软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2014,25(11):2518−2527 [doi: 10.13328/j.cnki.jos.004525]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

双极信息的聚合与分解*

王国俊[1], 段景瑶[1,2]

[1](陕西师范大学 数学与信息科学学院,陕西 西安 710062)
[2](宝鸡文理学院 数学系,陕西 宝鸡 721013)
通讯作者: 段景瑶, E-mail: nancy-duan@163.com

摘 要: 信息聚合是信息处理过程中的基本手段,主要讨论若干聚合算子的性态.首先,从广义伴随对的角度讨论了广义聚合算子的性质.从聚合算子 A 出发,给出两种不同的方法,构造了大于(小于)等于 A 的新的聚合算子;其次,对于处理双极信息用到的聚合算子、双极 t-模和双极蕴涵做了讨论,得出了这两个双极聚合算子可分解为两个单级聚合算子的条件.在此条件下即清晰可见聚合双极信息时对正信息及负信息的聚合过程.这对提取特定信息具有极其重要的意义.
关键词: 双极信息;信息聚合;双极 t-模;双极蕴涵;双极信息分解
中图法分类号: TP181

中文引用格式: 王国俊,段景瑶.双极信息的聚合与分解.软件学报,2014,25(11):2518−2527. http://www.jos.org.cn/1000-9825/4525.htm
英文引用格式: Wang GJ, Duan JY. Aggregation and decomposition of bipolar information. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014,25(11):2518−2527 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4525.htm

Aggregation and Decomposition of Bipolar Information

WANG Guo-Jun[1], DUAN Jing-Yao[1,2]

[1](College of Mathematics and Information Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)
[2](Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)
Corresponding author: DUAN Jing-Yao, E-mail: nancy-duan@163.com

Abstract: Information aggregation is one of the basic means for information processing. This paper mainly discusses about behavior of several aggregation operators. Firstly, from the perspective of generalized adjunction, the properties of generalized aggregation operators are discussed. Given one aggregation operator A, two different methods are adopted to construct new aggregation operators greater (less) than or equal to A. Furthermore, several aggregation operators, such as bipolar t-norms and bipolar implications, are explored, and the condition is provided for bipolar aggregation operators to be decomposed into two unipolar aggregation operators. Under this condition, the aggregation processing for positive as well as negative information is also presented.
Key words: bipolar information; information aggregation; bipolar t-norm; bipolar implication; decomposition of bipolar information

在包括信息检索、知识表示和专家系统等信息处理的诸多领域里,对双极信息性态的研究都起着关键的作用,特别是在处理带有不确定性的信息时更是如此(参看文献[1−8]).所谓双极信息(bipolar information)是指由正面信息(或称为偏好信息,preferential information)μ和负面信息(或称禁止的信息,forbidden information)[1,4]ν组成的信息对(μ,ν),这里,正信息和负信息要满足某种相容性约束(consistency constraint).比如,正信息和负信息分别由某论域集 X 的子集 P 和 Q 表示,则它们应当满足相容性约束条件 $P\cap Q=\varnothing$;又如,正信息和负信息分别由某

* 基金项目: 国家自然科学基金(11171200); 中央高校特别支持项目(GK201403001); 中央高校教师自由探索项目(GK201402006); 陕西省教育厅专项科研计划(14JK1050); 宝鸡文理学院重点项目(ZK14059)
收稿时间: 2013-02-12; 修改时间: 2013-09-09; 定稿时间: 2013-11-05

论域集 X 的模糊子集μ和ν表示,则它们应当满足相容性约束条件$\forall x\in X,\mu(x)+\nu(x)\leqslant 1$;再如,正信息和负信息分别由某命题逻辑系统中的公式φ和ψ示,则它们应当满足相容性约束条件$\varphi\wedge\psi\sim\perp$[6],等等.人们获取的信息未必是完整无缺的,所以往往要对初步获取的信息进行加工或修改.比如,从事图像处理的研究人员要对初次获取的不清晰的图像通过腐蚀(erosion)和膨胀(dilation)这两种运算进行加工和修改,这里的关键在于对图像的边缘进行检测,其中,结构元素(structural element,简称 SE)起着重要的作用,这已成为数学形态学(mathematical morphology)研究的主要内容之一.作为理论基础,包括腐蚀算子与膨胀算子、开算子与闭算子等在内的对偶算子已经有大量的研究成果,其中包括我国学者从应用角度提出的双结构元素(即小结构元素与大结构元素)边缘检测方法[9–11]等).Soille 所著文献[12]是一本有较大影响的专著,2008 年已由清华大学出版了中译本,其中对腐蚀算子与膨胀算子等对偶算子有详细的论述,只是尚未从理论上与双极算子的聚合与分解联系起来.关于这方面进一步的论述可参见文献[13–17].一般说来,我们常常有必要对已经获取的一组信息进行整合,从而得出比较合理的信息.整合常被称为聚合(见文献[4]中的 aggregation),根据情况的不同,需要采用不同的聚合算子.由于信息之间有自然的偏序存在,比如,某论域集 X 的分明子集之间的包含关系、模糊信息之间的点式序关系、逻辑公式的模型集之间的包含关系等.这类信息的整体都构成一个完备格,上述的聚合算子就在一般的完备格中进行研究.最简单的聚合方法莫过于采用上、下确界算子,只是这种取大、取小的运算有时并不符合信息聚合的要求.比如,对两个有不同重要性或精确性的信息不宜同等看待.这时,由于取小运算是交换的,具有对等性,就不宜采用.为适应各种情况的需要,文献[1]中分别引入了广义否定算子(negation)、广义合取算子(conjunction)、广义析取算子(disjunction)、广义 t-模(t-norm)、广义 t-余模(t-conorm)以及广义蕴涵(implication)等,都不要求交换律成立.这些方法自然也适用于双极信息的聚合.双极信息的聚合可以有不同的聚合方法,比如,两个双极信息(μ,ν)与(μ^*,ν^*)的大小顺序常采用柏拉图序(Pareto-ordering)[1],即$(\mu,\nu)\leqslant(\mu^*,\nu^*)$当且仅当$\mu\leqslant\mu^*$且$\nu\geqslant\nu^*$.设已经获得一组双极信息$\{(\mu_j,\nu_j):j\in J\}$,按照柏拉图序对这些双极信息进行聚合就有:

