.42E-01	1.55E-01	6.89E-02	0.00E+00	4.05E-01	4.07E-01		5.93E-13	9.12E-01	5.93E-13	6.33E-04	1.92E-09
	4	9.83E-01	0.00E+00	3.19E-01	0.00E+00	2.21E-01	0.00E+00	6.83E-28	9.83E-01	6.64E-01	9.83E-01	7.62E-01	9.83E-01
		1.89E-01	0.00E+00	3.97E-01	0.00E+00	3.96E-01	0.00E+00		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13
DTLZ7	5	9.57E-01	0.00E+00	1.48E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	2.83E-05	9.57E-01	8.09E-01	9.57E-01	9.57E-01	9.57E-01
		3.13E-01	0.00E+00	5.43E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13
	6	8.43E-01	0.00E+00	1.41E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	1.24E-27	8.43E-01	7.02E-01	8.43E-01	8.43E-01	8.43E-01
		2.90E-01	0.00E+00	2.66E-02	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13
DTLZ7	8	9.23E-01	0.00E+00	1.50E-01	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	6.83E-28	9.23E-01	7.74E-01	9.23E-01	9.23E-01	9.23E-01
		2.75E-01	0.00E+00	4.52E-17	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13
	10	4.96E-01	1.06E+00	3.22E-01	3.35E-01	3.67E-01	9.31E-01	1.47E-20	-5.64E-01	1.74E-01	1.61E-01	1.29E-01	-4.35E-01
		2.64E-02	5.18E-02	1.41E-01	2.33E-02	1.48E-01	2.37E-01		5.93E-13	9.05E-06	5.39E-05	2.31E-03	5.93E-13
DTLZ7	3	2.29E-01	8.28E-01	1.10E-01	1.90E-01	2.62E-01	3.33E-01	8.95E-47	-5.98E-01	1.19E-01	3.92E-02	-3.29E-02	-1.04E-01
		4.00E-02	4.04E-02	5.52E-02	2.36E-02	9.15E-02	1.16E-01		5.93E-13	4.41E-09	2.44E-01	4.41E-01	4.04E-07
	4	5.99E-01	8.86E-01	4.65E-02	1.80E-01	1.89E-01	1.22E+00	1.61E-30	-2.87E-01	5.53E-01	4.19E-01	4.10E-01	-6.22E-01
		8.41E-02	2.57E-02	4.95E-02	1.73E-02	1.18E-01	7.16E-01		3.61E-03	3.31E-10	2.87E-06	4.79E-06	2.43E-12
DTLZ7	5	3.81E-01	1.05E+00	1.60E-02	2.58E-01	1.51E-01	7.51E-01	1.47E-20	-6.70E-01	3.65E-01	1.23E-01	2.30E-01	-3.70E-01
		9.35E-02	4.31E-02	1.09E-02	3.18E-02	8.83E-02	4.89E-01		5.93E-13	2.41E-09	2.03E-01	4.17E-04	1.37E-09
	6	2.82E-01	6.11E-01	1.13E-02	2.42E-01	4.53E-02	1.29E+00	8.95E-47	-3.29E-01	2.70E-01	3.99E-02	2.37E-01	-1.01E+00
		4.76E-02	1.65E-01	1.77E-18	4.05E-02	5.33E-02	1.22E+00		1.21E-01	3.03E-01	1.00E+00	4.57E-01	1.02E-11
DTLZ7	8	1.65E-01	1.09E-01	1.14E-02	2.47E-01	7.59E-03	1.79E+00	1.61E-30	5.69E-02	1.54E-01	-8.18E-02	1.58E-01	-1.62E+00
		8.79E-02	8.35E-02	2.04E-03	3.91E-02	3.12E-02	1.42E+00		9.99E-01	9.08E-01	9.94E-01	8.99E-01	5.93E-13

Table 8 Statistical results of the comprehensive indicator IGD

表 8 综合性指标 IGD 的统计数据

问题	目标数	均值与标准差						Levene	平均差与 P 值				
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA		NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTLZ1	3	2.48E-02	2.61E-02	1.77E-01	6.07E-01	5.64E-02	1.93E-02	4.86E-29	-1.35E-03	-1.52E-01	-5.83E-01	-3.16E-02	5.52E-03
		3.23E-03	2.13E-03	1.59E-02	4.68E-01	2.04E-02	1.96E-04		1.00E+00	2.88E-02	5.93E-13	9.88E-01	1.00E+00
	4	4.68E-02	9.41E-01	2.39E-01	9.25E-01	1.40E-01	4.80E-02	1.02E-22	-8.94E-01	-1.92E-01	-8.78E-01	-9.28E-02	-1.28E-03
		1.29E-03	2.28E+00	2.08E-02	6.44E-01	4.53E-02	2.57E-03		5.76E-03	9.72E-01	7.20E-03	9.99E-01	1.00E+00
DTLZ1	5	6.65E-02	2.11E+00	3.36E-01	8.01E-01	2.18E-01	6.78E-02	3.39E-47	-2.04E+00	-2.69E-01	-7.35E-01	-1.52E-01	-1.27E-03
		1.49E-03	2.62E+00	4.01E-02	6.65E-01	4.71E-02	7.11E-03		3.25E-10	9.35E-01	1.10E-01	9.95E-01	1.00E+00

Table 8 Statistical results of the comprehensive indicator IGD (Continued 1)

表 8 综合性指标 IGD 的统计数据(续 1)

