

## 基于变分水平集图像模糊聚类分割\*

唐利明<sup>1,2</sup>, 王洪珂<sup>1</sup>, 陈照辉<sup>1</sup>, 黄大荣<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(重庆科技学院 数理学院, 重庆 401331)

<sup>2</sup>(重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331)

<sup>3</sup>(山区桥梁与隧道工程国家重点实验室培育基地(重庆交通大学), 重庆 400074)

通讯作者: 唐利明, E-mail: tlmcs78@163.com, http://www.cqust.cn

**摘要:** 结合变分水平集方法和模糊聚类, 提出了一个基于变分水平集的图像聚类分割模型. 该模型引入了一个基于图像局部信息的外部模糊聚类能量和一个新的关于零水平集的正则化能量, 使得该模型对噪声图像的聚类分割更具鲁棒性. 通过在能量泛函中加入一个内部约束能量约束水平集函数为符号距离函数, 可以使水平集演化过程无需重新初始化. 进一步提出了一种变分形式的聚类中心更新方法, 实现了半监督的图像聚类分割. 实验中采用不同类型的图像与FCM聚类模型、CV模型、Samson模型进行了对比实验, 实验结果显示, 该模型能够克服图像中噪声的影响, 取得较满意的聚类分割效果.

**关键词:** 变分水平集; 图像聚类; 图像分割; 模糊聚类; 聚类中心

**中图法分类号:** TP391

中文引用格式: 唐利明, 王洪珂, 陈照辉, 黄大荣. 基于变分水平集的图像模糊聚类分割. 软件学报, 2014, 25(7): 1570-1582. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4449.htm>

英文引用格式: Tang LM, Wang HK, Chen ZH, Huang DR. Image fuzzy clustering segmentation based on variational level set. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2014, 25(7): 1570-1582 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4449.htm>

## Image Fuzzy Clustering Segmentation Based on Variational Level Set

TANG Li-Ming<sup>1,2</sup>, WANG Hong-Ke<sup>1</sup>, CHEN Zhao-Hui<sup>1</sup>, HUANG Da-Rong<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China)

<sup>2</sup>(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

<sup>3</sup>(National Key Laboratory Incubation Base of Mountain Bridge and Tunnel Engineering (Chongqing Jiaotong University), Chongqing 400074, China)

Corresponding author: TANG Li-Ming, E-mail: tlmcs78@163.com, http://www.cqust.cn

**Abstract:** An image clustering segmentation model combined with variational level set and fuzzy clustering is proposed in this paper. An external fuzzy clustering energy based on the local image information and a new regularization energy with respect to the zero level set are introduced in the energy functional, which makes the proposed model robust in noisy image segmentation. An internal energy that forces the level set function to be close to a signed distance function is introduced in the energy functional, which can completely eliminate the need of the expensive periodical re-initialization procedure for level set function during its evolution. Furthermore, this paper proposes a variational formulation to update the cluster centers in the procedure of clustering, which realizes the semi-supervised clustering segmentation. The experimental results show that the proposed model, compared with the FCM clustering model, CV model and Samson model, can reduce the influence of noise and get better segmentation results for different kinds of images.

**Key words:** variational level set; image clustering; image segmentation; fuzzy clustering; clustering center

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61004118)

收稿时间: 2012-12-01; 定稿时间: 2013-06-28; jos 在线出版时间: 2014-04-29

CNKI 网络优先出版: 2014-04-29 13:26, <http://www.cnki.net/kcms/doi/10.13328/j.cnki.jos.004449.html>

图像分割是指把图像分成互不重叠的同质区域并提取出感兴趣目标的技术,它是进行图像分析与理解的前提,是计算机视觉的基础.近年来,很多图像分割技术被相继提出.其中,水平集方法和聚类技术因其具有较好的分割效果和理论基础,被广泛应用于图像分割.

基于水平集方法的图像分割主要分成两类:

一类是传统的基于活动轮廓和水平集理论的方法<sup>[1,2]</sup>,其基本思想是:将  $N$  维演化曲线或者曲面隐含地表达为  $N+1$  维连续函数的零水平集(zero level set,简称 ZLS),其中,水平集函数一般定义为演化曲线或者曲面的符号距离函数.水平集函数在偏微分方程或者方程组的驱动下不断更新,从而达到演化隐含其中 ZLS 的目的.这种方法的主要优点是,ZLS 在演化过程中可以自动地合并和断裂,能够灵活地处理曲线或者曲面拓扑结构的变化.

另一类是变分水平集的方法,其基本原理是:首先建立一个融合图像信息的关于水平集函数的能量泛函,然后利用变分理论极小化该能量泛函,得到水平集函数演化的偏微分方程或者方程组<sup>[3-5]</sup>.与传统的纯粹由偏微分方程驱动的水平集方法相比,变分水平集方法可以在能量泛函中比较方便地引入更多的图像信息,例如区域信息和形状信息等,从而使得这种方法的适应性更加广泛,分割质量更高.其中,具有代表性的是 Mumford 等人<sup>[6]</sup>在 1989 年提出的 Mumford-Shah(MS)模型.由于 MS 泛函的非凸性,该模型很难进行求解.后续很多学者提出了 MS 模型的近似模型,其中最著名的是 Chan 等人<sup>[3]</sup>在 2001 年提出的 Chan-Vese(CV)模型.但是传统的 CV 模型只能进行目标与背景的二相分割,为了得到多相分割,一些分片常值和分片光滑的变分水平集模型被提了出来,例如文献[7-9].

聚类是对于静态数据分析的一门技术,广泛应用于机器学习、数据挖掘、模式识别、图像分析等领域.聚类的基本思想就是将静态数据划分成群组,其目标是使得类内数据的相似性尽量地大,而类间数据的相似性尽量地小.在 1979 年 Coleman 和 Andrews 提出用聚类算法进行图像分割<sup>[10]</sup>之后,很多聚类技术被应用到图像分割领域,其中,理论最完善、应用最广泛的是模糊 C 均值(fuzzy C means,简称 FCM)算法<sup>[11]</sup>.FCM 算法通过对目标函数的迭代优化,实现数据集合的模糊划分<sup>[12]</sup>.该算法的最大贡献是将模糊概念引入到图像像素的隶属度,正是因为这样的原因,FCM 算法能够比硬 C 均值算法保留更多的原始图像信息.虽然 FCM 算法由于算法自身的优势得到了广泛的应用和发展,但该算法在进行图像分割时存在着对噪声敏感的问题.为了提高算法的抗噪性能,国内外学者提出了很多改进算法,以此提高图像分割的性能.例如:Yang 等人<sup>[13]</sup>研究了具有空间校正的核聚类,提出了基于 Gauss 核的 FCM 聚类算法,并成功地用于图像分割中;Kannan 等人<sup>[14]</sup>针对医学图像,提出了基于核方法的 FCM 聚类算法;Liu 等人<sup>[15]</sup>提出了结合空间信息谱聚类算法;He 等人<sup>[16]</sup>提出了结合全变分正则化的 FCM 聚类算法.