$$\vee\{(\mu_j,\nu_j):j\in J\}=(\vee\{\mu_j:j\in J\},\wedge\{\nu_j:j\in J\}).$$

这里,$\vee$和$\wedge$分别表示上、下确界,这组双极信息的聚合通过分别对其正、负信息的聚合而完成.值得注意的是,广义聚合算子多种多样,并非都要取简单的上、下确界算子,特别是这些算子可以是非交换的.那么,一般说来,双极信息的聚合是否可以通过对其中的正、负信息分别进行聚合后再按照某种方式组合成为一个新的双极信息来实现呢?或者用简化的语言来说,就是双极信息的聚合能否分解?这正是本文要回答的问题.文献[1–8,14]从应用背景出发,引入了众多的信息聚合算子,但在理论上似乎远不完善.

本文第 1 节简要介绍各种常用的聚合算子.第 2 节研究若干聚合算子的基本性质.第 3 节给出双极 t-模和双极蕴涵可以分解的条件.第 4 节是结束语.

1 广义聚合算子

本文中用 L 表示完备格,$L\times L$ 表示 L 与 L 自身的笛卡尔乘积.

定义 1[1].设 $C:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,若 C 满足以下条件,其中,1 是 L 的最大元,0 是 L 的最小元,则称 C 是 L 上的广义合取:

(i) $C(0,0)=C(0,1)=C(1,0)=0,C(1,1)=1$;

(ii) $a_1\leqslant b_1,a_2\leqslant b_2\Rightarrow C(a_1,a_2)\leqslant C(b_1,b_2)$.

定义 2[1]. 设 $I:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,若 I 满足以下条件,则称 I 是 L 上的广义蕴涵:

(i) I 是混合单调的(对左变量递减,右变量递增);

(ii) $I(0,0)=I(1,1)=1,I(1,0)=0$.

若 I 满足(i)和以下条件,则称 I 是 L 上的广义余蕴涵:

(iii) $I(0,0)=I(1,1)=0,I(0,1)=1$.

定义 3[1]. 设 $T:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,若 T 是可交换结合的广义合取,且满足$\forall a\in L,T(1,a)=a$,则称 T 是 L 上的 t 模.

定义 4[1]. 设 $A,B:L\times L\rightarrow L$ 是 L 上的一对二元算子,满足:$\forall x,y,z\in L,y\leqslant A(x,z)\Leftrightarrow B(x,y)\leqslant z$,则称$(A,B)$为 L 上的广义伴随对(文献[1]中称为 adjunction).

例 1:设 $C(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\leqslant 1\\ b, & a+b>1\end{cases}$, $\forall a,b\in[0,1]$,易验证 C 是广义合取,

但由 $C\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)\neq C\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right), C\left(C\left(\frac{4}{10},\frac{7}{10}\right),\frac{4}{10}\right)=\frac{4}{10}\neq C\left(\frac{4}{10},C\left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)\right)=0$ 知:C 既不满足交换律,也不满足结合律.从而,C 不是通常意义下的合取,更不是 t 模.

定义 5[1]. 设 $D:L\times L\rightarrow L$ 是 L 上的二元算子,若 D 满足以下条件,则称 D 是 L 上的广义析取:

(i) $D(1,1)=D(0,1)=D(1,0)=1,D(0,0)=0$;

(ii) $a_1\leqslant b_1,a_2\leqslant b_2\Rightarrow D(a_1,a_2)\leqslant D(b_1,b_2)$.

定义 6[1]. 设 $S:L\times L\rightarrow L$ 是 L 上的二元算子,若是可交换结合的广义析取,且满足$\forall a\in L,T(0,a)=a$,则称 S 是 L 上的 t 余模.

例 2:设 $D(a,b)=\begin{cases}1, & a+b\geqslant 1\\ a, & a+b<1\end{cases}$, $\forall a,b\in[0,1]$,易验证 D 是广义析取.

但由 $D\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)\neq D\left(\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right), D\left(D\left(\frac{1}{10},\frac{7}{10}\right),\frac{5}{10}\right)=\frac{1}{10}\neq D\left(\frac{1}{10},D\left(\frac{7}{10},\frac{5}{10}\right)\right)=1$ 可知:D 既不满足交换律,也不满足结合律.从而,D 不是通常意义下的析取,更不是 t 余模.