问题	目标数	均值与标准差						Levene	平均差与 P 值				
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA		NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTLZ1	6	8.02E-02	1.08E+01	3.83E-01	9.59E-01	2.52E-01	8.48E-02	4.86E-29	-1.07E+01	-3.03E-01	-8.79E-01	-1.72E-01	-4.62E-03
	8	1.26E-03	5.63E+00	3.07E-02	6.10E-01	3.86E-02	6.03E-03	1.02E-22	5.93E-13	9.96E-01	6.83E-01	1.00E+00	1.00E+00
	10	1.08E-01	1.74E+01	4.21E-01	9.98E-01	2.77E-01	1.24E-01	3.39E-47	-1.73E+01	-3.14E-01	-8.90E-01	-1.70E-01	-1.64E-02
DTLZ2	3	8.05E-03	9.77E+00	2.44E-02	7.83E-01	1.74E-02	1.09E-02	2.93E-27	5.93E-13	1.00E+00	9.55E-01	1.00E+00	1.00E+00
	4	1.27E-01	2.10E+01	4.60E-01	1.05E+00	3.01E-01	5.35E-01	6.86E-18	-2.09E+01	-3.33E-01	-9.28E-01	-1.74E-01	-4.08E-01
	5	1.54E-03	3.17E-03	3.30E-03	1.00E-03	4.02E-02	1.20E-03	6.16E-21	5.93E-13	1.00E+00	9.79E-01	1.00E+00	1.00E+00
	6	5.68E-02	6.92E-02	1.20E-01	7.43E-02	1.99E-01	6.30E-02	2.93E-27	-1.24E-02	-6.32E-02	-1.75E-02	-1.42E-01	-6.20E-03
	8	1.34E-01	1.60E-01	1.91E-01	1.45E-01	2.60E-01	1.34E-01	6.86E-18	4.74E-02	5.93E-13	8.88E-04	5.93E-13	6.96E-01
	10	3.93E-03	9.97E-03	2.17E-03	2.81E-03	3.31E-02	2.88E-03	6.16E-21	-2.61E-02	-5.71E-02	-1.14E-02	-1.26E-01	-9.31E-04
	3	1.83E-01	3.48E-01	2.15E-01	1.89E-01	2.50E-01	1.95E-01	2.93E-27	5.93E-13	3.89E-05	4.37E-10	5.93E-13	6.65E-13
	4	4.16E-03	3.24E-02	2.29E-03	5.81E-03	1.44E-02	1.42E-02	6.86E-18	-1.65E-01	-3.17E-02	-6.16E-03	-6.72E-02	-1.21E-02
	5	3.88E-01	6.65E-01	4.40E-01	3.12E-01	5.83E-01	2.96E-01	6.16E-21	5.93E-13	1.34E-11	6.64E-01	5.93E-13	4.27E-02
	6	4.34E-03	7.63E-02	4.84E-02	3.30E-03	4.48E-02	8.83E-03	2.93E-27	-2.77E-01	-5.19E-02	7.60E-02	-1.95E-01	9.18E-02
DTLZ3	8	5.37E-01	1.12E+00	7.63E-01	4.19E-01	7.92E-01	4.09E-01	6.86E-18	5.93E-13	3.89E-05	4.37E-10	5.93E-13	6.65E-13
	10	2.73E-03	1.44E-01	7.10E-02	5.02E-03	3.60E-02	8.43E-03	6.86E-18	-5.88E-01	-2.27E-01	1.18E-01	-2.55E-01	1.28E-01
	3	6.21E-01	1.29E+00	8.88E-01	5.10E-01	9.06E-01	4.61E-01	6.16E-21	5.93E-13	5.93E-13	9.20E-13	5.93E-13	5.93E-13
	4	2.00E-03	1.07E-01	5.81E-02	6.62E-03	3.17E-02	1.32E-02	6.16E-21	-6.73E-01	-2.66E-01	1.12E-01	-2.85E-01	1.60E-01
	5	5.92E-02	6.98E-02	4.70E-01	9.54E+00	2.63E-01	6.78E-02	2.93E-27	5.93E-13	5.93E-13	9.20E-13	5.93E-13	5.93E-13
	6	2.54E-03	3.56E-03	2.68E-02	5.58E+00	5.87E-02	3.34E-03	1.25E-18	1.00E+00	9.82E-01	5.93E-13	9.99E-01	1.00E+00
	8	1.36E-01	1.16E+01	5.39E-01	1.25E+01	3.04E-01	1.48E-01	8.71E-31	-1.15E+01	-4.03E-01	-1.24E+01	-1.68E-01	-1.17E-02
	10	5.97E-03	1.38E+01	8.60E-02	7.68E+00	8.25E-02	2.18E-02	2.69E-24	1.26E-09	1.00E+00	6.17E-11	1.00E+00	1.00E+00
	3	1.87E-01	3.71E+01	5.83E-01	1.13E+01	2.96E-01	2.34E-01	6.16E-21	-3.69E+01	-3.96E-01	-1.12E+01	-1.08E-01	-4.68E-02
	4	7.12E-03	2.43E+01	6.96E-02	4.78E+00	6.06E-02	4.66E-02	2.93E-27	5.93E-13	1.00E+00	4.35E-04	1.00E+00	1.00E+00
DTLZ4	5	3.92E-01	5.06E+01	9.05E-01	1.26E+01	7.24E-01	3.94E-01	1.25E-18	-5.02E+01	-5.13E-01	-1.22E+01	-3.32E-01	-2.55E-03
	6	7.22E-03	2.49E+01	5.16E-02	6.46E+00	1.27E-01	1.30E-01	1.25E-18	5.93E-13	1.00E+00	1.86E-04	1.00E+00	1.00E+00
	8	5.39E-01	6.96E+01	1.03E+00	1.76E+01	8.90E-01	1.46E+01	8.71E-31	-6.90E+01	-4.92E-01	-1.71E+01	-3.51E-01	-1.41E+01
