

一类求多变量函数所有局部极小点的算法^{*}

刘杰^{1,2}, 王宇平³

¹(西安电子科技大学 理学院, 陕西 西安 710071)

²(西安科技大学 理学院, 陕西 西安 710054)

³(西安电子科技大学 计算机学院, 陕西 西安 710071)

通讯作者: 刘杰, E-mail: tears191@foxmail.com

摘要: 为求出具有箱式约束的非线性全局优化问题所有的局部极小点, 提出了一种基于 Multistart 方法的新算法. 结合目标函数在可行域内的总变差、下降率和凹凸性等信息, 构造了一个刻画局部极小点分布的 G-度量. 将可行域剖分为若干个小区域, 把初始点按 G-度量值的比例分配在每块区域上, 使得局部极小点密集的区域能够被分配较多的初始点进行搜索; 给出了有效初始点的判断条件. 为了进一步减少局部优化算法的运行次数, 针对 G-度量计算量较大的问题, 设计了相应的近似计算方法, 降低了计算量. 选择了 4 个 2 维~10 维具有大量局部极小点的测试函数进行求解, 与 Multistart 和 Minfinder 算法的实验结果进行对比, 表明了该方法在收敛速度和搜索全部局部极小点上都有了较大的改进和提高.

关键词: 全局优化; G-度量; 局部极小点; 总变差

中图法分类号: TP301 **文献标识码:** A

中文引用格式: 刘杰, 王宇平. 一类求多变量函数所有局部极小点的算法. 软件学报, 2013, 24(10): 2267-2274. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4337.htm>

英文引用格式: Liu J, Wang YP. Algorithm for locating all local minima of multidimensional function. Ruan Jian Xue Bao/ Journal of Software, 2013, 24(10): 2267-2274 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4337.htm>

Algorithm for Locating All Local Minima of Multidimensional Function

LIU Jie^{1,2}, WANG Yu-Ping³

¹(School of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

²(School of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

³(School of Computer Science and Technology, Xi'dian University, Xi'an 710071, China)

Corresponding author: LIU Jie, E-mail: tears191@foxmail.com

Abstract: This paper focuses on locating all local minima of box-constrained, non-linear optimization problems. A new algorithm based on Multistart method is proposed. A quality measure called G-measure is constructed to measure the local minima of a multidimensional continuous and differentiable function distribution inside bounded domain. This paper measures the distribution of local minima in three facets: Gradient, convexity and concavity, and rate of decline. Feasible region is divided into several small regions, and each is assigned a set of initial points in proportion to its G-measures. More initial points can be allocated in the region which includes more local minima. A condition judging whether an initial point is effective is aimed to decrease the run times of local optimal technique. The approximate computing method is constructed to reduce computational complexity of G-measure. Several benchmarks with large quantities of local minima are chosen. The performance of this new method is compared with that of Multistart and Minfinder on benchmark problems. Experimental results show that the proposed method performs better in search efficiency.

Key words: global optimization; G-measure; local minima; total variation

* 基金项目: 国家自然科学基金(61272119, 11301414, 11226173)

收稿时间: 2012-06-26; 定稿时间: 2012-10-19

全局优化问题在数值天气预报、石油地质勘探、计算生物化学、轨道设计、电子学和化学等方面有着极其重要的应用潜力和发展前景.很多科研工作者从理论和数值计算方面对这一问题进行了大量的研究,提出了进化算法、粒子群算法和填充函数法等全局优化算法.但在众多实际问题中,往往要求出优化问题的所有局部极小点.已有的全局优化算法,例如进化算法^[1,2]、模拟退火算法^[3,4]、禁忌搜索算法^[5,6]等,往往仅能找到问题的全局最优解,无法求出所有局部最优解,因此需要重新设计算法.

文献[7-11]以 Multistart 算法为基础设计了一种聚类算法,该算法通过探测目标函数的“吸引域”,对于吸引域内的初始点不再执行局部搜索,从而达到了减少使用局部搜索的目标.文献[12,13]中通过引入有效距离的概念对聚类算法进行了改进,提高了算法的效率.文献[14]对基于 Multistart 的算法的停止准则进行了分析,提出了 Double Box stopping rule,observables stopping rule,expected minimizers stopping rule 这 3 类停止准则,促进了这类问题的研究.