现有的聚类算法大部分都是基于离散数据,其要求解的未知量是一个离散数据的集合.而变分法主要是基于函数的,其未知量是一个连续函数,所以这两种方法很难加以结合.Samson 等人<sup>[17]</sup>在 2000 年采用水平集理论,首次成功地将变分法应用到图像聚类中,取得了不错的实验效果.同年,又提出了一个新的变分水平集模型以同时实现图像的聚类和恢复<sup>[18]</sup>.后续一些研究学者将不同的图像聚类技术和不同的变分水平集模型相结合,得到一些新的变分水平集图像分割模型,例如文献[19-22].文献[19-21]中的模型与 Samson 模型不同之处在于,它们都是顺次地采用两种技术来提高图像的分割质量,而没有将这两种技术融合到一个模型中,这些模型显然没有 Samson 模型更具吸引力.文献[22]中的模型虽然将两种技术融合到一个模型,但它是将模糊聚类技术中的模糊度量作为能量融入到 CV 模型中,而 CV 模型是一个二相分割模型,所以它对于多目标物体的分割质量不高.

本文主要以 Samson 的工作为基础,提出了一个新的基于变分水平集的图像模糊聚类分割模型.本文模型相对于 Samson 模型具有以下优势:① 水平集函数在演化过程中不需要重新初始化;② 本文模型是模糊聚类模型;③ 对噪声图像聚类分割更具鲁棒性;④ 本文模型是一个半监督图像的聚类分割模型.

## 1 基于变分水平集的图像聚类——Samson 模型

设图像区域  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ , 灰度图像  $f(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . 图像聚类就是寻找一个集合组  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$   $\left( \Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i \right)$  满足<sup>[17]</sup>:  $f(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in \Omega_i$

服从期望为  $c_i$ , 方差为  $\sigma_i$  的 Gauss 分布. 该聚类问题的未知量是集合  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$  而不是函数, 很难用变分法进行求解. Samson 等人<sup>[17]</sup>采用水平集理论首次成功地将变分法应用到图像聚类中.

设  $\phi_i(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是 Lipschitz 连续函数并且满足以下条件:

$$\begin{cases} \phi_i(\mathbf{x}) > 0, & \mathbf{x} \in \Omega_i \\ \phi_i(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_i \\ \phi_i(\mathbf{x}) < 0, & \mathbf{x} \in \Omega / (\Omega_i \cup \Gamma_i) \end{cases}$$

利用水平集函数  $\phi_i(\mathbf{x})$ , Samson 等人<sup>[17]</sup>将图像聚类问题转化成求解以下极小值问题:

$$\inf_{\phi_i} \left\{ \begin{aligned} E(\phi_1 \dots \phi_k) &= \sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \frac{(f(\mathbf{x}) - c_i)^2}{\sigma_i} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \int_{\Omega} g(f(\mathbf{x})) |\nabla H(\phi_i(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} + \\ &\frac{1}{2} \kappa \int_{\Omega} (\sum_{i=1}^k H(\phi_i(\mathbf{x})) - 1)^2 d\mathbf{x} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

上述能量  $E(\phi_1 \dots \phi_k)$  中的前两项都与图像信息有关, 本文称其为外部能量; 最后一项只与水平集函数  $\phi_i(\mathbf{x})$  有关, 本文称这类能量为内部能量. 第 1 项是聚类能量, 其主要作用是将图像  $f(\mathbf{x})$  聚类为  $k$  个具有 Gauss 分布的同质区域; 第 2 项是正则化能量, 使得聚类边界长度尽可能地小; 第 3 项是惩罚项, 主要是惩罚过聚类和空聚类, 过聚类就是一个像素点同时包含于多个聚类中, 空聚类就是像素点没有被任何一个聚类包含. Samson 模型(1)作为将变分法引入到图像聚类的首次尝试, 取得了不错的实验效果, 但是该模型具有以下不足:

(1) 水平集函数  $\phi_i(\mathbf{x}, t)$  在演化过程中需要利用偏微分方程(2)不断地周期性地重新初始化, 使其近似为符号距离函数.

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \text{sign}(\phi_i(\mathbf{x}, t))(1 - |\nabla \phi_i(\mathbf{x}, t)|) \quad (2)$$

(2) 聚类能量为  $\sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \frac{(f(\mathbf{x}) - c_i)^2}{\sigma_i} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x}$ , 极小化该能量泛函得到的实际上是硬 C 均值聚类;

(3) 聚类能量基于图像的全局信息, 使得聚类结果对噪声非常敏感;

(4) 该模型是一个有监督的图像聚类模型, 聚类数目  $k$  和聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$  都必须依靠先验信息人为地给出, 并且其聚类结果非常敏感于聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$  的选择.

基于上述讨论, 本文提出了一个新的基于变分水平集的图像聚类分割模型, 新模型相对于 Samson 模型具有以下优势: ① 引入了一个内部能量约束水平集函数为符号距离函数, 在演化过程中, 可以不用对水平集函数进行周期性的重新初始化; ② 引入了一个基于图像局部信息的外部模糊聚类能量和一个新的正则化能量, 使得本文模型对噪声图像的聚类分割更具鲁棒性; ③ 新模型是一个半监督的图像聚类分割模型. 所以, 新模型能够在一定程度上解决 Samson 模型的不足.

## 2 本文模型

### 2.1 内部能量

为了保持水平集函数在演化过程中的稳定性, 一般需要周期性地重新初始化水平集函数为符号距离函数. Samson 模型通过周期性地求解偏微分方程(2)来实现水平集函数的重新初始化. 这种方式存在何时进行重新初始化的问题, 并且也增加了计算的复杂度. 本文采用 Li 等人在文献[23]中提出的方法, 引入内部能量:

$$E_1(\phi_1 \dots \phi_k) = \sum_{i=1}^k \lambda \int_{\Omega} (|\nabla \phi_i(\mathbf{x})| - 1)^2 d\mathbf{x},$$

以去除水平集函数在演化过程中的重新初始化. 其中,  $\lambda > 0$  为调节参数.  $E_1(\phi_1 \dots \phi_k)$  可以看成在图像区域  $\Omega$  内, 水平集函数偏离符号距离函数程度的度量. 在极小化  $E_1(\phi_1 \dots \phi_k)$  的过程中,  $|\nabla \phi_i|$  将逐渐趋近于 1, 所以, 水平集函数  $\phi_i$  在演化过程中将近似地保持为符号距离函数, 具体分析过程可参考文献[23].

下面研究变分图像聚类分割模型中的外部能量. 外部能量分成两类: 一类是聚类能量, 另一类是正则化能

量.这两类能量在图像聚类分割中起着关键的作用,直接影响最终的聚类分割结果.

## 2.2 聚类能量

Samson 等人<sup>[17]</sup>提出的变分图像聚类模型(1)中的聚类能量定义为

$$\sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \frac{(f(\mathbf{x}) - c_i)^2}{\sigma_i} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \frac{e_i}{\sigma_i} (f(\mathbf{x}) - c_i)^2 H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

极小化此能量泛函进行图像聚类分割有两点不足:① 它基于图像的全局信息,所以对噪声比较敏感;② 权重参数  $e_i$  和方差参数  $\sigma_i$  的比值  $e_i/\sigma_i$  可以看成是图像像素值  $f(\mathbf{x})$  对以  $c_i$  为聚类中心的类的隶属度, Samson 等人在文献[17]中都将参数  $e_i$  和  $\sigma_i$  选择为常值,所以 Samson 模型实际上是硬 C 均值的聚类算法.为了在聚类中保留更多的图像细节信息,可结合考虑模糊聚类技术,增加模糊聚类目标为约束条件.但是现有的大部分模糊聚类约束都是基于离散数据的,即依靠隶属度矩阵来实现模糊聚类,很难将其直接应用到变分问题中.本文基于经典的 FCM 聚类技术,引入连续形式的隶属度函数  $\mu_i(\mathbf{x})$ .