定义 7[18].

(i) 设 $U:L\times L\rightarrow L$ 是 L 上的二元算子,定义 L 上的两个二元运算 C_U^L 和 C_U^R 如下:

$$C_U^L(x,y)=\wedge\{t\in L\mid U(t,x)\geqslant y\},\ C_U^R(x,y)=\wedge\{t\in L\mid U(x,t)\geqslant y\};$$

(ii) 设 $C:L\times L\rightarrow L$ 是 L 上的二元算子,定义 L 上的两个二元运算 U_C^L 和 U_C^R 如下:

$$U_C^L(x,y)=\vee\{t\in L\mid C(y,t)\leqslant x\},\ U_C^R(x,y)=\vee\{t\in L\mid C(x,t)\geqslant y\}.$$

2 广义聚合算子的若干基本性质

在本节中研究广义聚合算子的基本性质,所得的 3 个命题和定理 1、定理 2 为下一节双极聚合算子的分解提供了理论基础.

命题 1. 设(A,B)是 L 上的广义伴随对,则对任意固定的 $a\in L,B(a,z)$保任意并,$A(a,y)$保任意交,即

$$B(a,\bigvee_{j\in J}y_j)=\bigvee_{j\in J}B(a,y_j),\ A(a,\bigwedge_{j\in J}z_j)=\bigwedge_{j\in J}A(a,z_j) \tag{1}$$

证明:由广义伴随对的定义可知:

$$B(a,\bigvee_{j\in J}y_j)\leqslant z\Leftrightarrow \bigvee_{j\in J}y_j\leqslant A(a,z)\Leftrightarrow \forall j,y_j\leqslant A(a,z)\Leftrightarrow \forall j,B(a,y_j)\leqslant z\Leftrightarrow \bigvee_{j\in J}B(a,y_j)\leqslant z \tag{2}$$

特别是在公式(2)最左边令 z 为 $B(a,\bigvee_{j\in J}y_j)$,则公式(2)中最左边的不等式成立,那么由公式(2)中最右边的不等式得: $\bigvee_{j\in J}B(a,y_j)\leqslant B(a,\bigvee_{j\in J}y_j)$.

同理,在公式(2)最右边令 z 为 $\bigvee_{j\in J}B(a,y_j)$,则由公式(2)中最左边的不等式得: $B(a,\bigvee_{j\in J}y_j)\leqslant \bigvee_{j\in J}B(a,y_j)$.

所以,$B(a,\bigvee_{j\in J}y_j)=\bigvee_{j\in J}B(a,y_j)$ 成立.类似地,由广义伴随对的定义可知:

$$y\leqslant A(a,\bigwedge_{j\in J}z_j)\Leftrightarrow B(a,y)\leqslant \bigwedge_{j\in J}z_j\Leftrightarrow \forall j,B(a,y)\leqslant z_j\Leftrightarrow \forall j,y\leqslant A(a,z_j)\Leftrightarrow y\leqslant \bigwedge_{j\in J}A(a,z_j) \tag{3}$$

分别在公式(3)左、右两边令 y 为 $A(a,\bigwedge_{j\in J}z_j)$ 和 $\bigwedge_{j\in J}A(a,z_j)$,就证明了 $A(a,\bigwedge_{j\in J}z_j)=\bigwedge_{j\in J}A(a,z_j)$. □

推论 1. 设(A,B)是 L 上的广义伴随对,则 A 和 B 关于第 2 个变元都是递增的.

命题 2.

(i) 设 $A:L\times L\rightarrow L$ 是 L 上的二元算子,则使得(A,B)构成广义伴随对的二元算子 B 是唯一确定的,即

$$B(a,b)=\wedge\{t\in L|A(a,t)\geqslant b\};$$

(ii) 设 $B:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,则使得 (A,B) 构成广义伴随对的二元算子 A 是唯一确定的,即

$$A(a,b)=\vee\{t\in L|B(a,t)\leqslant b\}.$$

证明:以上述情形(i)为例进行证明.

设 (A,B) 构成广义伴随对,则 $B(a,b)=\wedge\{t\in L|B(a,b)\leqslant t\}=\wedge\{t\in L|b\leqslant A(a,t)\}=\wedge\{t\in L|A(a,t)\geqslant b\}$,

所以,$B(a,b)=\wedge\{t\in L|A(a,t)\geqslant b\}$. □

注意,命题 2 中给出了从 L 上的一个二元算子出发制作另一个二元算子的方法.我们沿用文献[3]中的记号,对于二元算子 $A:L\times L$,规定:

$$I(A)(a,b)=\vee\{u\in L|A(a,u)\leqslant b\} \tag{4}$$

$$T(A)(a,b)=\wedge\{u\in L|A(a,u)\geqslant b\} \tag{5}$$

定理 1. 设 A 是 $L\times L\to L$ 上的任意二元算子,则 $IT(A)\geqslant A,TI(A)\leqslant A$,并且等号不恒成立.

证明:

(i) $IT(A)(a,b)=I(T(A))(a,b)=\vee\{u\in L|T(A)(a,u)\leqslant b\}=\vee\{u\in L|[\wedge\{t\in L|A(a,t)\geqslant u\}]\leqslant b\}$.

