

基于 Cayley 图的三维六度环面网络研究*

张震¹, 肖文俊², 黄书强³

¹(暨南大学 计算机科学与技术系, 广东 广州 510632)

²(华南理工大学 软件学院, 广东 广州 510641)

³(暨南大学 网络与教育技术中心, 广东 广州 510632)

通讯作者: 张震, E-mail: zzhang@jnu.edu.cn, http://www.jnu.edu.cn

摘要: 提出了一种三维六度环面 Cayley 图网络模型. 针对该网络模型, 给出了一种简单的三维节点编址方案, 并利用该编址方案得到了任意两个节点间的最短距离公式; 开发了一种简单的分布式最优路由算法, 该算法可以运行于网络中的任意节点, 可以建立任意两点间的最短路由路径; 基于陪集图(coset graph)理论, 给出了一种新型的广播通信算法, 并对该算法的效率进行了分析; 给出了三维六度环面网络模型直径的界限值.

关键词: 互连网络; Cayley 图; 六度环面网络; 两点间最短距离; 通信算法; 网络直径
中图法分类号: TP301

中文引用格式: 张震, 肖文俊, 黄书强. 基于 Cayley 图的三维六度环面网络研究. 软件学报, 2015, 26(7): 1584-1600. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4588.htm>

英文引用格式: Zhang Z, Xiao WJ, Huang SQ. Research on 3D hexagonal torus based on Cayley graph. Ruan Jian Xue Bao/ Journal of Software, 2015, 26(7): 1584-1600 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4588.htm>

Research on 3D Hexagonal Torus Based on Cayley Graph

ZHANG Zhen¹, XIAO Wen-Jun², HUANG Shu-Qiang³

¹(Department of Computer Science and Technology, Ji'nan University, Guangzhou 510632, China)

²(School of Software Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

³(Network and Educational Technology Center, Ji'nan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: The 3D hexagonal torus is presented as a natural extension of the hexagonal torus. Hexagonal tori are proved to be a type of Cayley graph. This paper develops a new type of 3D hexagonal torus based on Cayley graph. An addressing scheme for this type of network is developed. Based on this addressing scheme, the distance formula between any two nodes is derived. Then, a distributed optimal routing algorithm is developed. This distributed routing algorithm is optimal, which means it can be executed on any node in the network to construct a shortest path between any pair of nodes. A broadcasting algorithm is also presented according to the coset graph theory. The upper bound and lower bound of the diameter are also proposed in this paper.

Key words: interconnection network; Cayley graph; hexagonal torus; internode distance; communication algorithm; diameter

互连网络是并行与分布式处理系统领域中的一个非常重要的研究分支. 一般地, 一个优良的互连网络模型应该具有如下的拓扑性质: 高对称性、低度、低直径、良好的嵌入性等等. 很多具有良好拓扑特性的互连网络结构被提了出来, 如: 超立方(hypercube)^[1]、CCC(cube-connected cycles)^[2]网络和星图(star graph)^[3]等等.

若将平面以相同类型的正多边形进行镶嵌, 那么可以采用的正多边形只有正三角形、正方形和正六边形.

* 基金项目: 国家自然科学基金(60973150, 61272073, 61373125, 61170313, 61103037, 61370003); 国家高技术研究发展计划(863)(2013AA040404); 广东省自然科学基金(2014A030313386); 广东省教育厅科技创新项目(2013KJX0018); 暨南大学科研培育与创新基金(21615439, 21615443)

收稿时间: 2012-06-13; 定稿时间: 2014-01-26

由此 3 种方法构造的互连网络被称为网孔网络,分别被称为蜂巢网孔、方形网孔和六度网孔。网孔网络并不是一种正规网络,该网络中边缘节点与内部节点的度不相等。而很多应用需要网络具有正规性,即,网络中所有节点的度是相等的,这样,网络中的所有节点可以运行统一的软件或者协议。通过对网孔网络边缘节点加入环绕边就形成了环面网络。环面网络以其正规性和完美而紧凑的结构布局在实际应用中,显示出更多的优势,有着广泛的应用范围。

随着研究的不断深入,越来越多的环面网络结构被提了出来。Stojmenovic 等人在文献[4]中提出了两种蜂巢环面网络模型——方形蜂巢环面和钻石形蜂巢环面,并给出了这些网络的节点编址方案、路由和组播等通信算法。Cho 等人在文献[5]中提出了一种生成的蜂巢环面网络 GHT(*generalized honeycomb torus*),并指出文献[4]中提出的 3 种蜂巢环面模型均为 GHT 的特例。Megson 等人验证了蜂巢环面可以嵌入 Hamilton 圈^[6]。陈贵海等人通过对环面网络进行剪枝,从而得到了三度的墙式环面,该网络模型的拓扑结构与方形蜂巢环面非常相似^[7]。基于文献[7],陈协彬提出了更高维的墙式环面结构,并对其拓扑性质进行了分析^[8]。环面在文献[7,8]中也被称为网托。Parhami 等人验证了文献[4]中的方形蜂巢网络是方形环面网络的剪枝网络^[9]。Camara 等人在文献[10]中提出了一种基于高斯数的扭曲环面网络模型,该网络结构除了点对称(*vertex transitive*)之外,还具有边对称性(*edge transitive*)。Stewart 找到了一种新的对环面进行剪枝的方法,从而得到了一种新型的三度环面网络结构,该网络具有良好的拓扑特性^[11]。

六度网孔网络(*hexagonal mesh*)和六度环面网络(*hexagonal torus*)在化学、计算机图形学和蜂巢移动通信等领域都得到了十分广泛的应用^[12-14]。六度环绕网络是正规的,每个节点的度为 6。在六度环面网络中,对节点建立地址编码方案是研究其拓扑性质的前提。Chen 等人在文献[15]中提出了一种基于三维坐标系的节点编址方法,即,网络中每个节点由一个三元组表示,根据该编址方法,提出了路由算法和广播算法。Carle 等人对文献[15]中的编址方法作了一定的改进,他们建立了夹角为 120° 的二维坐标系,并提出了新的路由算法^[16]。Nocetti 等人建立了夹角为 120° 的三维坐标系,不过,该编址方案中节点的地址不唯一,即,每个节点可以有多个不同的地址,路由算法需要对节点地址进行预先处理^[12]。在通信吞吐量方面,乐祖晖等人给出了精确求解六度环面网络等分带宽的方法^[17]。

Cayley 图是利用群来建立图的一种数学方法。Cayley 图具有点传递性^[3,18,19],即,Cayley 图中任意两个节点的路由可以转换为从其他节点到单位元节点的路由。由于具有良好的对称性,基于 Cayley 图建立互连网络模型成为并行与分布式处理领域的一个研究热点。很多已知的互连网络模型都是 Cayley 图,如 Hypercube,CCC 和 Star Graph 等等。Alspach 等人在文献[20]中给出了蜂巢环面的一种 Cayley 图定义方法。Xiao 等人验证了六度网孔、六度环面和蜂巢网络都属于 Cayley 图,并给出了其 Cayley 图的定义方法^[21,22]。针对 Xiao 等人提出的六度环面网络模型的未解问题,张震等人在文献[23]中给出了最优路由和广播等通信算法,并且计算了该网络模型直径的确切值。