通过反复的编程测试及对存在问题的分析,构造了一种基于梯度的度量:G-度量.G-度量可以对局部极小点在可行域内的分布情况做出一种刻画,从而使算法能够对局部极小点密集的区域分配较多的初始点进行细致的搜索,而局部极小点稀疏的区域则分配较少的初始点以减少搜索次数.从而既能保证求出优化问题的所有局部极小点,又提高了算法的效率.在 Minfinder 算法的基础上,提出了一种基于 G-度量的局部极小点搜索算法 (locate all the local minima algorithm with gradient measure,简称 GLLMA).通过将该算法用于国际通用的 benchmark,与已有文献提供的实验数据的对比说明,本文算法在梯度值计算次数以及算法运行时间等指标上有了较大的提升.

1 问题描述

本文讨论以下问题:设 $f(x):S \subset R^n \rightarrow R$, 问题为求出所有的 $x_i^* \in S \subset R^n$, 满足

$$x_i^* = \arg \min_{x \in S_i} f(x), S_i = S \cap \{x \mid \|x - x_i^*\| < \varepsilon\},$$

其中, S 是一个箱体区域: $S = [l_1, u_1] \otimes [l_2, u_2] \otimes \dots \otimes [l_n, u_n]$.

2 GLLMA 算法体系

2.1 G-度量

现实问题中,目标函数 $f(x)$ 在可行域 S 上往往有多个局部的极小值点,并要求出所有的局部极小值点.经典的局部搜索算法(local search algorithm)如 Powell 共轭方向法、梯度法、牛顿法等,这些方法所能找到的局部极小值点与初始点的位置有很大的依赖关系^[15].图 1 说明了这一问题.

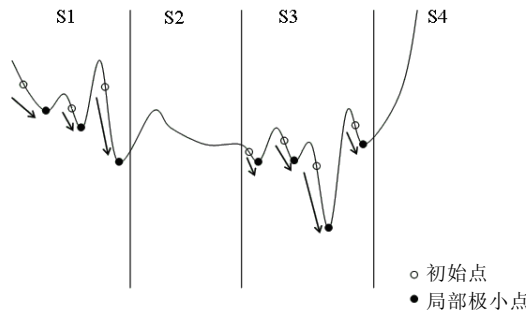


Fig.1 Search process of local minima

图 1 局部极小点的搜索过程

而目前并没有给出一种选择好的初始点的有效算法.解决的方法就是随机生成大量的初始点,从每个初始

点出发进行搜索,找到各自的局部极小点.这也是 Multistart 算法的基本思想.但这样必然会带来很大的计算量,因此,在找到所有局部极小点的同时尽量减少局部优化算法的执行次数,成为求所有局部极小点算法设计的一个重要目标.Minfinder 算法在 Multistart 算法的基础上,引入了“平均半径”的概念,若从新的初始点搜索可能得到已知的局部极小点,则不再对该初始点执行局部搜索策略,从而部分地减少了局部优化算法执行次数.

将图 1 中目标函数的可行域划分为 4 个子区域 S1,S2,S3 和 S4.可以看出,目标函数的局部极小点主要集中在区域 S1 和 S3 中,而 S2 和 S4 中包含有较少甚至没有局部极小点.一种合理的做法是,在区域 S1 和 S3 中应该分配较多数量的初始点,以保证找出该区域内所有的局部极小点;而在 S2 和 S4 中应该分配很少的初始点,进行一个简单的搜索即可.

基于此,我们定义 G-度量(*gradient measure*)来反映目标函数在给定区域 Ω 上局部极小点的分布情况:

$$G(\Omega) = \frac{CO(\Omega)}{(1 + RD(\Omega))m(\Omega)} TV(\Omega),$$

其中, $TV(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla f| d\Omega$, $|\nabla f|$ 表示目标函数 f 的梯度模; $\sigma = \frac{f(x_{\max}) - f(x_{\min})}{\|x_{\max} - x_{\min}\|}$, x_{\max}, x_{\min} 为函数 $f(x)$ 在区域 Ω 上的函数值最大和最小的点; $m(\Omega)$ 表示区域 Ω 的测度; $CO(\Omega)$ 表示目标函数在集合 Ω 上是凸函数或凹函数的子集合个数.