因为 $b\in\{t\in L|A(a,t)\geqslant A(a,b)\}$,所以 $A(a,b)\in\{u\in L|[\wedge\{t\in L|A(a,t)\geqslant u\}]\leqslant b\}$.

因此,$IT(A)(a,b)\geqslant A(a,b),\forall(a,b)\in L\times L$.这就证明了 $IT(A)\geqslant A$.

(ii) $TI(A)(a,b)=T(I(A))(a,b)=\wedge\{u\in L|I(A)(a,u)\geqslant b\}=\wedge\{u\in L|[\vee\{t\in L|A(a,t)\leqslant u\}]\geqslant b\}$.

因为 $b\in\{t\in L|A(a,t)\leqslant A(a,b)\}$,所以 $A(a,b)\in\{u\in L|[\vee\{t\in L|A(a,t)\leqslant u\}]\geqslant b\}$.

因此,$TI(A)(a,b)\leqslant A(a,b),\forall(a,b)\in L\times L$.这就证明了 $TI(A)\leqslant A$. □

以下反例说明等号不必成立.

例 3:设 $A(a,b)=\begin{cases}a\wedge b, & a=1\text{或}b=1\\ 0, & a<1\text{且}b<1\end{cases}$, $\forall a,b\in[0,1]$,则由公式(4)与公式(5)可知: $I(A)(a,b)=\begin{cases}b, & a=1\\ 1, & a<1\end{cases}$. 不难得出:

$$IT(A)(a,b)=\begin{cases}b, & a=1\\ 0, & a<1\end{cases}.$$

但 $TI(A)\left(\frac{1}{2},1\right)\neq A\left(\frac{1}{2},1\right)$, 因此,$TI(A)\neq A$.

再设 $A(a,b)=\begin{cases}b, & a=1\\ 1, & a=0\\ 0, & a<1\end{cases}$, $\forall a,b\in[0,1]$,则由公式(4)与公式(5)可得: $T(A)=\begin{cases}b, & a=1\\ 0, & a=0\text{或}b=0\\ 1, & 0<a<1\text{且}b>0\end{cases}$. 不难得出:

$$IT(A)(a,b)=\begin{cases}b, & a=1\\ 1, & a=0\text{或}b=1\\ 0, & 0<a<1\text{且}b<1\end{cases}.$$

因为 $A\left(\frac{1}{2},1\right)\neq IT(A)\left(\frac{1}{2},1\right)$, 所以 $TI(A)\neq A$.

命题 3.

(i) 设 $A:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,若存在二元算子 B 使 (A,B) 构成广义伴随对,则 $IT(A)=A$;

(ii) 设 $B:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,若存在二元算子 A 使 (A,B) 构成广义伴随对,则 $TI(B)=B$.

证明:

(i) 设 $A:L\times L\to L$ 是 L 上的二元算子,且存在二元算子 B 使得 (A,B) 是一个广义伴随对,则由命题 2 和公式(5)可知:$B(a,b)=\wedge\{t\in L|A(a,t)\geqslant b\}=T(A)(a,b)$,再由命题 2 和公式(4)即可得到:

$$A(a,b)=\vee\{t\in L|B(a,t)\leqslant b\}=I(B)(a,b)=I(B(a,b))=IT(A(a,b)).$$

所以,$A=IT(A)$.

(ii) 同理可证. □

定理 2.

(i) 设 U_1 是 $L\times L\to L$ 上的二元算子,则 $U_{C_{U_1}^L}^L\geqslant U_1$,等号并非恒成立;

(ii) 设 C_1 是 $L\times L\to L$ 上的二元算子,则 $C_{U_{C_1}^L}^L\leqslant C_1$,等号并非恒成立.

证明:

(i) $U_{C_{U_1}^L}^L(x,y)=\vee\{t\in L\mid C_{U_1}^L(y,t)\leqslant x\}=\vee\{t\in L\mid[\wedge\{s\in L\mid U_1(s,y)\geqslant t\}]\leqslant x\}$.

因为 $x\in\{s\in L|U_1(s,y)\geqslant U_1(x,y)\}$,所以 $U_1(x,y)\in\{t\in L|[\wedge\{s\in L|U_1(s,y)\geqslant t\}]\leqslant x\}$.因此,$U_{C_{U_1}^L}^L(x,y)\geqslant U_1(x,y)$, $\forall(a,b)\in L\times L$.故 $U_{C_{U_1}^L}^L\geqslant U_1$.

(ii) $C_{U_{C_1}^L}^L(x,y)=\wedge\{t\in L\mid U_{C_1}^L(t,x)\geqslant y\}=\wedge\{t\in L\mid[\vee\{s\in L\mid C_1(x,s)\leqslant t\}]\geqslant y\}$.

因为 $y\in\{s\in L|C_1(x,s)\geqslant C_1(x,y)\}$,所以 $C_1(x,y)\in\{t\in L|[\vee\{s\in L|C_1(x,s)\leqslant t\}]\geqslant y\}$.因此,$C_{U_{C_1}^L}^L(x,y)\leqslant C_1(x,y)$, $\forall(a,b)\in L\times L$.故 $C_{U_{C_1}^L}^L\leqslant C_1$. □

下面是等号不成立的反例.