三维以及更高维环面是二维环面的自然性扩展,适合构建规模更大、更为复杂的互连网络结构。Seo 提出了一种三维 Petersen 环面,并对其拓扑特性进行分析^[24]。在应用方面:超级计算机——K Computer,其处理器采用的互连网络结构为六度环面网络^[25];APEnet+采用三维环面作为其 GPU 互连网络的体系结构^[26]。研究表明:在同等网络规模下,六度环面比蜂巢环面和方形环面具有更高的等分带宽,在具体部署时,能够保障等分带宽随着节点数目的增加而增加^[27]。因此,三维以及更高维的六度环面在构造大吞吐量互连网络的应用方面具有更大的优势,如超级计算机、Ad Hoc 网络、P2P 网络。在高维六度网络方面,Decayeux 等人提出了三维六度网孔网络模型^[28],并给出了该网络模型的路由算法。García 等人提出了更高维的六度网孔网络模型,给出了节点编码方法,并开发了路由算法和广播算法^[29]。目前,基于 Cayley 图的高维的六度环面网络模型还没有相关的研究成果出现。

本文提出一种新型的三维六度环面网络模型,并针对该网络模型提出一种节点编址方法,利用该编址方法提出一种简单的路由算法。该算法是分布式的,可以运行于网络中的任意一个节点,建立任意两点间的最短通信路径。利用陪集图理论,引入一种基于陪集图理论的一对多广播算法,并对该算法的效率进行分析。针对直径问题,本文给出该网络模型直径的界限值。

1 基于 Cayley 图的六度网络

本节将给出六度网孔和六度环面网络的 Cayley 图定义方法和一些重要的结论.

1.1 六度网孔网络和六度环面网络

定义 1. $G=Z \times Z$, 其中, Z 是无限整数群, 构造 Cayley 图 $\Gamma=Cay(G,S)$, 其中, $S=\{(\pm 1,0),(0,\pm 1),(1,1),(-1,-1)\}$.

定义 1 中的 Cayley 图 Γ 与六度网孔网络是同构的^[4,30].

图 1 为六度网孔网络的一小部分显示, 其中, $(0,0)$ 是单位元节点.

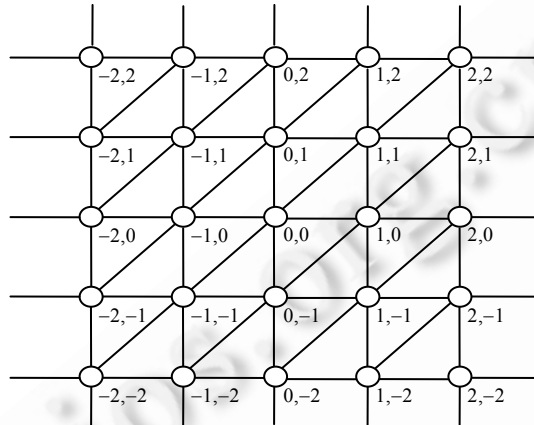


Fig.1 Hexagonal mesh network

图 1 六度网孔网络

文献[21]给出了六度网孔网络中两个节点的距离以及两点之间的路由算法. 这里, $dis_{\Gamma}(p_1, p_2)$ 表示网络 Γ 中节点 p_1 和 p_2 间的最短距离.

引理 1. 六度网孔网络 Γ 中的节点 $(0,0)$ 与节点 (a,b) :

- 如果 a, b 同号, 则 $dis_{\Gamma}((0,0), (a,b)) = \max(|a|, |b|)$;
- 否则, $dis_{\Gamma}((0,0), (a,b)) = |a| + |b|$.

证明: 见文献[21].

□

由于 Cayley 图具有点传递性, 因此,

$$dis_{\Gamma}((a,b), (c,d)) = dis_{\Gamma}((0,0), (c-a, d-b)).$$

根据引理 1, 可以得到任意两点之间的最短路径. 由于 Z 是无限整数群, 所以定义 1 中的六度网孔网络模型是无限大的. 如果要得到一个有限大小的正规六度网络, 就必须对边界节点加入环面边, 即构成六度环面网络. 定义 2 给出了一种构造六度环面网络的 Cayley 图方法.

定义 2. $G=Z_l \times Z_k$, 其中, Z_l 和 Z_k 分别为模 l 和模 k 的循环群, 其中, l 和 k 均大于 0, $S=\{(\pm 1,0),(0,\pm 1),(1,1),(-1,-1)\}$, Cayley 图 $\Gamma=Cay(G,S)$ 为 $l \times k$ 序的六度环面网络, 记为 $H_{l \times k}$.

图 2 为六度环面网络 $H_{5 \times 5}$.

根据引理 1 的结论, 文献[22]给出了六度环面网络中两点间最短距离.

引理 2. 对于六度环面网络 $\Gamma=H_{l \times k}$, 节点 (a,b) , 其中, $l > a \geq 0, k > b \geq 0$, 可以得到:

$$dis_{\Gamma}((0,0), (a,b)) = \min(\max(a,b), \max(l-a, k-b), l-a+b, k+a-b).$$

证明: 见文献[22].

□

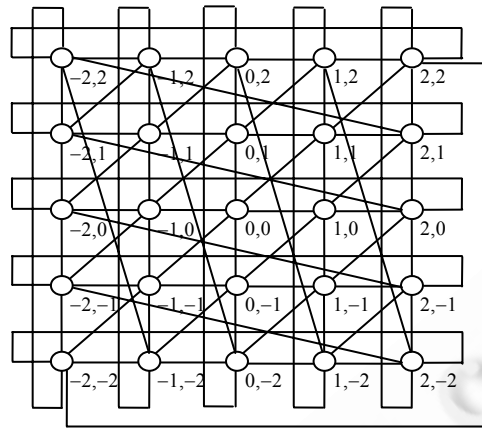


Fig.2 Hexagonal torus $H_{5 \times 5}$

图 2 六度环面网络 $H_{5 \times 5}$

1.2 六度环面网络路由算法

针对六度环面网络,文献[23]建立一个由 x 轴和 y 轴构成的二维坐标系,用来对六度环面网络中的节点进行编址. $H_{9 \times 5}$ 的编址如图 3 所示,其中 $(0,0)$ 为单位元节点.利用该编址方法,文献[23]给出一种分布式的最优路由算法 *Route*.