	10	3.22E-03	2.42E+01	4.08E-02	9.67E+00	6.23E-02	1.55E+01	8.71E-31	5.93E-13	1.00E+00	4.32E-06	1.00E+00	2.84E-04
	3	6.25E-01	7.48E+01	1.10E+00	2.25E+01	9.74E-01	1.93E+01	2.69E-24	-7.42E+01	-4.71E-01	-2.18E+01	-3.49E-01	-1.87E+01
	4	4.42E-03	2.74E+01	4.06E-02	1.12E+01	1.83E-01	2.37E+01	2.69E-24	5.93E-13	1.00E+00	2.42E-06	1.00E+00	8.45E-05
	5	1.39E-01	1.32E-01	5.06E-01	7.31E-02	2.36E-01	2.20E-01	1.92E-10	7.57E-03	-3.67E-01	6.61E-02	-9.66E-02	-8.07E-02
	6	2.18E-01	2.48E-01	3.41E-01	1.28E-03	2.59E-01	2.56E-01	1.92E-10	1.00E+00	4.25E-07	9.01E-01	6.44E-01	7.96E-01
	8	1.68E-01	1.42E-01	4.36E-01	1.43E-01	3.71E-01	5.08E-01	3.18E-26	2.57E-02	-2.68E-01	2.48E-02	-2.03E-01	-3.40E-01
	10	1.25E-01	7.35E-03	2.52E-01	3.25E-03	2.19E-01	3.00E-01	3.18E-26	9.95E-01	2.39E-06	9.96E-01	7.75E-04	1.24E-09
DTLZ6	3	2.26E-01	2.68E-01	4.04E-01	1.91E-01	5.68E-01	5.92E-01	8.20E-19	-4.21E-02	-1.78E-01	3.49E-02	-3.42E-01	-3.66E-01
	4	1.26E-01	3.17E-02	2.22E-01	5.66E-03	3.23E-01	3.10E-01	8.20E-19	9.72E-01	1.63E-02	9.88E-01	3.82E-08	3.44E-09
	5	4.04E-01	5.95E-01	5.11E-01	3.26E-01	6.56E-01	5.82E-01	1.92E-10	-1.91E-01	-1.08E-01	7.73E-02	-2.52E-01	-1.78E-01
	6	2.24E-02	6.42E-02	1.07E-01	3.63E-03	2.41E-01	1.98E-01	1.92E-10	3.55E-06	3.29E-02	2.54E-01	4.45E-10	1.90E-05
	8	5.38E-01	1.18E+00	6.10E-01	4.56E-01	7.44E-01	6.18E-01	3.18E-26	-6.41E-01	-7.17E-02	8.25E-02	-2.06E-01	-8.51E-02
	10	7.42E-03	2.05E-01	7.62E-02	9.32E-03	9.13E-02	1.83E-01	3.18E-26	5.93E-13	2.12E-01	1.00E-01	1.06E-08	1.20E-01
	3	6.28E-01	1.42E+00	6.61E-01	5.76E-01	9.21E-01	6.48E-01	8.20E-19	-7.91E-01	-3.25E-02	5.26E-02	-2.93E-01	-1.97E-02
	4	6.14E-03	2.55E-01	4.58E-02	8.89E-03	3.43E-02	1.23E-01	8.20E-19	5.93E-13	8.94E-01	5.17E-01	5.93E-13	9.87E-01
	5	5.47E-02	1.78E+00	6.29E-02	8.86E+00	8.81E-02	6.51E-02	6.29E-14	-1.73E+00	-8.24E-03	-8.81E+00	-3.34E-02	-1.05E-02
	6	2.36E-02	6.02E+00	1.92E-02	4.78E+00	4.52E-02	3.27E-03	6.29E-14	2.75E-01	1.00E+00	5.93E-13	1.00E+00	1.00E+00
DTLZ6	3	1.23E-01	9.67E+00	8.89E-02	9.13E+00	4.20E-01	8.64E-01	2.46E-34	-9.55E+00	3.36E-02	-9.01E+00	-2.98E-01	-7.42E-01
	4	3.72E-02	9.28E+00	2.16E-02	4.19E+00	5.29E-01	9.17E-02	2.46E-34	6.05E-13	1.00E+00	8.46E-13	1.00E+00	9.83E-01
	5	1.22E-01	5.07E+01	5.74E-01	1.03E+01	2.23E+00	2.85E+00	4.16E-39	-5.06E+01	-4.52E-01	-1.01E+01	-2.11E+00	-2.72E+00
	6	4.88E-02	2.02E+01	2.77E-01	5.65E+00	1.43E+00	1.52E-01	4.16E-39	5.93E-13	1.00E+00	1.37E-04	9.32E-01	8.23E-01
	8	1.11E-01	6.85E+01	7.64E-01	9.04E+00	3.25E+00	3.65E+00	6.29E-14	-6.84E+01	-6.52E-01	-8.93E+00	-3.14E+00	-3.53E+00
	10	8.74E-02	2.31E+01	8.32E-02	4.68E+00	1.80E-01	1.36E-01	6.29E-14	5.93E-13	1.00E+00	5.51E-03	8.03E-01	7.12E-01
	3	1.46E-01	8.53E+01	7.86E-01	9.65E+00	5.25E+00	4.50E+00	2.46E-34	-8.52E+01	-6.41E-01	-9.50E+00	-5.11E+00	-4.36E+00
	4	9.81E-02	3.04E+01	2.15E-02	3.72E+00	5.56E-01	5.92E-01	2.46E-34	5.93E-13	1.00E+00	4.25E-02	6.13E-01	7.58E-01
	5	1.20E-01	7.97E+01	7.91E-01	9.07E+00	6.48E+00	5.54E+00	4.16E-39	-7.96E+01	-6.71E-01	-8.95E+00	-6.36E+00	-5.42E+00
	6	7.35E-02	2.09E+01	1.95E-02	4.27E+00	3.63E-01	4.78E-01	4.16E-39	5.93E-13	1.00E+00	1.39E-03	5.80E-02	1.58E-01