基于上述讨论,在能量泛函中采用图像的局部信息和引入隶属度函数,本文提出了下面的基于图像局部信息的带约束条件的模糊聚类能量泛函:

$$E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \mu_i^m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \text{ s.t. } \sum_{i=1}^k H(\phi_i(\mathbf{x})) = 1; \sum_{i=1}^k \mu_i(\mathbf{x}) = 1,$$

其中,  $e_i > 0$  为调节参数;  $m \geq 0$  为隶属的权重参数;  $K_{\sigma}(\mathbf{x})$  是点扩散函数,例如方差为  $\sigma$  的 Gauss 函数,或者紧支集函数,例如  $K_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|B(\mathbf{x}, \sigma)|} \chi_{B(\mathbf{x}, \sigma)}$ , 其中,  $B(\mathbf{x}, \sigma) \in \Omega$  是以  $\mathbf{x}$  为圆心、 $\sigma$  为半径的圆面.约束条件  $\sum_{i=1}^k H(\phi_i(\mathbf{x})) = 1$  是为了惩罚过聚类和空聚类,  $\sum_{i=1}^k \mu_i(\mathbf{x}) = 1$  是隶属度函数的自然约束.

基于局部信息的外部聚类能量  $E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(\mathbf{x}))$  可以在一定程度上减轻聚类时噪声的影响,下面从理论上研究其对噪声的鲁棒性的原因.设  $\bar{f}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = K_{\sigma}(\mathbf{x}) * f(\mathbf{x})$ , 其中,核函数  $K_{\sigma}(\mathbf{x})$  满足  $\int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ , 则  $E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(\mathbf{x}))$  内部的卷积项可以改写为

$$\int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} = \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - \bar{f}(\mathbf{x}) + \bar{f}(\mathbf{x}) - c_i)^2 d\mathbf{y} \quad (3)$$

将公式(3)右边展开,可得:

$$\int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} = \varepsilon_{\sigma}^A(f(\mathbf{x})) + \varepsilon_{\sigma}^B(f(\mathbf{x})) + \varepsilon_{\sigma}^C(f(\mathbf{x})) \quad (4)$$

其中,

$$\varepsilon_{\sigma}^A(f(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - \bar{f}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{y}.$$

将上式右边平方式展开,可得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma}^A(f(\mathbf{x})) &= \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} + \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\bar{f}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{y} - 2 \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) \bar{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} - \bar{f}^2(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5)$$

由公式(5)可得,当  $\sigma \rightarrow 0$  时,  $\int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y} - \bar{f}^2(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ , 即  $\varepsilon_{\sigma}^A(f(\mathbf{x})) \rightarrow 0$ . 由此可知,  $\varepsilon_{\sigma}^A(f(\mathbf{x}))$  一般较小,所以我们后续的讨论中可以忽略它.

在公式(4)中:

$$\varepsilon_{\sigma}^B(f(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (\bar{f}(\mathbf{x}) - c_i)^2 d\mathbf{y} = (\bar{f}(\mathbf{x}) - c_i)^2 \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (6)$$

对于固定值  $\mathbf{x}$ ,  $\int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ , 所以由公式(6)可得:

$$\varepsilon_{\sigma}^B(f(\mathbf{x})) = (\bar{f}(\mathbf{x}) - c_i)^2.$$

在公式(4)中:

$$\varepsilon_{\sigma}^C(f(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (f(\mathbf{y}) - \bar{f}(\mathbf{x})) (\bar{f}(\mathbf{x}) - c_i) d\mathbf{y}.$$

将上式右边展开,可得:

$$\varepsilon_{\sigma}^C(f(x)) = \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)f(y)\bar{f}(x)dy - c_i \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)f(y)dy - \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)\bar{f}(x)^2 dy + c_i \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)\bar{f}(x)dy.$$

因为  $\int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)dy = 1$ , 所以可得  $\varepsilon_{\sigma}^C(f(x)) = 0$ .

根据以上分析可得,  $E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(x))$  内部的卷积项满足:

$$\int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)(f(y) - c_i)^2 dy \approx (\bar{f}(x) - c_i)^2 \quad (7)$$

将公式(7)带入到  $E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(x))$  中可得:

$$E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(x)) \approx \sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \mu_i^m(x) (\bar{f}(x) - c_i)^2 H(\phi_i(x)) dx.$$

因为  $\bar{f}(x) = \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)f(y)dy$  是对  $f(x)$  的降噪图像, 对能量泛函  $E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(x))$  极小化, 等价于对降噪图像  $\bar{f}(x)$  进行模糊聚类, 这样可以明显地降低噪声对聚类结果的影响.

固定  $\phi_1, \dots, \phi_k$ , 求约束极值问题:

$$E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(x)) = \sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \mu_i^m(x) \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)(f(y) - c_i)^2 dy H(\phi_i(x)) dx \text{ s.t. } \sum_{i=1}^k \mu_i(x) = 1.$$

关于  $\mu_i(x)$  的极小值, 采用 Lagrange 乘子法可得最优隶属度函数:

$$\mu_i(x) = \frac{\left( \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)(f(y) - c_i)^2 dy \right)^{\frac{1}{m-1}}}{\sum_{i=1}^k \left( \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y)(f(y) - c_i)^2 dy \right)^{\frac{1}{m-1}}} \quad (8)$$

设  $|f(x_1) - c_i| \leq |f(x_2) - c_i|$ , 则  $\mu_i(x_1) \geq \mu_i(x_2)$ . 这说明像素值  $f(x)$  与聚类中心  $c_i$  的距离越小, 则像素点  $x$  对于聚类区域  $\Omega_i$  的隶属度就越大; 反之, 像素值  $f(x)$  与聚类中心  $c_i$  的距离越大, 则像素点  $x$  对于聚类区域  $\Omega_i$  的隶属度就越小. 所以, 采用隶属度函数  $\mu_i(x)$  可以实现隶属于某聚类区域内的点对于本区域的聚类中心有较大的隶属度, 对于其他区域的聚类中心则具有较小的隶属度.

### 2.3 正则化能量

在数值计算过程中, 如果直接采用梯度下降法求解  $\phi_i(x)$  使得能量泛函  $E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(x))$  达到极小, 水平集函数  $\phi_i(x)$  在演化过程中将会在 ZLS 附近产生奇异点. 能量泛函中, 引入水平集函数  $\phi_i(x)$  的 ZLS 弧长之和:

$$\sum_{i=1}^k \int_{\phi_i=0} ds = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_i(x))| dx \quad (9)$$

作为正则化能量, 以此来解决水平集函数  $\phi_i(x)$  在演化过程中的奇异现象. 这是变分水平集图像分割领域中的一种常见方法<sup>[3,22]</sup>. 能量泛函(9)对应的梯度流为  $\partial \phi_i / \partial t = \text{div}(\nabla \phi_i / |\nabla \phi_i|)$ , 这实际上就是平均曲率演化方程, 它可能使得  $\phi_i(x)$  的 ZLS 过度平滑, 而在分割中模糊掉图像的角形边界. 引入与图像边缘停止函数:

$$g(f(x)) = \frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma} * f(x)|^p} \quad (p=1, 2),$$