接下来,对 G-度量加以解释. $TV(\Omega)$ 称为总变差(*total variation*),它反映了函数 $f(x)$ 数值变化的差的总和.在图 1 中,区域 S1 和 S3 中由于函数波动比较大,相应的总变差也较大;而在区域 S2 内函数值变化不大,相应的总变差也较小.但在区域 S4 内函数值急剧下降,导致总变差也会很大,所以仅仅依靠总变差还无法对函数的局部极小点分布情况做出有效刻画. $RD(\Omega)$ 称为下降率(*rate of decline*),反映了目标函数在区域 Ω 内函数值的下降速度, $RD(\Omega)$ 越大,则函数值下降得越快.当总变差很大而下降率很小时,就意味着目标函数在该区域上有着剧烈的波动,从而可能包含有较多的局部极小点.凸分析理论中,在一定条件下,函数的凹凸性和局部极值点存在着一定的对应关系.

基于此,为了更加精确地刻画目标函数在该区域上的波动程度,引入了凹凸数 $CO(\Omega)$.若函数在该区域上凹凸性变化比较大,也就意味着可能包含有较多的波峰和波谷,从而包含有较多的局部极值点.引入 Lebesgue 测度 $m(\Omega)$ 的目的是消除区域大小变化对度量带来的影响.

综上所述,可以得到 G-度量的一些基本性质:

性质 1. G-度量是非负的.

性质 2. 设 Ω_1, Ω_2 为两个给定的箱式区域,且 $m(\Omega_1) = m(\Omega_2)$, $f(x)$ 在区域 Ω_1, Ω_2 内 Lipstiz 连续,若 $f(x)$ 在 Ω_1 内包含的局部极小点个数多于 Ω_2 ,则 $G(\Omega_1) > G(\Omega_2)$.

由性质 2 可以看出,对于 Lipstiz 函数 $f(x)$,由于其在区域内的下降率不超过 Lipstiz 常数,则 $f(x)$ 包含的局部极小点越多,总变差和凹凸数也就越大,从而相应的 G-度量值也越大.因此,G-度量很好地刻画了其局部极小点的分布情况.但是对于一般的可微函数,G-度量大小与 $f(x)$ 包含的局部极小点多少虽然不能保证严格的一一对应,但在包含局部极小点的区域上,相应的 G-度量值也较大,为初始点的分布提供了指引.

为了验证构造的 G-度量的合理性,选择了一个测试函数——Six Hump Camel function:

$$f(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4, x \in [-3, 3]^2.$$

将 Six Hump Camel 函数的可行域 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 划分为 9 个小正方形区域,分别为 S1,S2,...,S9.该函数在可行域 $[-3, 3] \times [-3, 3]$ 内共有 6 个极小点,在图 2 中以“*”表示,分别位于区域 S4,S5,S6 中,其中两个全局最小点 (0.08983, -0.7126) 和 (-0.08983, 0.7126) 位于区域 S5 中.在表 1 中完整记录了这 9 个区域 G-度量的计算过程.

由表 1 可以看出,包含有全局极小点的区域 S5 的 G-度量值最大,包含有局部极小点的区域 S3 和 S4 的 G-度量值其次,其余 6 个未包含局部极小点区域的 G-度量值较小.由此可见,G-度量较好地刻画了目标函数局部极小点的分布情况,为找出目标函数所有的局部极小点提供了指引.