Table 8 Statistical results of the comprehensive indicator *IGD* (Continued 2)

表 8 综合性指标 *IGD* 的统计数据(续 2)

问题	目标数	均值与标准差					Levene	平均差与 <i>P</i> 值					
		ISEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO		ϵ -MOEA	NNIA	IBEA	MSOPS	AR+DMO	ϵ -MOEA
DTL7	3	3.12E-01	7.92E-02	4.88E-01	2.70E-01	6.89E-01	1.17E-01	6.89E-25	2.33E-01	-1.76E-01	4.17E-02	-3.77E-01	1.96E-01
		4.54E-02	4.87E-03	2.89E-01	1.57E-02	2.12E-01	1.28E-01	5.48E-07	3.20E-04	9.06E-01	5.94E-13	4.20E-05	
	4	9.54E-01	2.16E-01	8.55E-01	4.31E-01	1.08E+00	3.39E-01	1.11E-20	7.38E-01	9.88E-02	5.22E-01	-1.30E-01	6.14E-01
		1.53E-01	7.55E-03	3.26E-01	3.83E-02	2.59E-01	1.78E-01	5.93E-13	3.73E-01	5.93E-13	1.07E-01	5.93E-13	
	5	1.81E+00	3.61E-01	1.90E+00	6.17E-01	1.87E+00	6.37E-01	9.53E-24	1.45E+00	-9.32E-02	1.19E+00	-5.94E-02	1.17E+00
		2.57E-01	1.48E-02	4.02E-01	3.61E-02	5.38E-01	2.73E-01	5.93E-13	8.61E-01	5.93E-13	9.78E-01	5.93E-13	
	6	1.91E+00	6.05E-01	3.11E+00	8.11E-01	3.00E+00	6.03E-01	6.89E-25	1.31E+00	-1.19E+00	1.10E+00	-1.09E+00	1.31E+00
		3.51E-01	4.10E-02	3.88E-01	3.15E-02	5.61E-01	2.96E-01	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	5.93E-13	
	8	1.41E+00	1.15E+00	5.55E+00	1.06E+00	6.42E+00	1.01E+00	1.11E-20	2.59E-01	-4.14E+00	3.50E-01	-5.01E+00	3.97E-01
		3.79E-01	9.37E-02	8.55E-02	4.07E-02	1.05E+00	3.02E-01	2.91E-01	5.93E-13	5.49E-02	5.93E-13	1.81E-02	
10	1.96E+00	3.54E+00	7.76E+00	1.54E+00	1.06E+01	1.28E+00	9.53E-24	-1.58E+00	-5.80E+00	4.21E-01	-8.63E+00	6.88E-01	
	6.71E-01	2.00E+00	1.15E-01	2.13E-01	9.73E-01	3.02E-01	2.54E-08	5.93E-13	5.35E-01	5.93E-13	6.60E-02		

从表 7 中的数据可以看出:ISEA 的分布性表现最好,在多数情况下的 DM 指标均好于其他 5 种算法;其次是 ϵ -MOEA,但其在 DTL6 问题上的分布较差;MSOPS 在 DTL3 和 DTL6 问题上的分布性表现不佳;而 AR+DMO 和 IBEA 不能很好地保持种群的分布性,DM 指标较差;最后,NNIA 在低维问题上的分布效果较好,且在 DTL7 问题上表现得更加突出。

最后分析综合性能指标 IGD.从表 8 中的数据可以看出:ISEA 拥有最好的综合性能,但在 DTL7 问题上表现稍差; ϵ -MOEA 的综合性能仅次于 ISEA;MSOPS 在 DTL2,DTL4 和 DTL7 问题上有不错的表现,但在 DTL1,DTL3 和 DTL6 上的综合性能表现稍差;对于 AR+DMO 和 IBEA,虽然它们有较强的收敛能力,但不能有效地保持种群的良好分布,因此,它们的 IGD 指标受到了一些影响;最后,NNIA 在低维情况下表现较好,在目标数较多时未出现性能大幅下滑的情况。

为了直观地反映所有算法得到的最终解集在目标空间中的分布情况,本文将给出各算法最终解集在目标空间中的图形.在目标空间维数大于 3 的情况下,本文将采用平行坐标(parallel coordinates)^[57,58]实现高维数据可视化.限于篇幅,本文只给出了各算法在 3 目标和 6 目标上的最终解集分布。

图 7 直观地反映了各算法得到的最终解集在目标空间中是否均匀,同时也能看出各算法在低维问题上的收敛能力.对于 DTL3 问题,MSOPS 没有收敛,它的最终解集在各目标上的取值都分布在 0~8 之间.就分布性而言,从好到坏的排列依次是 ISEA, ϵ -MOEA, MSOPS, NNIA, AR+DMO, IBEA.