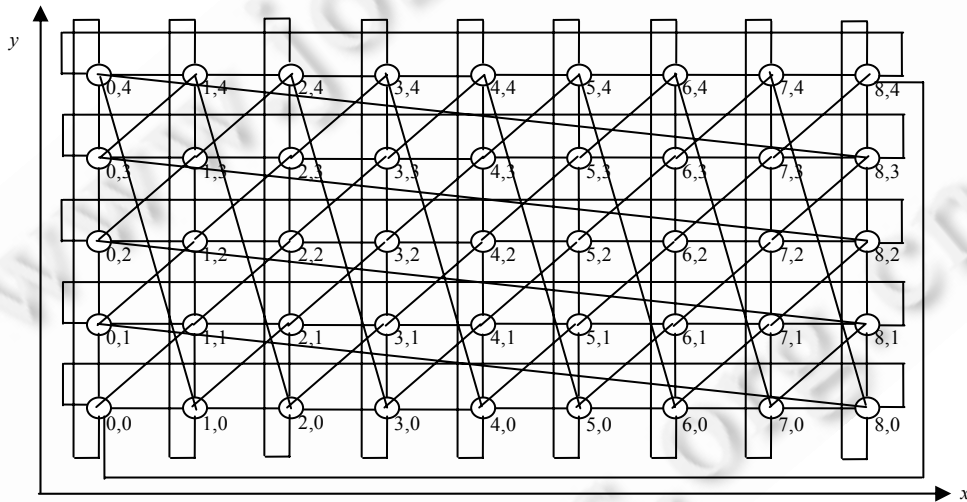


Fig.3 Hexagonal torus $H_{9 \times 5}$

图 3 六度环面网络 $H_{9 \times 5}$

```

Route(p=(a,b))
{compute  $d=dis_r((0,0),(a,b))$ ;
  if  $d=0$  then success;
  if  $d=\max(a,b)$  then
    {if  $a>b$  then
      ( $a',b'$ )=( $a-1,b$ );
      if  $a=b$  then
        ( $a',b'$ )=( $a-1,b-1$ );
      if  $a<b$  then
    
```

```

    (a',b')=(a,b-1);
  }
  if d=max(l-a,k-b) then
    {if l-a>k-b then
      (a',b')=(a+1,b);
      if l-a=k-b then
        (a',b')=(a+1,b+1);
      if l-a<k-b then
        (a',b')=(a,b+1);
    }
  if d=l-a+b then
    {if b>0 then
      (a',b')=(a,b-1);
      if b=0 then
        (a',b')=(a+1,b);
    }
  if d=k-b+a then
    {if a>0 then
      (a',b')=(a-1,b);
      if a=0 then
        (a',b')=(a,b+1);
    }
  }
}

```

对于六度环面网络 Γ 中的任意节点 $p=(a,b)$, 算法 *Route* 首先计算 $d=dis_{\Gamma}((0,0),(a,b))$: 若 $d=0$, 即 $(a,b)=(0,0)$, 算法结束; 否则, 算法 *Route* 返回节点 p 的一个邻居节点 $p'=(a',b')$, p' 是 p 到单位元节点 $(0,0)$ 的最短路由上的下一个节点.

定理 1. 算法 *Route*(p) 是最优的, 可以得到两点之间的最短路由路径.

证明: 见文献[23]. □

1.3 六度环面网络的直径

由于 $H_{l \times k}$ 和 $H_{k \times l}$ 是同构的, 所以只考虑 $l \geq k$ 的情况. 根据引理 2 中的两点间最短距离公式, 文献[23]将六度环面网络划分为若干个区域, 在每个区域中, 找到与单位元节点具有最大的两点间最短距离的节点 v , 并记录下该距离. 当考察完所有的区域后, 最大距离值就是六度环面网络的直径. 这里, $D(\Gamma)$ 表示图 Γ 的直径.

定理 2. 对于任意的六度环面网络 $H_{l \times k}$, 其中, $l \geq k$, 有:

$$D(H_{l \times k}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor, & \text{当 } l = k = n \text{ 时} \\ \left\lfloor \frac{l+k}{3} \right\rfloor, & \text{当 } k < l < 2k-3 \text{ 时} \\ k-1, & \text{当 } 2k-3 \leq l < 2k \text{ 时} \\ k, & \text{当 } l = 2k \text{ 时} \\ \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor, & \text{当 } l > 2k \text{ 时} \end{cases}$$

证明: 见文献[23]. □

2 三维六度环面网络

本节将给出三维六度网孔和六度环面网络的 Cayley 图的定义方法,并对这两种网络结构的拓扑特性进行分析.

2.1 三维六度网孔网络

定义 3. $G=Z \times Z \times Z$,其中 Z 是无限整数群,构造 Cayley 图 $\Gamma=Cay(G,S)$,其中 $S=\{(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0),(0,0,\pm 1),(1,1,0),(-1,-1,0),(1,0,1),(-1,0,-1),(0,1,1),(0,-1,-1)\}$,则图 Γ 为三维六度环面网孔网络.

当 $abc=0$ 时,即 a,b,c 中至少有一个为 0 时, Γ 中节点 $(0,0,0)$ 和 (a,b,c) 之间的最短距离可以采用引理 1 中的二维六度网孔中的两点间最短距离公式计算.这里只考虑 $abc \neq 0$ 的情况.

引理 3. 对于三维六度网孔 Γ 的节点 (a,b,c) ,满足 $abc \neq 0$ 时,有:

$$dis((0,0,0),(a,b,c)) = \begin{cases} \max(a,b,c), & \text{若 } a > 0, b > 0, c > 0, \max(a,b,c) \geq \frac{a+b+c}{2} \\ \lceil \frac{a+b+c}{2} \rceil, & \text{若 } a > 0, b > 0, c > 0, \max(a,b,c) < \frac{a+b+c}{2} \\ \max(|a|, |b|, |c|), & \text{若 } a < 0, b < 0, c < 0, \max(|a|, |b|, |c|) \geq \frac{|a|+|b|+|c|}{2} \\ \lceil \frac{|a|+|b|+|c|}{2} \rceil, & \text{若 } a < 0, b < 0, c < 0, \max(|a|, |b|, |c|) < \frac{|a|+|b|+|c|}{2} \\ \max(a,b)+|c|, & \text{若 } a > 0, b > 0, c < 0 \\ \max(|b|, |c|)+a, & \text{若 } a > 0, b < 0, c < 0 \\ \max(a,c)+|b|, & \text{若 } a > 0, b < 0, c > 0 \\ \max(b,c)+|a|, & \text{若 } a < 0, b > 0, c > 0 \\ \max(|a|, |c|)+b, & \text{若 } a < 0, b > 0, c < 0 \\ \max(|a|, |b|)+c, & \text{若 } a < 0, b < 0, c > 0 \end{cases}$$

相应的证明见附录.

2.2 三维六度环面网络

2.2.1 定义及两点间最短距离公式

定义 4. $G=Z_l \times Z_k \times Z_m$,其中 Z_l, Z_k 和 Z_m 分别为模 l 、模 k 和模 m 的循环群,其中 l, k 和 m 均大于 0, $S=\{(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0),(0,0,\pm 1),(1,1,0),(-1,-1,0),(1,0,1),(-1,0,-1),(0,1,1),(0,-1,-1)\}$,Cayley 图 $\Gamma=Cay(G,S)$ 为 $l \times k \times m$ 序的三维六度环面网络,记为 $H_{l \times k \times m}$.

针对三维六度环面网络,本文建立一个由 x 轴、 y 轴和 z 轴构成的三维坐标系,用来对三维六度环面网络中的节点进行编址. $H_{5 \times 5 \times 5}$ 的编址如图 4 所示,为了避免混乱,这里没有画出环绕边.

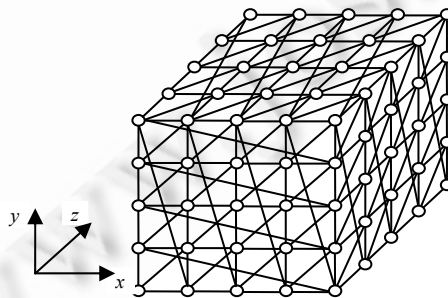


Fig.4 3D hexagonal torus $H_{5 \times 5 \times 5}$

图 4 三维六度环面网络 $H_{5 \times 5 \times 5}$

可以得到如下三维六度环面网络的两点间最短距离公式:

引理 4. 对于 $H_{l \times k \times m}$ 中的节点 (a, b, c) , 其中, $l > a > 0, k > b > 0, m > c > 0$, 有:

1. 若 $\max(a, b, c) \geq \frac{a+b+c}{2}, \max(l-a, k-b, m-c) \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 则有:

$$\text{dis}((0,0,0), (a,b,c)) = \min(\max(a,b,c), \max(l-a, k-b, m-c), \max(b,c) + l - a, \max(a,c) + k - b, \max(a,b) + m - c, \max(k-b, m-c) + a, \max(l-a, m-c) + b, \max(l-a, k-b) + c);$$