例 4:设 $U_1(x,y)=\begin{cases}x\vee y, & x=0\text{或}y=0\\ 1, & 0<x<1,0<y<1\end{cases}$, $x,y\in[0,1]$,由定义 7 可知: $C_{U_1}^L(x,y)=\begin{cases}y, & x=0\\ 0, & x>0\end{cases}$.不难得出:

$$U_{C_{U_1}^L}^L(x,y)=\begin{cases}x, & y=0\\ 1, & y>0\end{cases}.$$

显然,$U_{C_{U_1}^L}^L\left(0,\frac{1}{2}\right)\neq U_1\left(0,\frac{1}{2}\right)$,因此,$U_{C_{U_1}^L}^L\neq U_1$.

再设 $C_1(x,y)=\begin{cases}y, & x=0\\ 0, & x=1\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$, $x,y\in[0,1]$,由定义 7 可知: $U_{C_1}^L(x,y)=\begin{cases}x, & y=0\\ 1, & y=1\text{或}x=1\\ 0, & x<1\text{且}0<y<1\end{cases}$.故

$$C_{U_{C_1}^L}^L(x,y)=\begin{cases}y, & x=0\\ 0, & x=1\text{或}y=0\\ 1, & 0<x<1\text{且}y>0\end{cases}.$$

显然,$C_{U_{C_1}^L}^L\left(\frac{1}{2},0\right)\neq C_1\left(\frac{1}{2},0\right)$,因此,$C_{U_{C_1}^L}^L\neq C_1$.

3 双极聚合算子的分解

第 1 节讨论的各种聚合算子的方法和结论自然也适用于双极算子.我们在引言中曾提出这样的问题:双极信息的聚合是否可以通过对其中的正、负信息分别进行聚合后,再按照某种方式组合成为一个新的双极信息来实现呢?本节的目的就是要针对常用的双极 t-模和双极蕴涵回答这一问题.

文献[19]中引入了下面的概念:

定义 8. 设 T 是 $L\times L$ 上的双极 t 模,若存在 L 上的 t 模 T^*,和 L 上的 t 余模 S^*,使得:

$$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in L\times L,\ T((a_1,a_2),(b_1,b_2))=(T^*(a_1,b_1),S^*(a_2,b_2)),$$

则称双极 t 模 T 是可表示的,或称双极 t 模 T 可以分解为 T^*和 S^*的乘积,记为 $T=T^*\times S^*$.

定义 9. 设 I 是 $L\times L$ 上的双极蕴涵,如果存在 L 上的蕴含 I^*和 L 上的余蕴涵 J^*,使得:

$$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in L\times L,\ I((a_1,a_2),(b_1,b_2))=(I^*(a_1,b_1),J^*(a_2,b_2)),$$

则称双极蕴涵 I 是可表示的,或称双极蕴涵可以分解为 I^*和 J^*的乘积,记为 $I=I^*\times J^*$.

例 5:

(i) 设 T 是 $L\times L$ 上的双极 t 模,且 $T((a,b),(c,d))=(a\wedge c,b\vee d)$,则显然 T 是可分解的.但并非每一个双极 t 模都是可以分解的.

(ii) 设 $T_W((x_1,x_2),(y_1,y_2))=(\max(0,x_1+y_1-1),\min(1,x_2+1-y_1,y_2+1-x_1))$,易证 T_W 是$[0,1]\times[0,1]$上的双极 t 模.令 $x=(0.5,0.3),x'=(0.3,0.3),y=(0.2,0)$,则$(T_W(x,y))_2=0.5\neq(T_W(x',y))_2=0.7$.若 T_W 可以分解,则$(T_W(x,y))_2$ 与 x_1 无关,只与 x_2,y_2 有关.而 $x_2=x_2',y_2=y_2$,故$(T_W(x,y))_2=(T_W(x',y))_2$.矛盾!所以,$T_W$不能分解[19].

以下讨论在什么条件下双极 t 模和双极蕴涵可以分解.

定理 3. 设 T 是 $L\times L$ 上的双极 t 模,$L\times L$ 上的偏序是柏拉图序,并且满足以下条件,则存在 L 上的 t 模 T^*、L 上的 t 余模 S^*,使得 $T=T^*\times S^*$:

(i) $\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in L\times L,T((a,b)\vee(c,d),(e,f))=T((a,b),(e,f))\vee T((c,d),(e,f))$;

(ii) $T((1,1),(0,0))=(0,1)$,

证明:

$$\begin{aligned}T((a_1,a_2),(b_1,b_2))&=T((a_1,1)\vee(0,a_2)),(b_1,b_2))\\&=T((a_1,1),(b_1,b_2))\vee T((0,a_2),(b_1,b_2))\\&=T((a_1,1),(b_1,1)\vee(0,b_2))\vee T((0,a_2),(b_1,1)\vee(0,b_2))\\&=T((a_1,1),(b_1,1))\vee T((a_1,1),(0,b_2))\vee T((0,a_2),(b_1,1))\vee T((0,a_2),(0,b_2))\end{aligned}\tag{6}$$

由柏拉图序的结构可知:$T((a_1,1),(0,b_2))\leqslant T((1,1),(0,0))=(0,1),T((0,a_2),(b_1,1))\leqslant T((0,0),(1,1))=(0,1)$.故,由公式(6)得:$T((a_1,a_2),(b_1,b_2))=T((a_1,1),(b_1,1))\vee T((0,a_2),(0,b_2))$.