图 8 采用平行坐标,反映了各算法在高维情况下的性能,平行坐标图中的每条折线代表高维空间中的一个点.就收敛性而言,MSOPS 和 NNIA 在 6 维 DTL3 问题上均未收敛,在各目标上的取值范围均远超出[0,1]; ϵ -MOEA 没有完全收敛,在各目标上的取值范围约为[0,1.1];ISEA, IBEA 和 AR+DMO 均已收敛到 DTL3 的 Pareto 最优面.就分布性而言,ISEA, ϵ -MOEA 和 MSOPS 都能得到不错的分布性.值得一提的是,ISEA 和 ϵ -MOEA 的 Pareto 面的规则性较强,因此,这两个算法的平行坐标图中的一些区域看上去是空缺的. IBEA 和 AR+DMO 这两种算法不能很好地维持种群的均匀分布, IBEA 的种群大多都集中在 3 个点上,而 AR+DMO 的所有个体都分布在六维空间中的一个三维投影中。

最后,本文将 ISEA 的时间耗费情况与 NSGA-II 进行对比。

图 9 是两种算法在 DTL3 上单线程运行 1 000 代得到的时间结果,实验独立重复进行 30 次,纵坐标为时间消耗的平均值.可以看出,随着目标个数的增长,两种算法的时间消耗都呈线性增长,只是 ISEA 比 NSGA-II 稍慢.这是因为 ISEA 采用了信息分离技术以及邻域惩罚机制, ISEA 的适应度赋值以及环境选择部分比 NSGA-II 的更加复杂,从而增加了一些时间开销.但是考虑到在 10 目标 DTL3 上运行 1 000 代也仅仅大约需要 3.6s. ISEA 拥有较高的时间效率,能够广泛地应用到高维多目标优化中。

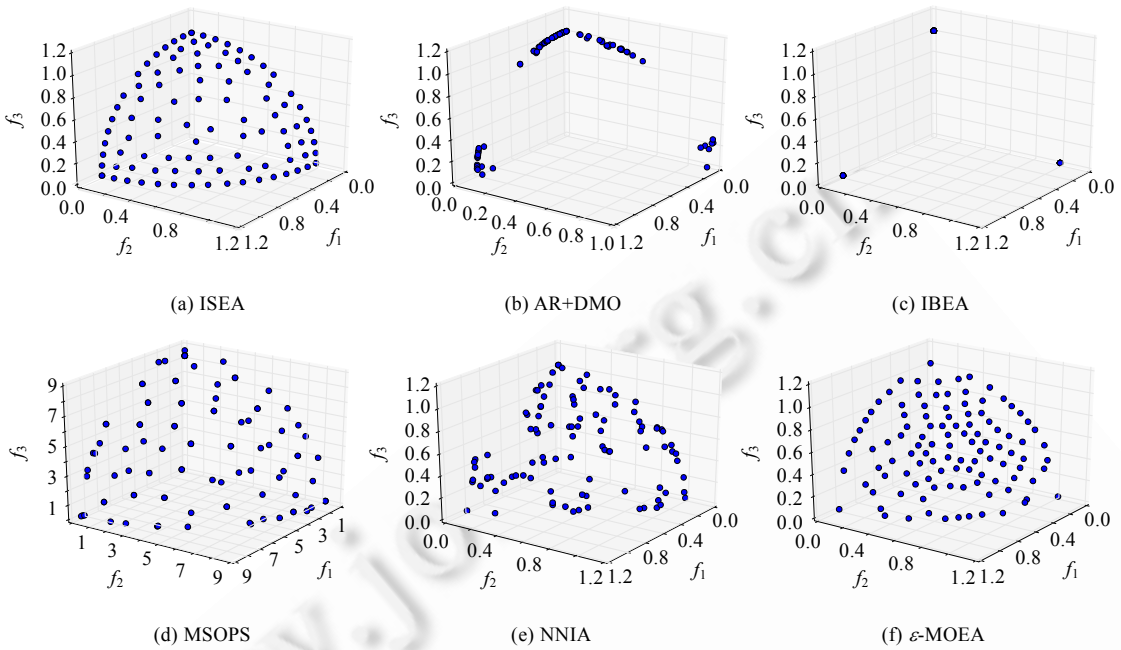


Fig.7 The final solution set of different algorithms on 3-objective DTLZ3 test problem