2. 若 $\max(a, b, c) < \frac{a+b+c}{2}, \max(l-a, k-b, m-c) \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 则有:

$$\text{dis}((0,0,0), (a,b,c)) = \min\left(\left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil, \max(l-a, k-b, m-c), \max(b,c) + l - a, \max(a,c) + k - b, \max(a,b) + m - c, \max(k-b, m-c) + a, \max(l-a, m-c) + b, \max(l-a, k-b) + c\right);$$

3. 若 $\max(a, b, c) \geq \frac{a+b+c}{2}, \max(l-a, k-b, m-c) < \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 则有:

$$\text{dis}((0,0,0), (a,b,c)) = \min\left(\max(a,b,c), \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil, \max(b,c) + l - a, \max(a,c) + k - b, \max(a,b) + m - c, \max(k-b, m-c) + a, \max(l-a, m-c) + b, \max(l-a, k-b) + c\right);$$

4. 若 $\max(a, b, c) < \frac{a+b+c}{2}, \max(l-a, k-b, m-c) < \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 则有:

$$\text{dis}((0,0,0), (a,b,c)) = \min\left(\left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil, \max(b,c) + l - a, \max(a,c) + k - b, \max(a,b) + m - c, \max(k-b, m-c) + a, \max(l-a, m-c) + b, \max(l-a, k-b) + c\right).$$

相应的证明见附录.

2.2.2 最优路由算法

根据引理 4, 本文给出了三维六度环面网络路由算法 $Route_3D(p=(a,b,c))$, 该算法能够决定从节点 p 到单位元节点 $e=(0,0,0)$ 的最短路径上的下一个节点 $p'=(a',b',c')$. 当 $abc=0$ 时, 路由算法 $Route_3D$ 可以调用六度环面网络最优路由算法 $Route$.

$Route_3D(p=(a,b,c))$

{compute $d=\text{dis}((0,0,0), (a,b,c))$;

if $d=0$ then success;

if $abc=0$ then

{if $a=0$ then

{ $a'=0; (b',c')=Route(b,c)$;

if $b=0$ then

{ $b'=0; (a',c')=Route(a,c)$;

if $c=0$ then

{ $c'=0; (a',b')=Route(a,b)$;

}

if $d=\max(a,b,c)$ or $d = \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil$ then

$(a',b',c')=\text{reduce}(a,b,c)$;

```

if  $d=\max(l-a,k-b,m-c)$  or  $d = \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil$  then
     $(a',b',c')=add(a,b,c);$ 
if  $d=\max(b,c)+l-a$  then
     $(a',b',c')=(a,b-1,c-1);$ 
if  $d=\max(a,c)+k-b$  then
     $(a',b',c')=(a-1,b,c-1);$ 
if  $d=\max(a,b)+m-c$  then
     $(a',b',c')=(a-1,b-1,c);$ 
if  $d=\max(l-a,m-c)+b$  then
     $(a',b',c')=(a+1,b,c+1);$ 
if  $d=\max(k-b,m-c)+a$  then
     $(a',b',c')=(a,b+1,c+1);$ 
if  $d=\max(l-a,k-b)+c$  then
     $(a',b',c')=(a+1,b+1,c);$ 
}

```

算法中函数 *reduce* 和 *add* 的定义如下:

- *reduce*(a,b,c): a,b 和 c 中的最大值和最小值同时减 1;
- *add*(a,b,c): a,b 和 c 中的最大值和最小值同时加 1.

定理 3. 路由算法 *Route_3D* 是最优的,可以建立任意两点间的最短路由.

相应的证明见附录.

2.2.3 广播算法

广播是一种常见的通信操作,即将信息从一个处理机发送给网络中所有其他的处理机.本文只考察消耗固定时间的通信模式,即,信息传输消耗一个单位时间.信息传送模式为存储-转发模式,即,处理机接收到完整信息之后才可以将信息转发给其他处理机.

对于给定的网络 Γ , u 是发起广播通信的节点,将信息发送给网络中的其他所有节点.设 $b(u)$ 表示 u 完成广播通信所消耗的时间, $b(\Gamma)$ 表示 Γ 中任意节点发起并完成广播通信所消耗的最大时间,显然:

$$b(\Gamma)=\max\{b(u)|u\in V(\Gamma)\}.$$

在文献[31]中,Xiao 等人利用陪集图思想给出了任意 Cayley 图 Γ 中 $b(\Gamma)$ 的上限,得到定理 4.为了叙述广播算法的原理,本文给出了该定理的证明过程.

定理 4. G 为一个有限群,且 K 为 G 的一个子群, S 为 G 的一个生成元集合,可以得到 Cayley 图 $\Gamma=Cay(G,S)$ 和陪集图 $\Delta=Cos(G,K,S)$,则 $b(\Gamma)\leq b(\Delta)+b(\Gamma_K)$.

证明:为了不失一般性,假定单位元节点是发起广播通信的源点.

首先,单位元节点 e 在通信模式 M 下将信息广播给节点集 K ,其消耗的最小时间为 $b_M(\Gamma_K)$.对于子群 K 的两个陪集 K 和 Ks ,其中, $s\in S\setminus K$,则 $(k,ks)\in E(\Gamma)$ 中的一条边,这里, $k\in K$.那么,对于 $k,k_1\in K,s\in S\setminus K$, (k,ks) 和 (k_1,k_1s) 是 Γ 中的两条平行边,即,节点集 K 中所有节点将信息发送给节点集合 Ks 消耗一个单位时间.设 Ku 是群 G 的任意一个陪集,假定 $Ku=Ks_1s_2\dots s_t$,其中, $s_1,s_2,\dots,s_t\in S$,则节点集 K 将信息发送给节点集 Ku 中所有节点所消耗的时间为 t .

由于 $t\leq b_M(\Delta)$,因此, $b_M(\Gamma)\leq b_M(\Delta)+b_M(\Gamma_K)$. □

图 5 给出了基于定理 4 的广播算法信息传递过程,单位元节点 e 发起广播通信,Phase 1 完成对子图 Γ_K 的广播,Phase 2 完成对其他节点(非子图 Γ_K 的节点)的广播通信.

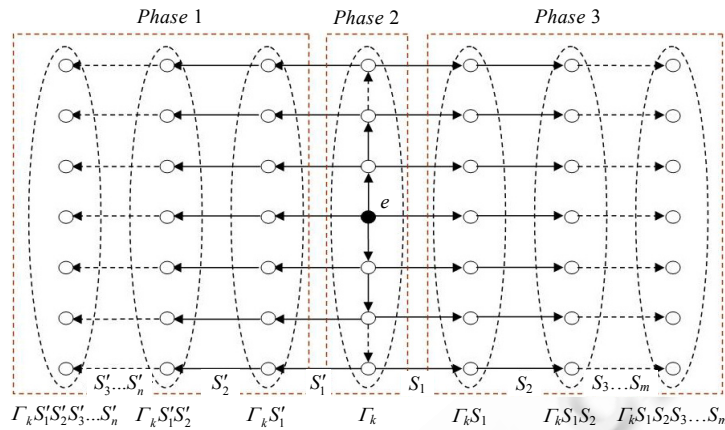


Fig.5 Procedure of broadcasting algorithm

图 5 广播算法运行过程

根据定理 4,对于任意的 Cayley 图网络模型 $\Gamma=Cay(G,S)$,只要适当选择群 G 的子群 K ,就可以构建一种高效的广播算法.利用已给出的节点编址方法,本文给出了三维六度环面网络的一种广播算法.设 $G=Z_l \times Z_k \times Z_m$, $S=\{(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0),(0,0,\pm 1),(1,1,0),(-1,-1,0),(1,0,1),(-1,0,-1),(0,1,1),(0,-1,-1)\}$, $K=\{(x,y,0)|x \in Z_l, y \in Z_k\}$.显然, K 是 G 的一个子群,且 $\Gamma_k=Cay(K, \{(\pm 1,0,0),(0,\pm 1,0)\})$ 是 $Cay(G,S)$ 的一个子图.根据其定义, Γ_k 是一个 $l \times k$ 的方形环面网络,陪集图 $\Delta=Cos(G,K,S)$ 是一个环.单元节点 e 作为发送信息源节点.广播通信算法的具体过程如下:

Broadcasting_3D:

Procedure for the nodes in Γ_k

Procedure for the source node $e=(0,0,0)$

```

{send(message,(1,0,0),1);
 send(message,(l-1,0,0),2);
 send(message,(0,1,0),⌊l/2⌋+1);
 send(message,(0,k-1,0),⌊l/2⌋+2);
 send(message,(0,0,1),⌊l/2⌋+⌊k/2⌋+1);
 send(message,(0,0,m-1),⌊l/2⌋+⌊k/2⌋+2);
}

```

Procedure for the nodes in Γ_k except the source node

```

{receive(message,(x,y,0),C);
 if (y=0) then
   {if (x < ⌊l/2⌋) then
     send(message,(x+1,y,0),C+1);
    if (x < ⌊l/2⌋) then
     send(message,(x-1,y,0),C+1);

```

```

    send(message, (x, 1, 0),  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1$ );
    send(message, (x, k-1, 0),  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 2$ );
  }
  if  $\left( y > 0 \text{ and } y < \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right)$  then
    send(message, (x, y+1, 0), C+1);
  if  $\left( y > \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \right)$  then
    send(message, (x, y-1, 0), C+1);
    send(message, (x, y, 1),  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1$ );
    send(message, (x, y, m-1),  $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 2$ );
  }
  Procedure for all nodes except the nodes in  $\Gamma_K$ 
  {receive(message, (x, y, z), C);
  if  $\left( z = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ or } \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right)$  then
    stop;
  if  $\left( z < \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right)$  then
    send(message, (x, y, z+1), C+1);
  if  $\left( z > \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \right)$  then
    send(message, (x, y, z-1), C+1);
  }

```

算法中的函数定义如下:

- $send(message, (x, y), C)$: 在时刻 C , 将信息 $message$ 发送给节点 (x, y) ;
- $receive(message, (x, y), C)$: 节点 (x, y) 在时刻 C 接收到信息 $message$.

由于 $b_M(\Gamma_K) = \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$, $b_M(\Delta) = \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$, 则由定理 4, 广播算法的时间消耗小于等于 $\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$.

图 6 给出了三维六度环面网络 $H_{9 \times 5 \times 5}$ 中的广播过程, 单位元节点 $e=(0,0)$ 发起广播通信, 图中的有向边表示信息传播的过程, 边上标记的数据为信息传输时刻. A 是广播算法的第 1 个阶段, 经过 8 步完成对 Γ_K 中节点的通信过程; B 是广播算法的第 2 个阶段, 经过 3 步完成对所有非 Γ_K 节点的通信过程.

一种优化的广播算法, 其通信消耗时间应近似等于网络直径, 即 $b_M(\Gamma) \approx D(\Gamma)$. 显然, 本文提出的广播算法并不是最优的, 这与子群 K 并不满足构造优化广播通信算法有着很大的关系. 如何根据定理 4 选择合适的子群 K , 从而优化上述广播算法, 是未来的一项研究工作.

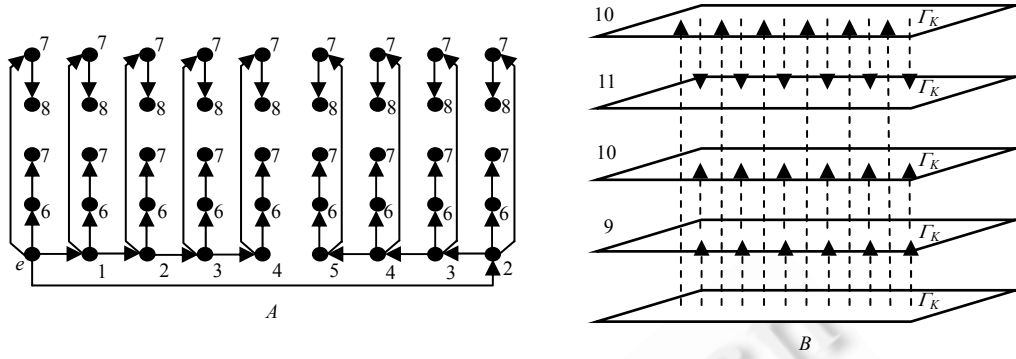


Fig.6 Broadcasting in hexagonal torus of $H_{9 \times 5 \times 5}$

图 6 $H_{9 \times 5 \times 5}$ 中的广播过程

2.2.4 直径

由于环面边的存在,三维六度环面网络的直径是非常难于计算的,本文只给出该网络模型的直径上下界限值.

定理 5. 对于 $\Gamma = H_{l \times k \times m}, l > 0, k > 0, m > 0$, 有:

$$\max(D(H_{k \times m}), D(H_{l \times m}), D(H_{l \times k})) \leq D(\Gamma) \leq \min\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + D(H_{k \times m}), \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + D(H_{l \times m}), \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + D(H_{l \times k})\right).$$

证明:根据最优路由算法 *Route_3D*, 显然有:

$$D(\Gamma) \geq \max(D(H_{k \times m}), D(H_{l \times m}), D(H_{l \times k})).$$

Γ 中任意节点 $u=(a,b,c)$ 到单位元节点 $e=(0,0,0)$ 的路径可以按照如下 3 种方式建立:

1. 首先建立节点 (a,b,c) 到 $(0,b,c)$ 的路径:

$$(a,b,c) \rightarrow (a-1,b,c) \rightarrow \dots \rightarrow (0,b,c), \text{ 或者 } (a,b,c) \rightarrow (a+1,b,c) \rightarrow \dots \rightarrow (0,b,c).$$

显然,该路径的长度小于 $\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor$, 并且 $dis((0,b,c), e) \leq D(H_{k \times m})$.

因此有: $D(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + D(H_{k \times m})$.

2. 首先建立节点 (a,b,c) 到 $(a,0,c)$ 的路径:

$$(a,b,c) \rightarrow (a,b-1,c) \rightarrow \dots \rightarrow (a,0,c), \text{ 或者 } (a,b,c) \rightarrow (a,b+1,c) \rightarrow \dots \rightarrow (a,0,c).$$

显然,该路径的长度小于 $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, 并且 $dis((a,0,c), e) \leq D(H_{l \times m})$.

因此有: $D(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + D(H_{l \times m})$.

3. 首先建立节点 (a,b,c) 到 $(a,b,0)$ 的路径:

$$(a,b,c) \rightarrow (a,b,c-1) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,0), \text{ 或者 } (a,b,c) \rightarrow (a,b,c+1) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,0).$$

显然,该路径的长度小于 $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$, 并且 $dis((a,b,0), e) \leq D(H_{l \times k})$.

因此有: $D(\Gamma) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + D(H_{l \times k})$.