又因为(1,0)是 $L\times L$ 中的最大元,即单位元,所以 $T((a_1,1),(b_1,1))\leqslant T((1,0),(b_1,1))=(b_1,1)$.按照柏拉图序,若$(\alpha,\beta)\leqslant(\delta,1)$,则$\beta=1$.故有:$T((a_1,1),(b_1,1))$的第 2 个分量为 1.

类似地,$T((0,a_2),(0,b_2))\leqslant T((1,0),(0,b_2))=(0,b_2)$,故 $T((0,a_2),(0,b_2))$的第 1 个分量为 0.

用 $T^*(a_1,b_1)$记 $T((a_1,1),(b_1,1))$的第 1 个分量,用 $S^*(a_2,b_2)$记 $T((0,a_2),(0,b_2))$的第 2 个分量,则

$$T((a_1,a_2),(b_1,b_2))=T((a_1,1),(b_1,1))\vee T((0,a_2),(0,b_2))=(T^*(a_1,b_1),1)\vee(0,S^*(a_2,b_2))=(T^*(a_1,b_1),S^*(a_2,b_2))\tag{7}$$

所以,由定义 8 得 $T=T^*\times S^*$.以下只需证明 T^*是 L 上的 t 模,S^*是 L 上的 t 余模即可.

事实上,由公式(7)得 $T((1,0),(a,b))=(T^*(1,a),S^*(0,b))=(a,b)$,故 $T^*(1,a)=a,S^*(0,b)=b$.从而,T^*和 S^*都满足边界条件.又因为 T 是交换的和结合的,所以由公式(7)不难验证:T^*和 S^*都是交换的和结合的.

最后证明 T^*和 S^*都满足递增性条件.

设 $a_1\leqslant a_1^*,a_2\geqslant a_2^*$,则 $(a_1,a_2)\leqslant(a_1^*,a_2^*)$,故 $T((a_1,a_2),(b_1,b_2))\leqslant T((a_1^*,a_2^*),(b_1,b_2))$.从而,由公式(7)得:

$$(T^*(a_1,b_1),S^*(a_2,b_2))\leqslant(T^*(a_1^*,b_1),S^*(a_2^*,b_2)).$$

由柏拉图序的结构可知:$T^*(a_1,b_1)\leqslant T^*(a_1^*,b_1),S^*(a_2,b_2)\geqslant S^*(a_2^*,b_2)$.所以,$T^*$和 S^*关于第 1 分量递增.

同理可证 T^*和 S^*关于第 2 分量递增.因此,T^*和 S^*分别为 L 上的 t 模和 t 余模. □

定理 4. 设 I 是 $L\times L$ 上的广义双极蕴涵,$L\times L$ 上的偏序是柏拉图序,并且满足以下条件,则存在 L 上的广义蕴涵 I^*、L 上的广义余蕴涵 J^*,使得 $I=I^*\times J^*$:

(i) $\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in L\times L,I((a,b),(c,d)\wedge(e,f))=I((a,b),(c,d))\wedge I((a,b),(e,f))$;

(ii) $\forall(a,b),(c,d),(e,f)\in L\times L,I((a,b)\vee(c,d),(e,f))=I((a,b),(e,f))\wedge I((c,d),(e,f))$;

(iii) $I((0,0),(0,0))=(1,0),I((1,1),(1,1))=(1,0)$;

(iv) $I((1,0),(a,b))=(a,b)$,

证明:由条件(i)、条件(ii)和柏拉图序的结构可知:

$$\begin{aligned}I((a_1,a_2),(b_1,b_2))&=I((a_1,a_2),(b_1,0)\wedge(1,b_2))\\&=I((a_1,a_2),(b_1,0))\wedge I((a_1,a_2),(1,b_2))\\&=I((a_1,1)\vee(0,a_2),(b_1,0))\wedge I((a_1,1)\vee(0,a_2),(1,b_2))\\&=I((a_1,1),(b_1,0))\wedge I((0,a_2),(b_1,0))\wedge I((a_1,1),(1,b_2))\wedge I((0,a_2),(1,b_2))\end{aligned}\tag{8}$$

又由 I 的混合单调性(见定义 2)可知:$I((0,a_2),(b_1,0))\geqslant I((0,0),(0,0))=(1,0),T((a_1,1),(1,b_2))\geqslant I((1,1),(1,1))=(1,0)$.因为(1,0)是最大元,所以由公式(8)得 $I((a_1,a_2),(b_1,b_2))=I((a_1,1),(b_1,0))\wedge I((0,a_2),(1,b_2))$.

又因为 $I((a_1,1),(b_1,0))\geqslant I((1,0),(b_1,0))=(b_1,0),I((0,a_2),(1,b_2))\geqslant I((1,0),(1,b_2))=(1,b_2)$,故 $I((a_1,1),(b_1,0))$的第 2 个分量为 0,$I((0,a_2),(1,b_2))$的第 1 个分量为 1.

用 $I^*(a_1,b_1)$记 $I((a_1,1),(b_1,0))$的第 1 个分量,用 $J^*(a_2,b_2)$记 $I((0,a_2),(1,b_2))$的第 2 个分量.于是有:

$$I((a_1,a_2),(b_1,b_2))=(I^*(a_1,b_1),0)\wedge(1,J^*(a_2,b_2))=(I^*(a_1,b_1),J^*(a_2,b_2)) \quad (9)$$

所以,由定义 9 得 $I=I^*\times J^*$.