相关的加权弧长作为约束能量, 可以较好地解决过度平滑问题<sup>[2,3,23]</sup>. 一般情况下,  $g(f(x))$  是以图像的梯度模值  $|\nabla f(x)|$  为变量的减函数. 在图像的光滑区域,  $|\nabla f(x)|$  较小时,  $g(f(x))$  趋近于 1, 使得 ZLS 快速穿过图像的平滑区域; 而在图像的边缘,  $|\nabla f(x)|$  较大时,  $g(f(x))$  趋近于 0, 使得 ZLS 停止在正确的目标物体的边缘, 避免了过度平滑而产生错误分割. 但是对于孤立噪声点,  $|\nabla f(x)|$  也会比较大, 导致停止函数值较小. 这样, ZLS 穿过孤立噪声区域的速度会变慢, 而增加迭代次数, 有时甚至会停留在孤立噪声区域而形成错误聚类分割. 基于上述讨论可知, 利用图像梯度模值不能有效区分边缘和孤立噪声. 文献[24]提出了一个新的基于高阶导数的边缘检测算子:

$$D = |f_{\eta\eta}| - |f_{\xi\xi}|,$$

其中,  $f_{\eta\eta}$  表示  $f$  在法线方向的二阶方向导数,  $f_{\xi\xi}$  表示  $f$  在切线方向的二阶方向导数,  $|\cdot|$  表示绝对值运算. 采用边缘检测算子  $D$  来区分图像的不同区域具有如下特征: (1) 对于图像边缘,  $|f_{\eta\eta}|$  大而  $|f_{\xi\xi}|$  小, 所以  $D$  值大; (2) 对于图像平滑区域,  $|f_{\eta\eta}|$  和  $|f_{\xi\xi}|$  都小, 所以  $D$  值小; (3) 对于孤立噪声,  $|f_{\eta\eta}|$  和  $|f_{\xi\xi}|$  都大并且几乎相等, 所以  $D$  值小. 本文利用边缘检测算子  $D$  定义新的边缘停止函数:

$$g(f(\mathbf{x})) = \frac{1}{1 + |D(G_\sigma * f(\mathbf{x}))|^p} \quad (p=1,2) \tag{10}$$

根据式(10)边缘停止函数的定义,在图像的孤立噪声区域, $D \rightarrow 0$ ,则  $g(f(\mathbf{x})) \rightarrow 1$ .这说明水平集函数的 ZLS 可以快速通过图像的孤立噪声区域,到达正确的目标边缘,提高了收敛速度,得到正确的聚类分割结果.

采用新的边缘停止函数(10),本文引入与图像边缘信息相关的加权弧长作为外部正则化能量约束:

$$E_3(\phi_1 \dots \phi_k) = \sum_{i=1}^k \gamma_i \int_{\phi_i=0} g(f(\mathbf{x})) ds = \sum_{i=1}^k \gamma_i \int_{\Omega} g(f(\mathbf{x})) |\nabla H(\phi_i(\mathbf{x}))| d\mathbf{x},$$

其中,  $\gamma_i > 0$  为调节参数.

### 2.4 新的能量泛函

结合内部与外部能量对图像进行聚类分割,等价于求解以下带约束条件的能量泛函关于  $\phi_i(\mathbf{x})$  的极小值:

$$\inf_{\phi} E(\phi_1 \dots \phi_k) = E_1(\phi_1 \dots \phi_k) + E_2(\phi_1 \dots \phi_k; \mu_i(\mathbf{x})) + E_3(\phi_1 \dots \phi_k), \text{ s.t. } \sum_{i=1}^k H(\phi_i(\mathbf{x})) = 1 \tag{11}$$

外部能量  $E_2, E_3$  驱动 ZLS 向着聚类边界运动,并最终停留在边界处;而内部约束能量  $E_1$  保持水平集函数  $\phi_i(\mathbf{x})$  在演化过程中近似为符号距离函数.极小值问题(11)等价的 Lagrange 形式为

$$E(\phi_1 \dots \phi_k) = \sum_{i=1}^k \lambda \int_{\Omega} (|\nabla \phi_i(\mathbf{x})| - 1)^2 d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^k e_i \int_{\Omega} \mu_i^m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})(f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \gamma_i \int_{\Omega} g(f(\mathbf{x})) |\nabla H(\phi_i(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \kappa \int_{\Omega} (\sum_{i=1}^k H(\phi_i(\mathbf{x})) - 1)^2 d\mathbf{x} \tag{12}$$

其中,  $\kappa > 0$  为 Lagrange 参数.在实验中,点扩散函数  $K_\sigma(\mathbf{x})$  选择为方差等于  $\sigma$  的 Gauss 函数:

$$K_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{2\sigma^2}\right).$$

采用正则化的 Heaviside 函数和 Dirac 函数,定义为

$$H_\varepsilon(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{s}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{\varepsilon}\right) \right), & |s| \leq \varepsilon \\ 1, & s > \varepsilon \\ 0, & s < -\varepsilon \end{cases}, \quad \delta_\varepsilon(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi s}{\varepsilon}\right) \right), & |s| < \varepsilon \\ 0, & s \geq \varepsilon \end{cases}.$$

近似标准的 Heaviside 函数和 Dirac 函数,在本文中选取  $\varepsilon=5$ .

采用变分理论和梯度下降法求解能量泛函(12)的极小值,其解等价于下面  $k$ -耦合发展方程组的稳态解:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial t} = -\lambda \left( \Delta \phi_i - \text{div} \left( \frac{\nabla \phi_i}{|\nabla \phi_i|} \right) \right) - \delta_\varepsilon(\phi_i) \left[ e_i \mu_i^m(\mathbf{x}) \varepsilon_\sigma(f(\mathbf{x})) - \gamma_i \text{div} \left( g(f(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi_i}{|\nabla \phi_i|} \right) + \kappa (\sum_{i=1}^k H_\varepsilon(\phi_i) - 1) \right] \tag{13}$$

初始条件为  $\phi_i(\mathbf{x}, 0) = \phi_{i,0}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), i=1, \dots, k$ , 其中,

$$\varepsilon_\sigma(f(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} K_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})(f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} = K_\sigma(\mathbf{x}) * (f(\mathbf{x}) - c_i)^2.$$

### 2.5 聚类中心的确定

给定一组聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$ , 求解  $k$ -耦合发展方程组(13),可以得到图像  $f(\mathbf{x})$  的一个聚类  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$ .但是此时的聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$  并不一定是聚类  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$  的中心点  $\{\bar{c}_i\}_{i=1}^k$ .通过计算如下的极小化问题,可以得到对于每个聚类  $\Omega_i$  的中心点  $\bar{c}_i$ :

$$\bar{c}_i = \arg \inf_{c_i} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega_i} \mu_i^m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})(f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} d\mathbf{x}.$$

将积分区域扩充到整个图像区域,则有:

$$\bar{c}_i = \arg \inf_{c_i} \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \mu_i^m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_\sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y})(f(\mathbf{y}) - c_i)^2 d\mathbf{y} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \tag{14}$$

$\bar{c}_i$  为极小值问题(14)的解的必要条件是

$$\int_{\Omega} \mu_i^m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x}-\mathbf{y})(f(\mathbf{y})-c_i) d\mathbf{y} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = 0.$$

在上式中求解  $\bar{c}_i$ , 可得:

$$\bar{c}_i = \frac{\int_{\Omega} \mu_i^m(\mathbf{x}) \int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x}}{\int_{\Omega} \mu_i^m(\mathbf{x}) H(\phi_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x}} \tag{15}$$

### 2.6 图像聚类分割算法

通过第 2.5 节的分析可知,得到图像  $f(\mathbf{x})$  聚类  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$  的聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$  并不一定是聚类区域  $\Omega_i$  的中心点  $\bar{c}_i$ . 为了得到正确的图像聚类分割结果,即将图像分割成不同的同质区域,则有必要更新聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$  为中心点  $\{\bar{c}_i\}_{i=1}^k$ , 然后再次求解发展方程组(13)得到新的图像聚类  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$ , 直至  $\bar{c}_i = c_i, \forall i=1, \dots, k$ . 在本文的图像模糊聚类分割中,对于每一组聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$ , 得到收敛的聚类分割结果后,我们都采用公式(15)重新更新聚类中心,直到得到最优的聚类分割结果,即  $\bar{c}_i = c_i, \forall i=1, \dots, k$ . 具体算法描述如下.