图 7 各算法在 3 目标 DTLZ3 测试问题上的最终解集

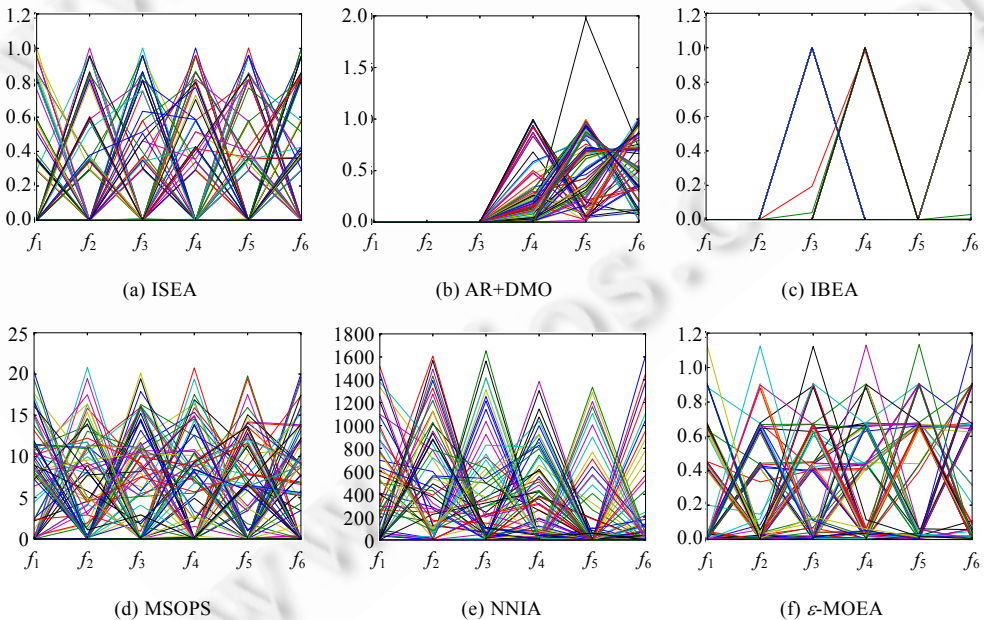


Fig.8 The final solution set of different algorithms on 6-objective DTLZ3 test problem

图 8 各算法在 6 目标 DTLZ3 测试问题上的最终解集

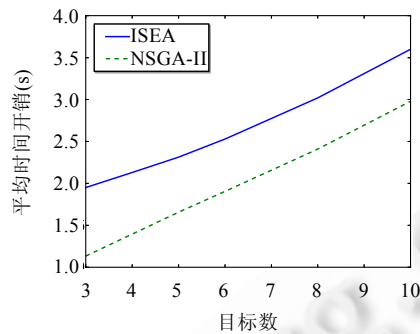


Fig.9 Time requirement of ISEA and NSGA-II on DTLZ3 test problem with different number of objectives

图9 ISEA 和 NSGA-II 在不同目标数的 DTLZ3 问题上的时间开销

5 结束语

本文介绍了一种基于信息分离的高维多目标进化算法 ISEA.它采用坐标系转换的方法分离个体的收敛信息与分布信息.一方面,利用一维旋转坐标增强个体的选择压力,有效区分非支配个体;另一方面,利用其他维旋转坐标保持种群分布性.实验结果表明,ISEA 在 6 个标准测试问题上拥有最佳性能.它不仅能够快速地逼近问题 Pareto 最优面,而且还能很好地兼顾分布广泛性和分布均匀性,同时也拥有较高的时间效率.

最后需要指出的是,ISEA 的性能在一定程度上依赖于角度参数 θ 的设置.参数设置不当,会对算法的分布广泛性造成一定影响.根据种群进化状态自适应地调整角度参数,可能是一种可行的解决办法.另外,需要在更多的测试函数上检验 ISEA 的性能,还可以加入一些实际问题,这也是今后的研究重点.

References:

- [1] Deb K. Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- [2] Zheng JH. Multi-Objective evolutionary algorithms and applications. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese).
- [3] Gong MG, Jiao LC, Yang DD, Ma WP. Research on evolutionary multi-objective optimization algorithms. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2009,20(2):271–289 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3483.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03483]
- [4] Coello CAC, Veldhuizen DAV, Lamont GB. Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems. New York: Kluwer Academic, 2002.
- [5] Coello CAC, Lamont GB. Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms. Singapore: World Scientific Publisher, 2004.
- [6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, Meyarivan T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2002,6(2):182–197. [doi: 10.1109/4235.996017]
- [7] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization. In: Proc. of the Evolutionary Methods for Design, Optimisation, and Control. Barcelona: CIMNE, 2002. 95–100.
- [8] Shi C, Li QY, Shi ZZ. A quick multi-objective evolutionary algorithm based on dominating tree. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2007,18(3):505–516 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/505.htm> [doi: 10.1360/jos180505]
- [9] Li MQ, Yang SX, Zheng JH, Liu XH. ETEA: A euclidean minimum spanning tree-based evolutionary algorithm for multiobjective optimization. Evolutionary Computation, 2014,22(2):189–230. [doi: 10.1162/EVCO_a_00106]
- [10] Farina M, Amato P. On the optimal solution definition for many-criteria optimization problems. In: Proc. of the Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society. IEEE, 2002. 233–238. [doi: 10.1109/NAFIPS.2002.1018061]