以下只需证 I^*是 L 上的广义蕴涵、J^*是 L 上的广义余蕴涵即可.

事实上,因为 I 是 $L\times L$ 上的广义蕴涵,所以由(1,0)和(0,1)分别是 $L\times L$ 上的最大元和最小元以及公式(9)可知:

$$I((1,0),(0,1))=(I^*(1,0),J^*(0,1))=(0,1),$$

从而,$I^*(1,0)=0,J^*(0,1)=1$.

同理可证:

- $I^*(1,1)=1,J^*(0,0)=0$;
- $I^*(0,1)=1,J^*(1,0)=0$;
- $I^*(0,0)=1,J^*(1,1)=0$.

从而,I^*和 J^*分别满足定义 2 中的条件(ii)和条件(iii).

最后,I^*和 J^*的混合单调性是可以由 I 的混合单调性证明的,所以,I^*是 L 上的蕴涵、J^*是 L 上的余蕴涵. □

下面我们通过一个例子说明双极信息的实际应用.

例 6:设有房源 A,B,C,D,E,F.现将价格、面积、离火车站的距离、朝向、已使用年限等信息列表,见表 1.

Table 1

表 1

项目	价格(k)	面积(m²)	距离(km)	朝向	年限(年)
A 房	650	80	1	全朝阳	4
B 房	350	50	5	1 阳(共 2 室)	0
C 房	600	90	4	全朝阳	0
D 房	500	100	3	1 阳(共 3 室)	2
E 房	400	70	3.5	全朝阳	1
F 房	700	150	0.5	全朝阳	5

下面给出量化各个指标的模糊集:

- $\mu_{sp}(x)$:满意价格 x 的程度;
- $\mu_{ss}(x)$:满意面积 x 的程度;
- $\mu_{sd}(x)$:满意距离 x 的程度;
- $\mu_{sde}(x)$:满意朝向 x 的程度;
- $\mu_{sy}(x)$:满意房子已使用年限 x 的程度.

表示满意程度的模糊集如下:

- $\mu_{sp}(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 300\\ \dfrac{700-x}{400}, & 300\leqslant x\leqslant 700;\\ 0, & x\geqslant 700\end{cases}$
- $\mu_{ss}(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 50\\ \dfrac{x-50}{30}, & 80\leqslant x\leqslant 50;\\ 1, & x\geqslant 80\end{cases}$

- $\mu_{sd}(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 5\\ \dfrac{5-x}{4}, & 1\leqslant x\leqslant 5;\\ 1, & x\leqslant 1\end{cases}$
- $\mu_{sde}(x)=\begin{cases}0, & \text{无阳朝向}\\ 0.6, & \text{两室一阳}\\ 0.4, & \text{三室一阳}\\ 1, & \text{其余}\end{cases};$
- $\mu_{sy}(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 5\\ \dfrac{5-x}{4}, & 1\leqslant x\leqslant 5;\\ 1, & x\leqslant 1\end{cases}$
- $\eta_{rp}(x)$:拒绝接受价格 x 的程度;
- $\eta_{rs}(x)$:拒绝接受面积 x 的程度;
- $\eta_{rd}(x)$:拒绝接受距离 x 的程度;
- $\eta_{rde}(x)$:拒绝接受朝向 x 的程度;
- $\eta_{ry}(x)$:拒绝接受房子年限 x 的程度.

表示拒绝接受程度的模糊集如下:

- $\eta_{rp}(x)=(1-\mu_{sp}(x)-0.05)\vee 0$;
- $\eta_{rs}(x)=(1-\mu_{ss}(x)-0.06)\vee 0$;
- $\eta_{rd}(x)=(1-\mu_{sd}(x)-0.1)\vee 0$;
- $\eta_{rde}(x)=(1-\mu_{sde}(x)-0.1)\vee 0$;
- $\eta_{ry}(x)=1-\mu_{sy}$.

5 个决策人对这 6 个房源评价的量化指标如下(见表 2):二元序对(μ,η)代表双极信息,其中,μ代表正信息,表示满意的程度;η代表负信息,表示拒绝接受的程度.

Table 2

表 2

项目	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
价格	(0.125,0.82)	(0.875,0.075)	(0.25,0.7)	(0.5,0.45)	(0.75,0.2)	(0,0.95)
面积	(1,0)	(0,0.94)	(1,0)	(1,0)	(0.67,0.27)	(1,0)
距离	(1,0)	(0,0.9)	(0.25,0.65)	(0.5,0.4)	(0.375,0.525)	(1,0)
朝向	(1,0)	(0.6,0.3)	(1,0)	(0.4,0.5)	(1,0)	(1,0)
年限	(1,0)	(0,1)	(1,0)	(1,0)	(0.67,0.33)	(1,0)

不妨取双极 t 模 $T((x_1,x_2),(y_1,y_2))=(x_1\wedge y_1,x_2\vee y_2)$,此双极 t 模显然是可分解的.利用这个双极 t 模把 5 个方面的信息进行聚合,见表 3.

Table 3

表 3

项目	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
由双极 t 模聚合	(0.125,0.82)	(0,1)	(0.25,0.7)	(0.4,0.5)	(0.375,0.525)	(0,0.95)

按照柏拉图序比较可得:*D* 房源是最可取的,接下来依次是 *E*,*C*,*A*,*F*,*B*.*B* 房源是最不可取的,这与我们的直观判断是吻合的.