算法.

- Step 1. 给定聚类数目  $k$  和初始水平集函数  $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ , 选择初始聚类中心值  $\{c_i\}_{i=1}^k$ .
- Step 2. 利用公式(8)计算隶属度函数  $\mu_i(\mathbf{x})$ .
- Step 3. 求解  $k$ -耦合发展方程组(13), 得到图像聚类  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$ .
- Step 4. 通过公式(15)计算聚类  $\{\Omega_i\}_{i=1}^k$  的中心点  $\{\bar{c}_i\}_{i=1}^k$ .
- Step 5. 如果  $\max_i |\bar{c}_i - c_i| \leq \varepsilon$ , 结束迭代; 否则, 令  $c_i = \bar{c}_i$  作为新的聚类中心值, 返回 Step 2.
- Step 6. 输出最后聚类分割结果  $u = \sum_{i=1}^k c_i H_{\varepsilon}(\phi_i(\mathbf{x}))$ .

### 3 数值实现

本文采用有限差分法对发展方程组(13)进行求解. 为了不引起下角标的混淆, 本节叙述中去掉发展方程组(13)中  $\phi_i, e_i, \mu_i(\mathbf{x})$  和  $\gamma_i$  的下角标  $i$ , 则发展方程组(13)写成下面的一般形式:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\lambda \left( \Delta \phi - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) - \delta_{\varepsilon}(\phi) \left[ e \mu^m(\mathbf{x}) \varepsilon_{\sigma}(f(\mathbf{x})) - \gamma \operatorname{div} \left( g(f(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \kappa (\sum H_{\varepsilon}(\phi) - 1) \right] \tag{16}$$

对每个水平集函数  $\phi_i$ , 都采用一般化方程(16)进行演化计算. 将图像区域  $\Omega$  离散成长方形网格, 其中,  $x$  和  $y$  方向的空间步长分别为  $\Delta x, \Delta y$ , 则离散网格点可以定义为  $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$ . 设  $t_n = n\Delta t, n=0, 1, 2, \dots$  为时间的离散, 其中,  $\Delta t$  为时间步长. 设  $\phi_{i,j}^k$  为函数  $\phi(x, y, t)$  在三维网格点  $(x_i, y_j, k\Delta t)$  上的函数值. 采用有限差分法, 发展方程(16)可以离散成以下格式(为了去除  $|\nabla \phi|=0$  作为分母时的奇异性, 引入正则化参数  $\tau^2$ ):

$$\frac{\phi_{i,j}^{k+1} - \phi_{i,j}^k}{\Delta t} = -\lambda (\Delta_+^x (\Delta_-^x \phi_{i,j}^k) + \Delta_+^y (\Delta_-^y \phi_{i,j}^k) - K_{i,j}^k) - \delta_{\varepsilon}(\phi_{i,j}^k) \left[ e \mu_{i,j} \varepsilon_{\sigma}(f_{i,j}) - \gamma g(f_{i,j}) K_{i,j}^k - \gamma \frac{\Delta_0^x g(f_{i,j}) \Delta_0^x \phi_{i,j}^k + \Delta_0^y g(f_{i,j}) \Delta_0^y \phi_{i,j}^k}{\sqrt{(\Delta_0^x \phi_{i,j}^k)^2 + (\Delta_0^y \phi_{i,j}^k)^2 + \tau^2}} + \kappa (\sum H_{\varepsilon}(\phi_{i,j}^k) - 1) \right] \tag{17}$$

其中,  $K_{i,j}^k$  表示水平集函数  $\phi(x, y, t)$  的水平集在网格点  $(x_i, y_j, k\Delta t)$  的曲率:

$$K_{i,j}^k = \Delta_+^x \left( \frac{\Delta_-^x \phi_{i,j}^k}{\sqrt{(\Delta_0^x \phi_{i,j}^k)^2 + (\Delta_0^y \phi_{i,j}^k)^2 + \tau^2}} \right) + \Delta_+^y \left( \frac{\Delta_-^y \phi_{i,j}^k}{\sqrt{(\Delta_0^x \phi_{i,j}^k)^2 + (\Delta_0^y \phi_{i,j}^k)^2 + \tau^2}} \right).$$

本文采用所有水平集函数  $\phi_i(x, y, t)$  的 ZLS 测地长度之和的改变量:

$$\Delta \mathcal{L}_g = \sum_{\Omega} g(f(\mathbf{x})) (\delta(\phi^n) |\nabla \phi^n| - \delta(\phi^{n-1}) |\nabla \phi^{n-1}|) d\mathbf{x}$$

小于某个事先设定的阈值作为差分方程(17)迭代的停止条件.

## 4 实验结果及分析

本节以两类图像为实验对象验证本文模型的有效性:一类是聚类数目明显、聚类边界较为简单的人造图像,另一类是聚类数目不明显、聚类边界较为复杂的自然图像.实验中,初始水平集函数全部选择为 $\phi_i(\mathbf{x})=1$ .初始聚类中心 $c_i(i=1,\dots,k)$ 的选择为

$$c_i = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \Omega_i} f(\mathbf{x})}{|\Omega_i|}, \text{ 其中, } \Omega_i = \{\mathbf{x} \in \Omega : m + (i-1)h \leq f(\mathbf{x}) < m + ih\},$$

其中, $m = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})$ , $M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})$ , $h = \frac{M-m}{k}$ 为类间距离.参数 $e_i$ 代表聚类约束的权重,取较大值时,聚类目标对分割结果具有较大的约束力,这是我们所希望的,它将使得分割结果更具合理性,所以聚类约束的权重参数 $e_i$ 应该取一个较大值.通过实验比较,本文选取 $e_i=5$ .参数 $\kappa$ 作为惩罚项(惩罚过聚类与空聚类)的权重,对于聚类分割的结果具有很大的影响.如果取值太小,将会出现过聚类和空聚类而导致分割失败,所以也应取较大值.通过实验比较,本文选取 $\kappa=50$ .其他参数选择如下: $\lambda=1$ , $\gamma_i=1$ .

### 4.1 人造合成图像的聚类分割

本节主要是以简单的人造成图像为实验对象,给出本文模型与3种不同类型的经典图像分割模型的对比如实验结果.这3种经典模型分别是纯粹基于变分水平集的CV模型、基于离散数据的FCM聚类模型和结合变分水平集与聚类技术的Samson模型.