- [11] Ishibuchi H, Tsukamoto N, Nojima Y. Evolutionary many-objective optimization: A short review. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2008. 2424–2431. [doi: 10.1109/CEC.2008.4631121]
- [12] Yang SX, Li MQ, Liu XH, Zheng JH. A grid-based evolutionary algorithm for many-objective optimization. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2013,17(5):721–736. [doi: 10.1109/TEVC.2012.2227145]
- [13] Li MQ, Yang SX, Liu XH. A test problem for visual investigation of high-dimensional multi-objective search. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2014. [doi: 10.1109/CEC.2014.6900306]
- [14] Adra SF, Fleming PJ. A diversity management operator for evolutionary many-objective optimisation. In: Proc. of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag, 2009. 81–94. [doi: 10.1007/978-3-642-01020-0_11]
- [15] Wagner T, Beume N, Naujoks B. Pareto-, aggregation-, and indicator-based methods in many-objective optimization. In: Proc. of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag, 2007. 742–756. [doi: 10.1007/978-3-540-70928-2_56]
- [16] Li MQ, Yang SX, Liu XH. Shift-Based density estimation for Pareto-based algorithms in many-objective optimization. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2014,18(3):348–365. [doi: 10.1109/TEVC.2013.2262178]
- [17] Hughes EJ. Fitness assignment methods for many-objective problems. In: Knowles J, *et al.*, eds. Proc. of the Multiobjective Problem Solving from Nature. Springer-Verlag, 2008. 307–329. [doi: 10.1007/978-3-540-72964-8_15]
- [18] Purshouse RC, Fleming PJ. On the evolutionary optimization of many conflicting objectives. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2007,11(6):770–784. [doi: 10.1109/TEVC.2007.910138]
- [19] Li MQ, Yang SX, Liu XH, Shen RM. A comparative study on evolutionary algorithms for many-objective optimization. In: Proc. of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag, 2013. 261–275. [doi: 10.1007/978-3-642-37140-0_22]
- [20] Purshouse RC, Fleming PJ. Evolutionary many-objective optimization: An exploratory analysis. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2003. 2066–2073. [doi: 10.1109/CEC.2003.1299927]
- [21] Hughes EJ. Evolutionary many-objective optimisation: Many once or one many? In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2005. 222–227. [doi: 10.1109/CEC.2005.1554688]
- [22] Hajela P, Lin CY. Genetic search strategies in multicriterion optimal design. Structural and Multidisciplinary Optimization, 1992,4(2):99–107. [doi: 10.1007/BF01759923]
- [23] Schaffer JD. Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. In: Proc. of the 1st Int'l Conf. on Genetic Algorithms. Lawrence Erlbaum Associates, 1985. 93–100.
- [24] Corne DW, Knowles JD. Techniques for highly multiobjective optimisation: Some nondominated points are better than others. In: Proc. of the Genetic and Evolutionary Computation Conf. ACM, 2007. 773–780. [doi: 10.1145/1276958.1277115]
- [25] Knowles JD, Corne DW. Quantifying the effects of objective space dimension in evolutionary multiobjective optimization. In: Proc. of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag, 2007. 757–771. [doi: 10.1007/978-3-540-70928-2_57]
- [26] Mostaghim S, Schmeck H. Distance based ranking in many-objective particle swarm optimization. In: Proc. of the Parallel Problem Solving from Nature. Springer-Verlag, 2008. 753–762. [doi: 10.1007/978-3-540-87700-4_75]
- [27] Hughes EJ. Radar waveform optimisation as a many-objective application benchmark. In: Proc. of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag, 2007. 700–714. [doi: 10.1007/978-3-540-70928-2_53]
- [28] Di Pierro F. Many-Objective evolutionary algorithms and applications to water resources engineering [Ph.D. Thesis]. School of Engineering, Computer Science and Mathematics, University of Exeter, 2006.
- [29] Reed PM, Kollat JB. Save now, pay later? Multi-period many-objective groundwater monitoring design given systematic model errors and uncertainty. Advances in Water Resources, 2012,35:55–68. [doi: 10.1016/j.advwatres.2011.10.011]
- [30] Herrero JG, Berlanga A, López JMM. Effective evolutionary algorithms for many-specifications attainment: Application to air traffic control tracking filters. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2009,13(1):151–168. [doi: 10.1109/TEVC.2008.920677]
- [31] Jaimes AL, Montaña AA, Coello CAC. Preference incorporation to solve many-objective airfoil design problems. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. IEEE, 2011. 1605–1612. [doi: 10.1109/CEC.2011.5949807]
- [32] Sülflow A, Drechsler N, Drechsler R. Robust multi-objective optimization in high dimensional spaces. In: Proc. of the Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Springer-Verlag, 2007. [doi: 10.1007/978-3-540-70928-2_54]
- [33] Saxena DK, Duro JA, Tiwari A, Deb K, Zhang QF. Objective reduction in many-objective optimization: Linear and nonlinear algorithms. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2013,17(1):77–99.