4 结束语

本文对信息整合中常用聚合算子的基本性质做了研究,并通过反例对其中若干算子的性态做了细致的分析.一个比较有难度的问题是双极信息的分解问题.本文给出了双极 t 模和双极蕴涵可以分解的条件,为双极信息的进一步研究提供了参考依据.

致谢 评审人对本文原稿提出了中肯的修改建议,作者向他们表示衷心的感谢.

References:

[1] Bloch I. Mathematical morphology on bipolar fuzzy sets: General algebraic framework. Int'l Journal of Approximate Reasoning, 2012,53(7):1031−1060. [doi: 10.1016/j.ijar.2012.05.003]

[2] Dubois D, Prade H. An overview of the asymmetric bipolar representation of positive and negative information in possibility theory. Fuzzy Sets and Systems, 2009,160(10):1355−1366. [doi: 10.1016/j.fss.2008.11.006]

[3] Wang ZD, Yu YD. Pseudo-t-Norms and implication operators: Direct products and direct product decompositions. Fuzzy Sets and Systems, 2003,139(3):673−683. [doi: 10.1016/S0165-0114(02)00503-1]

[4] Zadrozny S, Kacprzyk J. Bipolar queries: An aggregation operator focused perspective. Fuzzy Sets and Systems, 2012,196:69−81. [doi: 10.1016/j.fss.2011.10.013]

[5] Liu HW. On a new class of implications: (*g*,min)-Implications and several classical tautologies. Int'l Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2012,20(1):1−20.

[6] Kaci S. Logical formalisms for representing bipolar preferences. Int'l Journal of Intelligent Systems, 2008,23(8):985−997. [doi: 10.1002/int.20303]

[7] Bosc P, Pivert O. On a fuzzy bipolar relational algebra. Information Sciences, 2013,219:1−16. [doi: 10.1016/j.ins.2012.07.018]

[8] Liu HW. Fuzzy implications derived from generalized additive generators of representable uninorms. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2013,21(3):555−566. [doi: 10.1109/TFUZZ.2012.2222892]

[9] Wang DH, Jin B, Jia YL. An algorithm of image edge examination based on morphology dual-structural elements. Xihua University Journal, 2010,29(3):42−45 (in Chinese with English abstract).

[10] Zhang X, Dang JW, Ma HF. Edgr detection method of track images based on mathematical morphology of dual-structure elements. Railway Computer Application, 2011,20(5):28−31 (in Chinese with English abstract).

[11] Hu XH, Deng MN. Soft morphological edge-detection algorithm based on fuzzy theory. Computer Engineering and Applications, 2010,46(33):155−157 (in Chinese with English abstract).

[12] Soille P, Worte; Wang XP, *et al*., Trans. Morphological Image Analysis-Principle and Application. 2nd ed., Beijing: Tsinghua University Press, 2007 (in Chinese).

[13] Bloch I, Maitre N. Fuzzy mathematical morphologies: A comparative study. Pattern Recognition, 1995,28(9):1341−1387. [doi: 10.1016/0031-3203(94)00312-A]

[14] Bloch I. Duality vs. adjunction for fuzzy mathematical morphology and general form of fuzzy erosions and dilations. Fuzzy Sets and Systems, 2009,160(13):1858−1867. [doi: 10.1016/j.fss.2009.01.006]

[15] Maragos P. Lattice image processing: A unification of morphological and fuzzy algebraic systems. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2005,22(2-3):333−353. [doi: 10.1007/s10851-005-4897-z]

[16] Sussner P, Valle ME. Classification of mathematical morphologies based on concept of inclusion measure and duality. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2005,32(2):139−159.

[17] Bloch I. Spatial reasoning under imprecision using fuzzy set theory, formal logics, and mathematical morphology. Int'l Journal of Approximate Reasoning, 2006,41(2):77−95. [doi: 10.1016/j.ijar.2005.06.011]

[18] Wang ZD, Fang JX. Residual coimplicators of left and right uninorms on a complete lattice. Fuzzy Sets and Systems, 2009,160(14): 2086−2096. [doi: 10.1016/j.fss.2008.10.007]

[19] Deschrijver G, Cornelis C, Kerre EE. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2004,12(1):45−61. [doi: 10.1109/TFUZZ.2003.822678]

附中文参考文献:

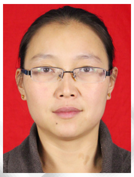
[9] 王大海,靳冰,贾玉玲.基于双结构元素的数学形态学边缘检测方法.西华大学学报,2010,29(3):42−45.

[10] 张霞,党建武,马宏锋.基于双结构元素数学形态学图像边缘检测方法.铁路计算机应用,2011,20(5):28−31.

[11] 胡晓辉,邓曼妮.模糊柔性形态学边缘检测.计算机工程与应用,2010,46(33):155−157.

[12] Soille P,著;王小鹏,等,译.形态学图像分析-原理与应用.北京:清华大学出版社,2008.

王国俊(1935－2013),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,主要研究领域为不确定性推理.
E-mail: gjwang@snnu.edu.cn



段景瑶(1983－),女,博士生,讲师,主要研究领域为不确定性推理.
E-mail: nancy-duan@163.com