**实验 1.干净人造合成图像的聚类分割.**图1给出了CV模型、FCM聚类模型、Samson模型与本文模型对干净人造合成图像(包含4类,大小为 $128 \times 128$ )聚类分割结果.

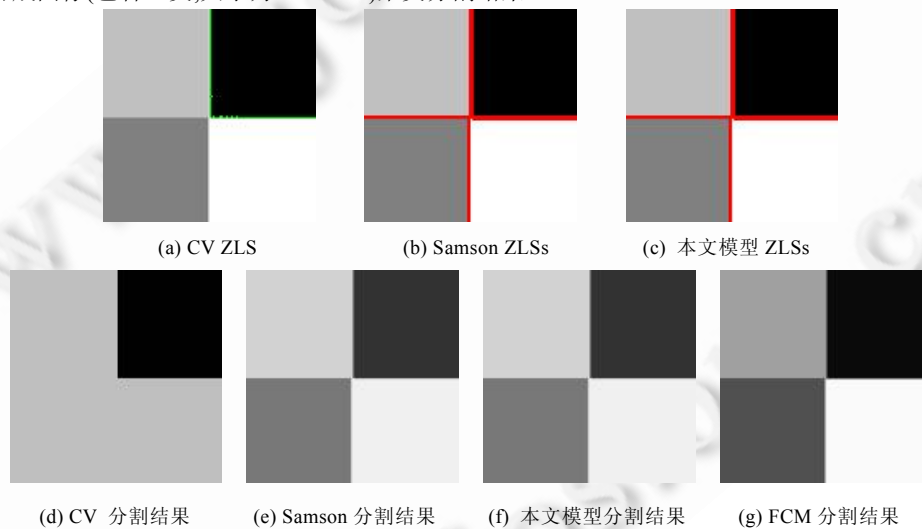


Fig.1 Clustering segmentation results of CV model, Samson model, FCM and the proposed model for clean synthetic image

图1 CV模型、Samson模型、FCM聚类与本文模型对干净人造合成图像聚类分割结果

图1中,第1行分别显示了CV模型、Samson模型与本文模型最终ZLS的收敛结果;第2行前3幅图像分别显示了与之对应的聚类分割结果,最后一幅图像显示了FCM聚类模型的分割结果.可以看出:FCM聚类模型、Samson模型和本文模型都能得到正确的聚类分割结果,但是由于CV模型只是一个二相分割,对于这种包含两个以上特征区域的图像则无能为力.所以后续的对噪声图像的分割,我们只采用FCM聚类模型、Samson模型与本文模型进行对比实验.

**实验 2.噪声人造合成图像的聚类分割.**图2和图3分别显示了对两幅大小都为 $128 \times 128$ 的噪声合成图像



(分别加入方差为 20 和 40 的 Gauss 噪声),采用 FCM 聚类模型、Samson 模型与本文模型的聚类分割结果.

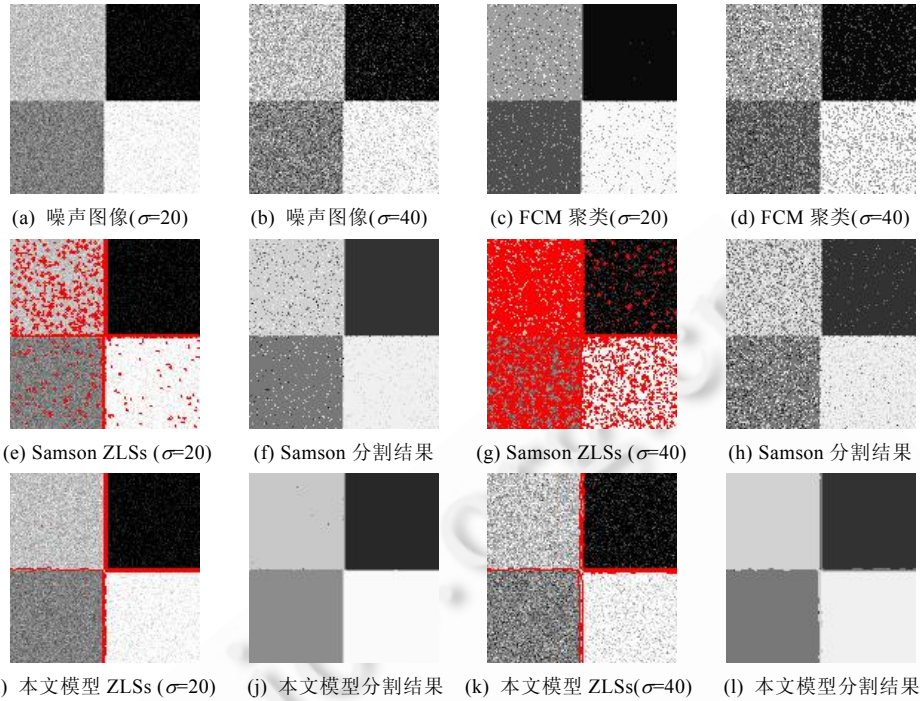


Fig.2 Clustering segmentation results of FCM, Samson model and the proposed model for noisy synthetic image  
图 2 FCM 聚类、Samson 模型与本文模型对噪声人造图像聚类分割结果

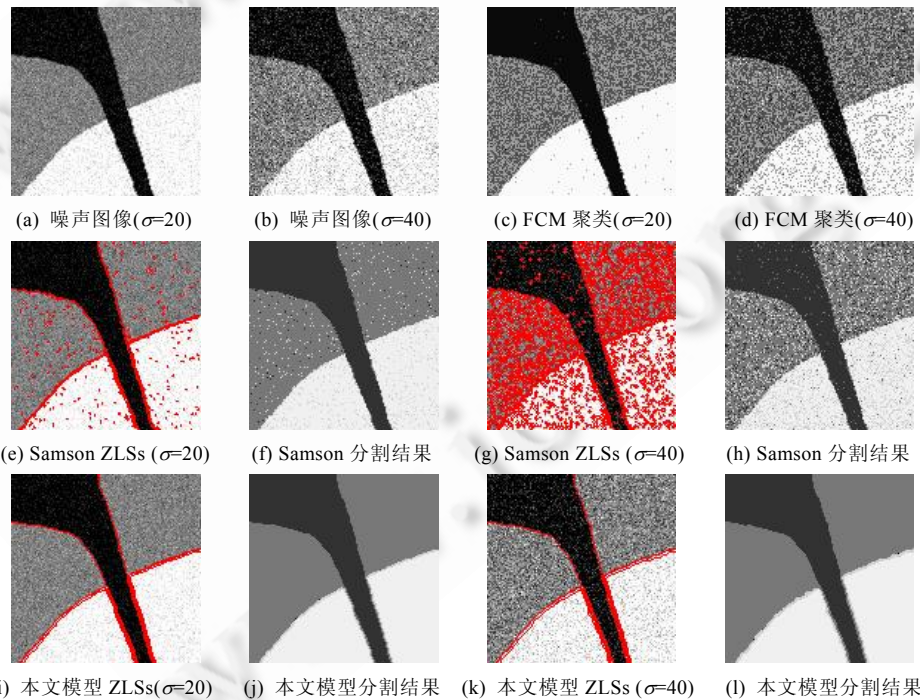


Fig.3 Clustering segmentation results of FCM, Samson model and the proposed model for noisy synthetic image  
图 3 FCM 聚类、Samson 模型与本文模型对加噪人造图像聚类分割结果

图 2 和图 3 具有不同的特征:

- 一幅含有 4 个特征区域,另一幅含有 3 个;
- 一幅具有 T 形聚类边界,另一幅具有弧形聚类边界.

可以看出:FCM 聚类分割模型无论是对于低噪声水平还是高噪声水平的图像,都不能得到较好的分割效果(同质区域含有噪声);Samson 模型对于这两幅图像,在不同的噪声水平下都能够较清楚地得到聚类的边缘,但在聚类区域的内部出现了孤立的噪声点,并且随着噪声水平的提高,这种现象越发严重.这是由于区域内的孤立噪声点被聚类到其他区域而产生的现象.而本文模型由于引入了新的基于图像局部信息的聚类能量并采用了新的边缘停止函数,所以各个水平集函数的 ZLS 可以顺利地快速通过孤立噪声区域,到达各自聚类的边界,得到正确的聚类结果,并且每个聚类区域内没有出现被聚类到其他区域的孤立噪声点,从而得到比较干净的同质的聚类区域.这一实验结果说明,本文模型相对于 FCM 聚类分割模型和 Samson 模型对噪声图像的分割更具鲁棒性.