- [34] Deb K, Jain H. An evolutionary many-objective optimization algorithm using reference-point based non-dominated sorting approach, Part I: Solving problems with box constraints. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2013,18(4):577–601. [doi: 10.1109/TEVC.2013.2281535]
- [35] Bentley PJ, Wakefield JP. Finding acceptable Pareto-optimal solutions using multiobjective genetic algorithms. *Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing*, 1997,5:231–240. [doi: 10.1007/978-1-4471-0427-8_25]
- [36] Zitzler E, Künzli S. Indicator-Based selection in multiobjective search. In: *Proc. of the Parallel Problem Solving from Nature*. Springer-Verlag, 2004. 832–842. [doi: 10.1007/978-3-540-30217-9_84]
- [37] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 2007,181(3):1653–1669. [doi: 10.1016/j.ejor.2006.08.008]
- [38] Jaimes AL, Coello CAC. Study of preference relations in many-objective optimization. In: *Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. IEEE, 2009. 611–618. [doi: 10.1145/1569901.1569986]
- [39] Li MQ, Zheng JH, Li K, Yuan QZ, Shen RM. Enhancing diversity for average ranking method in evolutionary many-objective optimization. In: *Proc. of the Parallel Problem Solving from Nature*. Springer-Verlag, 2010. 647–656. [doi: 10.1007/978-3-642-15844-5_65]
- [40] Karahan I, Köksalan M. A territory defining multiobjective evolutionary algorithms and preference incorporation. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2010,14(4):636–664. [doi: 10.1109/TEVC.2009.2033586]
- [41] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1):45–76. [doi: 10.1162/EVCO_a_00009]
- [42] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization. In: Abraham A, *et al.*, eds. *Proc. of the Evolutionary Multiobjective Optimization*. Springer-Verlag, 2005. 105–145. [doi: 10.1007/1-84628-137-7_6]
- [43] Sato H, Aguirre HE, Tanaka K. Controlling dominance area of solutions and its impact on the performance of MOEAs. In: *Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. IEEE, 2007. 5–20. [doi: 10.1007/978-3-540-70928-2_5]
- [44] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—A comparative case study. In: *Proc. of the Parallel Problem Solving from Nature*. Springer-Verlag, 1998. 292–301. [doi: 10.1007/BFb0056872]
- [45] Zitzler E. *Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: Methods and applications* [Ph.D. Thesis]. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Swiss Federal Institute of Technology, 1999.
- [46] Zheng JH, Jiang H, Kuang D, Shi ZZ. An approach of constructing multi-objective Pareto solutions using arena's principle. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2007,18(6):1287–1297 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/1287.htm> [doi: 10.1360/jos181287]
- [47] Gong MG, Jiao LC, Du HF, Bo LF. Multiobjective immune algorithm with nondominated neighbor-based selection. *Evolutionary Computation*, 2008,16(2):225–255. [doi: 10.1162/evco.2008.16.2.225]
- [48] Deb K, Mohan M, Mishra S. Evaluating the ϵ -domination based multi-objective evolutionary algorithm for a quick computation of Pareto-optimal solutions. *Evolutionary Computation*, 2005,13(4):501–525. [doi: 10.1162/106365605774666895]
- [49] Huband S, Hingston P, Barone L, While L. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2006,10(5):477–506. [doi: 10.1109/TEVC.2005.861417]
- [50] Li MQ, Yang SX, Liu XH. Diversity comparison of Pareto front approximations in many-objective optimization. *IEEE Trans. on Cybernetics*, 2014,44(12):2568–2584. [doi: 10.1109/TCYB.2014.2310651]
- [51] Veldhuizen DAV, Lamont GB. *Evolutionary computation and convergence to a Pareto front*. In: *Proc. of the Late Breaking Papers at the Genetic Programming*. Madison: Stanford University Bookstore, 1998. 221–228.
- [52] Bosman PAN, Thierens D. The balance between proximity and diversity in multi-objective evolutionary algorithms. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2003,7(2):174–188. [doi: 10.1109/TEVC.2003.810761]
- [53] Deb K, Jain S. Running performance metrics for evolutionary multi-objective optimization. In: *Proc. of the Asia-Pacific Conf. on Simulated Evolution and Learning*. Singapore City: Orchid Country Club, 2002. 13–20.
- [54] Glaser RE. Levene's robust test of homogeneity of variances. In: *Proc. of the Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol.4. New York: Wiley, 1983. 608–610.
- [55] Tukey JW. A quick, compact, two-sample test to Duckworth's specifications. *Technometrics*, 1959,1(1):31–48.

- [56] Tamhane AC. Multiple comparisons in model I one-way ANOVA with unequal variances. *Communications in Statistics*, 1977,A6(1):15–32. [doi: 10.1080/03610927708827466]
- [57] Inselberg A. The plane with parallel coordinates. *The Visual Computer*, 1985,1(4):69–91. [doi: 10.1007/BF01898350]
- [58] Inselberg A, Dimsdale B. Parallel coordinates: A tool for visualizing multi-dimensional geometry. In: *Proc. of the IEEE Conf. on Visualization*. IEEE, 1990. 361–378. [doi: 10.1109/VISUAL.1990.146402]

附中文参考文献:

- [2] 郑金华. 多目标进化算法及其应用. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] 公茂果, 焦李成, 杨咚咚, 马文萍. 进化多目标优化算法研究. *软件学报*, 2009, 20(2): 271–289. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3483.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03483]
- [8] 石川, 李清勇, 史忠植. 一种快速的基于占优树的多目标进化算法. *软件学报*, 2007, 18(3): 505–516. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/505.htm> [doi: 10.1360/jos 180505]
- [46] 郑金华, 蒋浩, 邝达, 史忠植. 擂台赛法则构造多目标 Pareto 最优解集的方法研究. *软件学报*, 2007, 18(6): 1287–1297. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/1287.htm> [doi: 10.1360/jos181287]



郑金华(1963—),男,湖南邵东人,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为多目标进化计算,鲁棒优化,进化算法的实际应用.



申瑞珉(1987—),男,博士生,主要研究领域为高维多目标进化优化,基于搜索的软件工程.



李密青(1981—),男,博士生,主要研究领域为高维多目标优化.



邹娟(1977—),女,博士生,副教授,CCF 会员,主要研究领域为高维多目标进化优化.