因此有: $D(\Gamma) \leq \min\left(\left\lfloor \frac{l}{2} \right\rfloor + D(H_{k \times m}), \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + D(H_{l \times m}), \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + D(H_{l \times k})\right)$. □

3 结束语

本文给出了一种基于 Cayley 图的三维六度环绕网络模型,针对该三维六度环面网络,本文给出了一种简单的三维节点编址方案,并利用该编址方案得到了任意两个节点间的最短距离公式;开发了一种简单的分布式最优路由算法,可以建立任意两点之间的最短路由路径;基于陪集图理论,给出了一种新型的广播通信算法,并对该算法的效率进行了分析;给出了其网络直径的界限值。

针对三维六度环绕网络的 Cayley 图网络模型,还有很多问题可以作为未来的研究方向。

- 首先,本文提出的广播算法并不是优化的,一种优化的广播算法,其通信消耗时间应近似等于网络直径,即, $b_M(\Gamma) \approx D(\Gamma)$ 。显然,本文提出的广播算法并不是最优的,这与子群 K 并不满足构造优化广播通信算法有着很大的关系,如何根据定理 4 选择合适的子群 K ,从而优化上述广播算法,是未来的一项研究工作;
- 其次,该网络模型直径的确定值还是未知的;
- 最后,如何将本文提出的互连网络结构作为具体网络应用的底层覆盖网络(overlay),如 Ad Hoc 网络、P2P 网络,从而发挥该网络结构良好的拓扑特性,也将是一个非常重要的研究方向。

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的同行表示感谢。同时,对审稿人提出的有益建议表示感谢。

References:

- [1] Bhuyan L, Agrawal DP. Generalized hypercube and hyperbus structure for a computer network. *IEEE Trans. on Computers*, 1984, 33(4):323–333. [doi: 10.1109/TC.1984.1676437]
- [2] Preparata F, Vuillemin J. The cube-connected cycles: A versatile network for parallel computation. *Communications of the ACM*, 1981, 24(5):300–309. [doi: 10.1145/358645.358660]
- [3] Akers SB, Krishnamurthy B. A group-theoretic model for symmetric interconnection networks. *IEEE Trans. on Computers*, 1989, 38(4):556–566. [doi: 10.1109/12.21148]
- [4] Stojmenovic I. Honeycomb networks: Topological properties and communication algorithms. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 1997, 8(10):1036–1042. [doi: 10.1109/71.629486]
- [5] Cho HJ, Hsu LY. Generalized honeycomb torus. *Information Processing Letters*, 2003, 86:185–190. [doi: 10.1016/S0020-0190(02)00507-0]
- [6] Megson GM, Yang X, Liu X. Honeycomb tori are Hamiltonian. *Information Processing Letters*, 1999, 72:99–103. [doi: 10.1016/S0020-0190(99)00141-6]
- [7] Chen GH, Xie L, Lau FCM, Gu Q, Zhou NF. The wall mesh. *Chinese Journal of Computers*, 2000, 23(4):374–381 (in Chinese with English abstract).
- [8] Chen XB. The h -dimensional wall torus. *Chinese Journal of Computers*, 2003, 26(1):77–83 (in Chinese with English abstract).
- [9] Parhami B, Kwail DM. A unified formulation of honeycomb and diamond networks. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2001, 12(1):74–79. [doi: 10.1109/71.899940]
- [10] Camara JM, Moreto M, Vallejo E, Beivide R, Miguel-Alonso J, Martinez C, Navaridas J. Twisted torus topologies for enhanced interconnection networks. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2010, 21(12):1765–1778. [doi: 10.1109/TPDS.2010.30]
- [11] Stewart I. Interconnection networks of degree three obtained by pruning two-dimensional tori. *IEEE Trans. on Computers*, 2014, 63(10):2473–2486 [doi: 10.1109/TC.2013.139]
- [12] Nocetti FG, Stojmenovic I, Zhang JY. Addressing and routing in hexagonal networks with applications for tracking mobile users and connection rerouting in cellular networks. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2002, 13(9):963–971. [doi: 10.1109/TPDS.2002.1036069]
- [13] Tosic R, Masulovic D, Stojmenovic I, Brunvoll J, Cyvin BN, Cyvin SJ. Enumeration of polyhex hydrocarbons up to $h=17$. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, 1995, 35:181–187. [doi: 10.1021/ci00024a002]
- [14] Shin KG. HARTS: A distributed real-time architecture. *Computer*, 1991, 24(5):25–35.

- [15] Chen MS, Shin KG, Kandlur DD. Addressing, routing and broadcasting in hexagonal mesh multiprocessors. *IEEE Trans. on Computers*, 1990,39(1):10–18. [doi: 10.1109/12.46277]
- [16] Carle J, Myoupo JF. Topological properties and optimal routing algorithms for three dimensional hexagonal networks. In: *Proc. of the High Performance Computing in the Asia-Pacific Region HPC-Asia*. Beijing, 2000. 116–121. [doi: 10.1109/HPC.2000.846530]
- [17] Yue ZH, Zhao YJ, Wu JP, Zhang XP. Calculation on the bisection width of H-torus topology. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2009,20(2):415–424 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3168.htm>
- [18] Arden BW, Tang KW. Representations and routing of Cayley graphs. *IEEE Trans. on Communications*, 1991,39(11):1533–1537. [doi: 10.1109/26.111428]
- [19] Biggs NL. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [20] Alspach B, Dean M. Honeycomb toroidal graphs are Cayley graphs. *Information Processing Letters*, 2009,109:705–508. [doi: 10.1016/j.ipl.2009.03.009]
- [21] Xiao WJ, Parhami B. Further mathematical properties of Cayley graphs applied to hexagonal and honeycomb meshes. *Discrete Applied Mathematics*, 2007,155:1752–1760. [doi: 10.1016/j.dam.2007.04.002]
- [22] Xiao WJ, Parhami B. Structural properties of Cayley graphs with applications to mesh and pruned torus interconnection networks. *Journal of Computer and System Sciences, Special Issue on Network-Based Computing*, 2007,73:1232–1239. [doi: 10.1016/j.jcss.2007.02.010]
- [23] Zhang Z, Xiao WJ, Huang SQ, Deng YH. Research on hexagonal torus based on Cayley graph. *Chinese Journal of Computers*, 2014, 37(2):384–393 (in Chinese with English abstract).
- [24] Seo JH. Three-Dimensional Petersen-torus network: A fixed-degree network for massively parallel computers. *Journal of Supercomputing*, 2013,64:987–1007. [doi: 10.1007/s11227-011-0716-z]
- [25] K computer. http://en.wikipedia.org/wiki/K_computer
- [26] Ammendola R, Biagioni A, Frezza O, Cicero FL, Lonardo A, Paolucci PS, Rossetti D, Simula F, Tosoratto L, Vicini P. APENet+: A 3D torus network optimized for GPU-based HPC systems. *Journal of Physics Conf. (Series 396)*, 2012, 042059. [doi: 10.1088/1742-6596/396/4/042059]
- [27] Zhao YJ, Yue ZH, Wu JP, Zhang XP. Topological properties and routing algorithms in cellular router. In: *Proc. of the Int'l Conf. on Networking and Services (ICNS 2006)*. 2006. 101–106. [doi: 10.1109/ICNS.2006.112]
- [28] Decayeux C, Seme D. 3D hexagonal network: Modeling, topological properties, addressing scheme, and optimal routing algorithm. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2005,16(9):875–884. [doi: 10.1109/TPDS.2005.100]
- [29] García F, Solano J, Stojmenovic I, Stojmenovic M. Higher dimensional hexagonal networks. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 2003,63(11):1164–1172. [doi: 10.1016/j.jpdc.2003.07.001]
- [30] Gost FA. New dense families of triple loop networks. *Discrete Mathematics*, 1999,197/198:15–27. [doi: 10.1016/S0012-365X(99)90033-X]
- [31] Xiao WJ, Parhami B. Some mathematical properties of Cayley digraphs with applications to interconnection network design. *Int'l Journal of Computer Mathematics*, 2005,82(5):521–528.