#### 4.2 自然图像的聚类分割

图 4 显示了本文模型对一幅大小为  $128 \times 128$  的干净和加噪的航拍飞机图像(分别加入方差为 20,40 和 60 的 Gauss 噪声)的聚类分割结果(聚类数  $k=3$ ).可以清楚地看到:对于干净的和低噪声水平下的图像(例如噪声方差  $\sigma=20$  的噪声图像),本文模型可以清楚地得到聚类的边界,包括和背景对比度反差较小的飞机的阴影,并且图像的细节在聚类图像中得到较好的保持,例如飞机机翼上的白色尖点.随着噪声水平的提高,和背景对比度反差较大的白色飞机的边界在聚类分割图像中仍然得到较好的保持,但是和背景对比度反差较小的飞机阴影的边界逐渐变得模糊,并且一些细节在聚类分割图像中没有得到保持.例如在对噪声方差  $\sigma=60$  的噪声图像的聚类分割结果中,飞机机翼上的白色尖点几乎完全被模糊掉.

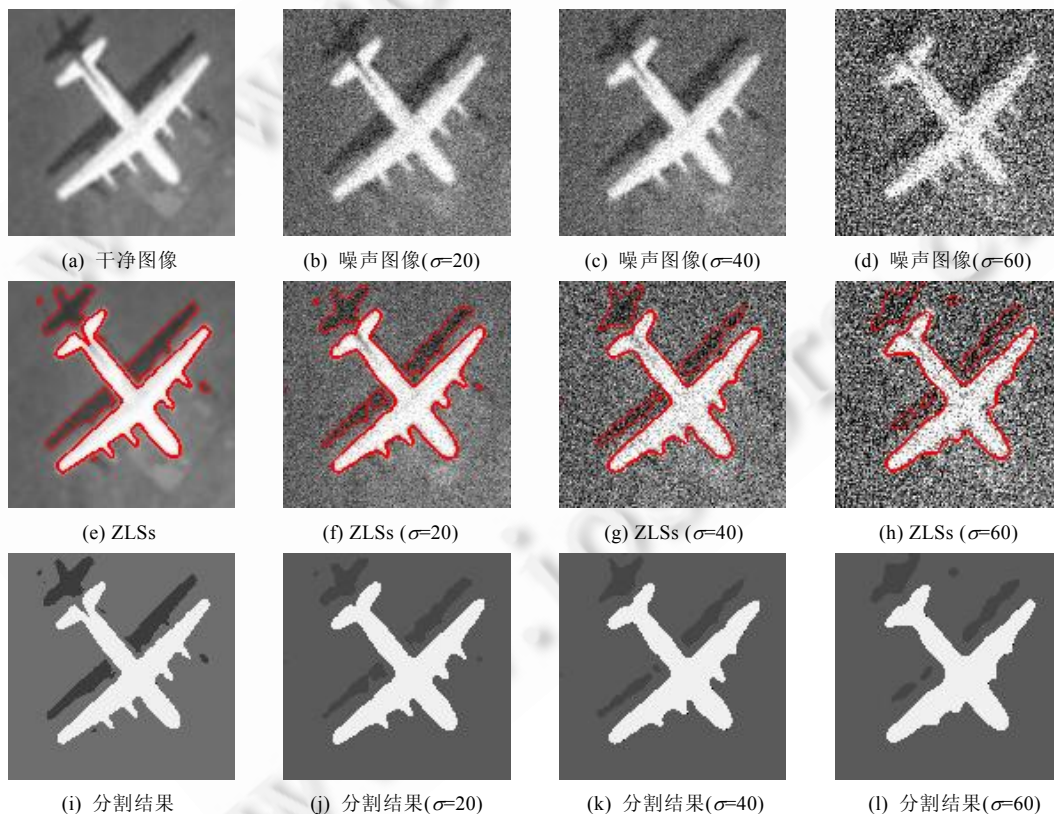


Fig.4 Clustering segmentation results of the proposed model for clean and noisy aerial image

图 4 本文模型对干净和加噪的航拍飞机图像聚类分割结果

图 5 显示了本文模型对一幅大小为  $256 \times 256$  的遥感图像的聚类分割结果(聚类数  $k=3$ ).图 5(a)为测试图像,图 5(b)为收敛时 3 个水平集函数的 ZLS,即聚类边界.为了能够清楚地看到不同水平集函数的曲面图及其 ZLS,我们将它们分别进行了显示,3 个水平集函数的图像分别如图 5(g)、图 5(h)和图 5(i)所示,其对应的 ZLS 分别如图 5(d)、图 5(e)和图 5(f)所示.图 5(c)显示了最后的聚类分割结果.可以清楚地看到:图像被聚类分割成 3 个同质的均匀区域,聚类边界清晰,并且很多小的细节部分在聚类分割图像中得到较好的保持.

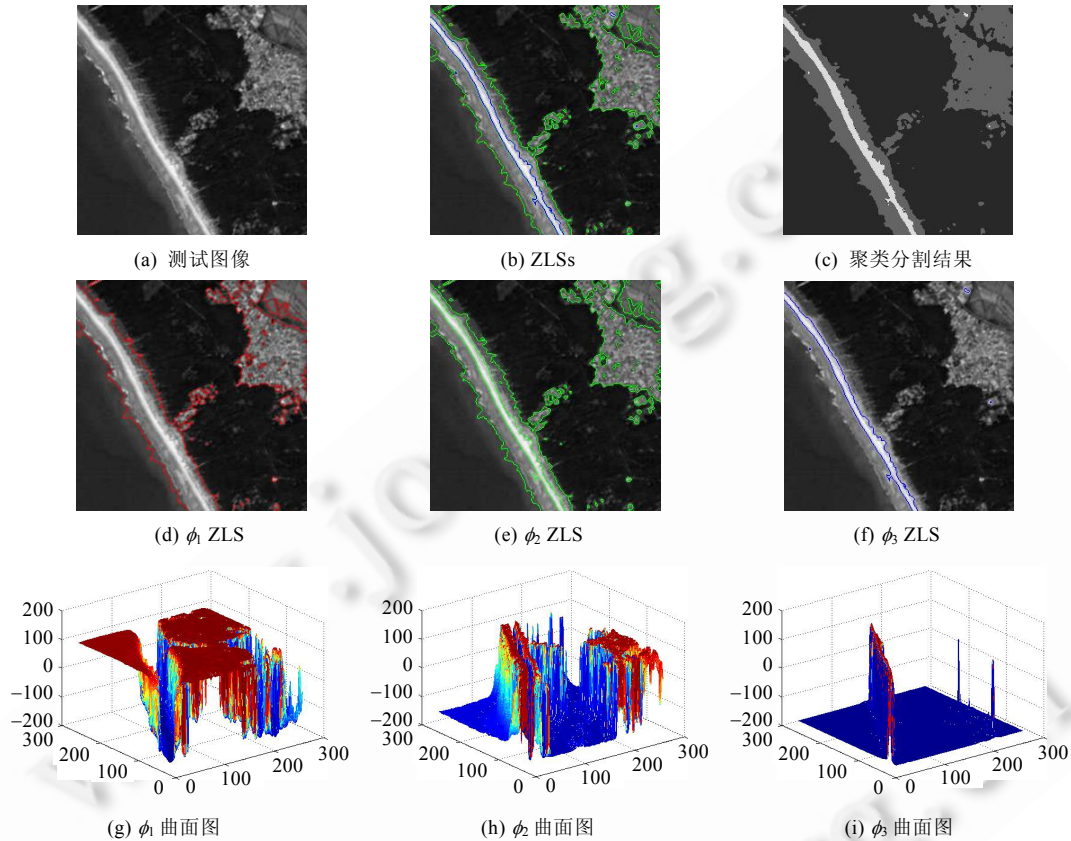


Fig.5 Clustering segmentation results of the proposed model for remote sensing image

图 5 本文模型对遥感图像聚类分割结果

## 5 结论

本文提出了一个新的基于变分水平集的图像模糊聚类分割模型.在此模型中引入了基于图像局部信息的模糊聚类能量和一个基于新的边缘停止函数的正则化能量,提高了本文模型对噪声图像分割的鲁棒性.提出了一个变分形式的聚类中心的更新公式,实现了半监督的图像聚类分割.引入了一个内部能量,避免了水平集函数在演化过程中周期性的重新初始化.实验结果显示:本文模型对于噪声图像的聚类分割有较强的鲁棒性,相对于 Samson 模型和 FCM 聚类分割模型都具有较大的优势.但是本文模型仍然只是一个半监督图像聚类分割模型,必须依靠先验信息确定图像的聚类数目  $k$ .我们的后续工作将集中在无监督的变分图像聚类分割上.

## References:

- [1] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours. *Int'l Journal of Computer Vision*, 1997,22(1):61-79. [doi: 10.1023/A:1007979827043]

- [2] Sethian J. Level Set Methods and Fast Marching Methods. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [3] Chan T, Vese L. Active contours without edges. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2001,10(2):266–277. [doi: 10.1109/83.902291]
- [4] He CJ, Tang LM. Anisotropic diffusion of halting speed fields in geometric active model. *Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software*, 2007,18(3):600–607 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/600.htm> [doi: 10.1360/jos180600]
- [5] Li CM, Huang R, Ding ZH, Gatenby JC, Metaxas DN, Gore JC. A level set method for image segmentation in the presence of intensity inhomogeneities with application to MRI. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2011,20(7):2007–2016. [doi: 10.1109/TIP.2011.2146190]
- [6] Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989,42(5):577–685. [doi: 10.1002/cpa.3160420503]
- [7] Vese LA, Chan TF. A multiphase level set framework for image segmentation using the Mumford and Shah model. *Int'l Journal of Computer Vision*, 2002,50(3):271–293. [doi: 10.1023/A:1020874308076]
- [8] Jung YM, Kang SH, Shen J. Multiphase image segmentation via Modica-Mortola phase transition. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2010,67(5):1213–1232. [doi: 10.1137/060662708]
- [9] Lie J, Lysaker M, Tai XC. A binary level set model and some applications to Mumford-Shah image segmentation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2006,15(5):1171–1181. [doi: 10.1109/TIP.2005.863956]
- [10] Coleman GB, Andrews HC. Image segmentation by clustering. *Proc. of the IEEE*, 1979,67(5):773–785. [doi: 10.1109/PROC.1979.11327]
- [11] Dunn JC. A graph theoretic analysis of pattern classification via Tamura's fuzzy relation. *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 1974,4(3):310–313. [doi: 10.1109/TSMC.1974.5409141]
- [12] Bezdek JC. A convergence theorem for the ISODATA clustering algorithm. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1980,1(2):1–8. [doi: 10.1109/TPAMI.1980.4766964]
- [13] Yang MS, Tsai HS. A Gaussian kernel-based fuzzy c-means algorithm with a spatial bias correction. *Pattern Recognition Letters*, 2008,29(12):1713–1725. [doi: 10.1016/j.patrec.2008.04.016]
- [14] Kannan SR, Ramathilagam S, Sathya A, Pandiyarajan R. Effective fuzzy c-means based kernel function in segmenting medical images. *Computers in Biology and Medicine*, 2010,40(6):572–579. [doi: 10.1016/j.combiomed.2010.04.001]
- [15] Liu HQ, Zhao F, Jiao LC. Fuzzy spectral clustering with robust spatial information for image segmentation. *Applied Soft Computing*, 2012,12(11):3636–3647. [doi: 10.1016/j.asoc.2012.05.026]
- [16] He YY, Hussainia MY, Ma JW. A new fuzzy C-means method with total variation regularization for segmentation of images with noisy and incomplete data. *Pattern Recognition*, 2012,45(9):3463–3471. [doi: 10.1016/j.patcog.2012.03.009]
- [17] Samson C, Blanc-Feraud L, Aubert G, Zerubia J. A level set model for image classification. *Int'l Journal of Computer Vision*, 2000, 40(3):187–197. [doi: 10.1023/A:1008183109594]
- [18] Samson C, Blanc-Feraud L, Aubert G, Zerubia J. A variational model for image classification and restoration. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2000,22(5):460–472. [doi: 10.1109/34.857003]
- [19] Li BN, Chui CK, Chang S. Integrating spatial fuzzy clustering with level set methods for automated medical image segmentation. *Computers in Biology and Medicine*, 2011,41(1):1–10. [doi: 10.1016/j.combiomed.2010.10.007]
- [20] Ray N, Acton ST. Image segmentation by curve evolution with clustering. In: *Proc. of the 2000 34th Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*. Pacific Grove, 2000. 495–458. [doi: 10.1109/ACSSC.2000.911005]
- [21] Gibou F, Fedkiw R. A fast hybrid  $k$ -means level set algorithm for segmentation. In: *Proc. of the 4th Annual Hawaii Int'l Conf. on Statistics and Mathematics*. Honolulu, 2005. 281–291. <http://physbam.stanford.edu/~fedkiw/papers/stanford2002-08.pdf>
- [22] Xie ZP, Wang ST. An extended Mumford-Shah model integrated with fuzzy clustering. *Acta Electronica Sinica*, 2008,36(1): 127–132 (in Chinese with English abstract).
- [23] Li CM, Xu CY, Gui CF, Fox MD. Level set evolution without re-initialization: A new variational formulation. In: *Proc. of the 2005 IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition*. IEEE Computer Society Press, 2005. 430–436. [doi: 10.1109/CVPR.2005.213]
- [24] Chen Q, Montesinos P, Sun QS, Heng PA, Xia DS. Adaptive total variation denoising based on difference curvature. *Image and Vision Computing*, 2010,28(3):298–306. [doi: 10.1016/j.imavis.2009.04.012]

## 附中文参考文献:

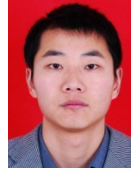
- [4] 何传江,唐利明.几何活动轮廓模型中停止速度场的异性扩散.软件学报,2007,18(3):600-607. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/600.htm> [doi: 10.1360/jos180600]
- [22] 谢振平,王士同.融合模糊聚类的 Mumford-Shah 模型.电子学报,2008,36(1):127-132



唐利明(1978-),男,湖北恩施人,博士,副教授,主要研究领域为基于偏微分方程与变分理论的图像分解,去噪和分割.  
E-mail: tlms78@163.com



王洪珂(1963-),男,教授,主要研究领域为偏微分方程的理论及应用.  
E-mail: wanghk1963@126.com



陈照辉(1980-),男,博士生,讲师,主要研究领域为优化算法及理论.  
E-mail: chen.zhh@163.com



黄大荣(1978-),男,博士,教授,CCF 会员,主要研究领域为优化理论,可靠性分析,智能交通图像处理.  
E-mail: hcx1978@yahoo.com.cn

www.jos.org.cn

www.jos.org.cn