附中文参考文献:

- [7] 陈贵海,谢立,Lau FCM,顾庆,周能法.墙式网孔. *计算机学报*,2000,23(4):374–381.
- [8] 陈协彬. h 维墙式网托. *计算机学报*,2003,26(1):77–83.
- [17] 乐祖晖,赵有健,吴建平,张小平.H-Torus 拓扑结构等分带宽的计算. *软件学报*,2009,20(2):415–424. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3168.htm>
- [23] 张震,肖文俊,黄书强,邓玉辉.基于 Cayley 图的六度环面网络研究. *计算机学报*,2014,37(2):384–393.

附录:文中部分引理及定理证明

引理 3. (略)

证明:基于对称性,这里只考虑如下 4 种情况:

$$dis((0,0,0),(a,b,c)) = \begin{cases} \max(a,b,c), & \text{若 } a > 0, b > 0, c > 0, \max(a,b,c) \geq \frac{a+b+c}{2} \\ \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil, & \text{若 } a > 0, b > 0, c > 0, \max(a,b,c) < \frac{a+b+c}{2} \\ \max(a,b) + |c|, & \text{若 } a > 0, b > 0, c < 0 \\ \max(|b|, |c|) + a, & \text{若 } a > 0, b < 0, c < 0 \end{cases}$$

1. 若 $a > 0, b > 0, c > 0, \max(a,b,c) \geq \frac{a+b+c}{2}$, 假定 $\max(a,b,c)=a$, 则节点 (a,b,c) 到 $(0,0,0)$ 的长度为 a 的最短路径可按如下方法构建:

$$(0,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow \dots \rightarrow (b,b,0) \rightarrow (b+1,b,1) \rightarrow \dots \rightarrow (b+c,b,c) \rightarrow (b+c+1,b,c) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,c).$$

因此, $dis((0,0,0),(a,b,c)) = \max(a,b,c)$.

2. 若 $a > 0, b > 0, c > 0, \max(a,b,c) < \frac{a+b+c}{2}$, 假定 $\max(a,b,c)=a$, 则节点 (a,b,c) 到 $(0,0,0)$ 的最短路径可按如下方法构建:

$$(0,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow \dots \rightarrow (b,b,0) \rightarrow (b+1,b,1) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,a-b) \rightarrow (a,b,a-b+1) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,c).$$

根据上述最短路径, 有:

$$dis((0,0,0),(a,b,c)) = \begin{cases} \frac{a+b+c}{2}, & \text{若 } a+b+c \pmod{2} = 0 \\ \frac{a+b+c+1}{2}, & \text{若 } a+b+c \pmod{2} = 1 \end{cases}$$

因此, $dis((0,0,0),(a,b,c)) = \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil$.

3. 若 $a > 0, b > 0, c < 0$, 假定 $\max(a,b,c)=a$. 节点 (a,b,c) 和 $(0,0,0)$ 之间的长度为 $a+|c|$ 的最短路径可按如下方法构建:

$$(0,0,0) \rightarrow (1,1,0) \rightarrow \dots \rightarrow (b,b,0) \rightarrow (b+1,b,0) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,0) \rightarrow (a,b,-1) \rightarrow \dots \rightarrow (a,b,c).$$

因此, $dis((0,0,0),(a,b,c)) = \max(a,b) + |c|$.

4. 若 $a > 0, b < 0, c < 0$, 假定 $\max(|b|, |c|) = |b|$, 节点 (a,b,c) 和 $(0,0,0)$ 之间长度为 $|b|+a$ 的最短路径可按如下方法构建:

$$(0,0,0) \rightarrow (0,-1,-1) \rightarrow \dots \rightarrow (0,b-c,c) \rightarrow (0,b-c+1,c) \rightarrow \dots \rightarrow (0,b,c) \rightarrow (1,b,c).$$

因此, $dis((0,0,0),(a,b,c)) = \max(|b|, |c|) + a$. □

引理 4. (略)

证明: 对于节点 $(a,b,c) \in Z_l \times Z_k \times Z_m$, 有:

$$(a,b,c) = (a-l, b-k, c-m) = (a-l, b, c) = (a, b-k, c) = (a, b, c-m) = (a-l, b-k, c) = (a-l, b, c-m) = (a, b-k, c-m).$$

1. 若 $\max(a,b,c) \geq \frac{a+b+c}{2}, \max(l-a, k-b, m-c) \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 由引理 3, 有:

- $dis((0,0,0),(a,b,c)) = \max(a,b,c)$;
- $dis((0,0,0),(a-l,b-k,c-m)) = \max(l-a, k-b, c-m)$;
- $dis((0,0,0),(a-l,b,c)) = \max(b,c) + l - a$;
- $dis((0,0,0),(a,b-k,c)) = \max(a,c) + k - b$;
- $dis((0,0,0),(a,b,c-m)) = \max(a,b) + m - c$;
- $dis((0,0,0),(a-l,b-k,c)) = \max(l-a, k-b) + c$;
- $dis((0,0,0),(a-l,b,c-m)) = \max(l-a, m-c) + b$;
- $dis((0,0,0),(a,b-k,c-m)) = \max(k-b, m-c) + a$.

由此可得:

$$dis_f((0,0,0),(a,b,c)) = \min(\max(a,b,c), \max(l-a, k-b, m-c), \max(b,c) + l - a, \max(a,c) + k - b, \max(a,b) + m - c,$$

$$\max(k-b, m-c)+a, \max(l-a, m-c)+b, \max(l-a, k-b)+c).$$

2. 若 $\max(a, b, c) < \frac{a+b+c}{2}$, $\max(l-a, k-b, m-c) \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 由引理 3, 有:

- $dis((0,0,0), (a,b,c)) = \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b-k, c-m)) = \max(l-a, k-b, c-m)$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b, c)) = \max(b, c) + l - a$;
- $dis((0,0,0), (a, b-k, c)) = \max(a, c) + k - b$;
- $dis((0,0,0), (a, b, c-m)) = \max(a, b) + m - c$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b-k, c)) = \max(l-a, k-b) + c$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b, c-m)) = \max(l-a, m-c) + b$;
- $dis((0,0,0), (a, b-k, c-m)) = \max(k-b, m-c) + a$.

由此可得:

$$dis_r((0,0,0), (a,b,c)) = \min \left(\left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil, \max(l-a, k-b, m-c), \max(b, c) + l - a, \max(a, c) + k - b, \max(a, b) + m - c, \max(k-b, m-c) + a, \max(l-a, m-c) + b, \max(l-a, k-b) + c \right).$$

3. 若 $\max(a, b, c) \geq \frac{a+b+c}{2}$, $\max(l-a, k-b, m-c) < \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 由引理 3, 有:

- $dis((0,0,0), (a,b,c)) = \max(a, b, c)$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b-k, c-m)) = \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b, c)) = \max(b, c) + l - a$;
- $dis((0,0,0), (a, b-k, c)) = \max(a, c) + k - b$;
- $dis((0,0,0), (a, b, c-m)) = \max(a, b) + m - c$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b-k, c)) = \max(l-a, k-b) + c$;
- $dis((0,0,0), (a-l, b, c-m)) = \max(l-a, m-c) + b$;
- $dis((0,0,0), (a, b-k, c-m)) = \max(k-b, m-c) + a$.

由此可得:

$$dis_r((0,0,0), (a,b,c)) = \min \left(\max(a, b, c), \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil, \max(b, c) + l - a, \max(a, c) + k - b, \max(a, b) + m - c, \max(k-b, m-c) + a, \max(l-a, m-c) + b, \max(l-a, k-b) + c \right).$$

4. 若 $\max(a, b, c) < \frac{a+b+c}{2}$, $\max(l-a, k-b, m-c) < \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 由引理 3, 有:

- $dis_r((0,0,0), (a,b,c)) = \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil$;
- $dis_r((0,0,0), (a-l, b-k, c-m)) = \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil$;
- $dis_r((0,0,0), (a-l, b, c)) = \max(b, c) + l - a$;
- $dis_r((0,0,0), (a, b-k, c)) = \max(a, c) + k - b$;
- $dis_r((0,0,0), (a, b, c-m)) = \max(a, b) + m - c$;
- $dis_r((0,0,0), (a-l, b-k, c)) = \max(l-a, k-b) + c$;
- $dis_r((0,0,0), (a-l, b, c-m)) = \max(l-a, m-c) + b$;

- $dis_r((0,0,0),(a,b-k,c-m))=\max(k-b,m-c)+a$.

由此可得:

$$dis_r((0,0,0),(a,b,c)) = \min\left(\left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil, \max(b,c)+l-a, \max(a,c)+k-b, \max(a,b)+m-c, \max(k-b,m-c)+a, \max(l-a,m-c)+b, \max(l-a,k-b)+c\right).$$

证毕. □

定理 3. (略)

证明: 设 $d'=dis((0,0,0),(a',b',c'))$, 由于 p 和 p' 是相邻节点, 显然有 $|d-d'| \leq 1$, 这里只需证明 $d'=d-1$ 即可.

- 当 $abc=0$ 时, 可以调用六度环面网络的路由算法 *Route* 找到最优路径, 这里不再做重复证明;
- 当 $abc \neq 0$ 时, 不妨设 $a>0, b>0, c>0$:

➤ 若 $d=\max(a,b,c)$, 则一定有 $\max(a,b,c) \geq \frac{a+b+c}{2}$, 这里不妨设 $\max(a,b,c)=c, \min(a,b,c)=a$.

若 $p'=(a-1,b,c-1)$, 则 $\max(a-1,b,c-1)=c-1$. 显然, $\max(a-1,b,c-1)=c-1 \geq \frac{a+b+c}{2} - 1$.

由引理 4, 则有 $d' \leq \max(a-1,b,c-1)=c-1=d-1$;

➤ 若 $d=\left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil$, 则一定有 $\max(a,b,c) < \frac{a+b+c}{2}$, 这里不妨设 $\max(a,b,c)=c, \min(a,b,c)=a$.

若 $p'=(a-1,b,c-1)$, 则 $\max(a-1,b,c-1)=c-1$ 或者 b .

✓ 若 $\max(a-1,b,c-1)=c-1$, 显然, $\max(a-1,b,c-1)=c-1 < \frac{a+b+c}{2} - 1$, 则由引理 4, 有:

$$d' \leq \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil - 1 = d-1;$$

✓ 若 $\max(a-1,b,c-1)=b$, 则 $b=c$. 当 $0 < a \leq 2$ 时, 有 $c \geq \frac{a+b+c}{2} - 1$, 由引理 4, 可以得到 $d' \leq$

$$\max(a-1,b,c-1)=c, \text{ 而 } d = \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil = \left\lceil c + \frac{a}{2} \right\rceil = c+1, \text{ 则 } d' \leq d-1; \text{ 当 } a > 2 \text{ 时, 有 } c < \frac{a+b+c}{2} - 1,$$

$$\text{由引理 4, 可以得到 } d' \leq \left\lceil \frac{a+b+c}{2} \right\rceil - 1 = d-1;$$

➤ 若 $d=\max(l-a,k-b,m-c)$, 则一定有 $\max(l-a,k-b,m-c) \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 这里不妨设:

$$\max(l-a,k-b,m-c)=m-c, \min(l-a,k-b,m-c)=l-a.$$

若 $p'=(a+1,b,c+1)$, 则 $\max(l-a-1,k-b,m-c-1)=m-c-1$, 显然:

$$\max(l-a-1,k-b,m-c-1)=m-c-1 \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2} - 1.$$

由引理 4, 则有 $d' \leq \max(l-a-1,k-b,m-c-1)=m-c-1=d-1$;

➤ 若 $d=\left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil$, 则一定有 $\max(l-a,k-b,m-c) < \frac{l+k+m-a-b-c}{2}$, 这里不妨设:

$$\max(l-a,k-b,m-c)=m-c, \min(l-a,k-b,m-c)=l-a.$$

若 $p'=(a+1,b,c+1)$, 则有 $\max(l-a-1,k-b,m-c-1)=m-c-1$ 或者 $k-b$.

✓ 若 $\max(l-a-1,k-b,m-c-1)=m-c-1$, 显然:

$$\max(l-a-1,k-b,m-c-1)=m-c-1 < \frac{l+k+m-a-b-c}{2} - 1.$$

$$\text{由引理 4, 则有 } d' \leq \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil - 1 = d-1;$$

✓ 若 $\max(l-a-1, k-b, m-c-1)=k-b$, 则 $k-b=m-c$. 当 $0 < l-a \leq 2$ 时, 有 $m-c \geq \frac{l+k+m-a-b-c}{2} - 1$, 由引理 4 可得 $d' \leq \max(l-a-1, k-b, m-c-1)=m-c$, $d = \left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil = \left\lceil m-c + \frac{l-a}{2} \right\rceil = m+c+1$, 则 $d' \leq d-1$; 当 $l-a > 2$ 时, 有 $m-c < \frac{l+k+m-a-b-c}{2} - 1$, 由引理 4 可得 $d' \leq$

$$\left\lceil \frac{l+k+m-a-b-c}{2} \right\rceil - 1 = d-1;$$

- 若 $d = \max(b, c) + l - a, p' = (a, b-1, c-1)$, 则 $d' \leq \max(b-1, c-1) + l - a = d-1$;
- 若 $d = \max(a, c) + k - b, p' = (a-1, b, c-1)$, 则 $d' \leq \max(a-1, c-1) + k - b = d-1$;
- 若 $d = \max(a, b) + m - c, p' = (a-1, b-1, c)$, 则 $d' \leq \max(a-1, b-1) + m - c = d-1$;
- 若 $d = \max(l-a, m-c) + b, p' = (a+1, b, c+1)$, 则 $d' \leq \max(l-a-1, m-c-1) + b = d-1$;
- 若 $d = \max(k-b, m-c) + a, p' = (a, b+1, c+1)$, 则 $d' \leq \max(k-b-1, m-c-1) + a = d-1$;
- 若 $d = \max(l-a, k-b) + c, p' = (a+1, b+1, c)$, 则 $d' \leq \max(l-a-1, k-b-1) + c = d-1$.

证毕. □



张震(1975-),男,吉林长春人,博士,副教授,主要研究领域为图论,并行与分布式计算.



黄书强(1975-),男,博士,教授级高工,CCF高级会员,主要研究领域为互联网络,无线网络.



肖文俊(1950-)男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为离散数学,图论,并行与分布式计算,复杂网络.