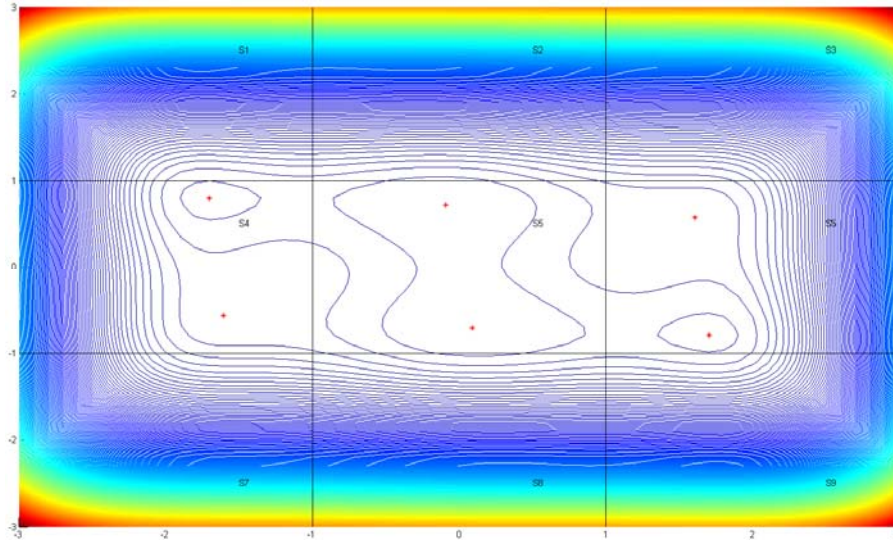
Fig.2 Illustration of G-measure in a 2-dimensional feasible space $[-3,3] \times [-3,3]$ 图 2 二维可行域 $[-3,3] \times [-3,3]$ G-度量计算示意图**Table 1** G-Measure calculation process of Six Hump Camel function

表 1 Six Hump Camel 函数 G-度量计算过程

	TV	CO	RD	m	G
S1	676.218 5	2	114.473 0	4	2.928 0
S2	576.308 0	3	89.349 5	4	4.784 0
S3	693.106 6	2	105.178 1	4	3.263 9
S4	218.027 2	4	34.814 5	4	6.087 7
S5	13.205 3	6	0.972 0	4	10.044 5
S6	218.027 2	4	34.814 5	4	6.087 7
S7	693.106 6	2	105.178 1	4	3.263 9
S8	576.308 0	3	89.349 5	4	4.784 0
S9	672.218 5	2	114.473 0	4	2.928 0

2.2 G-度量的计算

在实际计算过程中,当遇到可行域较大以及高维的复杂问题时,G-度量精确值的计算会带来非常大的计算量.考虑到G-度量主要是为局部极小点的搜索提供一个指引,无需计算出精确值,可通过数值计算方法计算出近似值,为此设计了如下近似计算方法.

把区域 Ω 进行等距网格分割,步长为 h ,网格节点为 $\bar{x}^i (i=1, \dots, k)$.

2.2.1 总变差的计算

把梯度模在区域 Ω 的积分用网格节点上梯度模值的和作为近似值,即

$$TV(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla f| d\Omega \approx \frac{m(\Omega)}{k} \sum_{i=1}^k |\nabla f(\bar{x}^i)|.$$

梯度 $\nabla f(\bar{x}^i) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\}_{x=\bar{x}^i}$ 的各个分量可以用一阶中心差商近似计算:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x=\bar{x}^i} = \frac{f(\bar{x}_{k+1}^i) - f(\bar{x}_{k-1}^i)}{2h}.$$

2.2.2 下降率的计算

函数 $f(x)$ 在区域 Ω 内最大值和最小值一般来说是无法求出的,因此,用函数 $f(x)$ 在网格节点上的函数值中最

大值和最小值作为近似值,即

$$RD(\Omega) \approx \frac{f(\max_{1 \leq i \leq k} \bar{x}_i) - f(\min_{1 \leq i \leq k} \bar{x}_i)}{\|\max_{1 \leq i \leq k} \bar{x}_i - \min_{1 \leq i \leq k} \bar{x}_i\|}$$

2.2.3 凹凸数的计算

判定 $f(x)$ 在给定区域上的凹凸性已经有了完整的理论方法^[16],但是这些方法在用于实际计算中都具有计算量大的缺点,由于在 G-度量的近似计算中无需给出凹凸数精确的数值,因此考虑如下近似计算方法:

设 A 为函数 $f(x)$ 的 Hessian 矩阵, $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ii}, S^2 = \frac{1}{n} \left[\text{tr}A^2 - \frac{1}{n} (\text{tr}A)^2 - M^2 \right]$, 则 A 的最大特征值 λ_1 和最小特征值 λ_n 满足如下不等式:

$$M - S\sqrt{n-1} \leq \lambda_n \leq M - \frac{S}{\sqrt{n-1}}, M + \frac{S}{\sqrt{n-1}} \leq \lambda_1 \leq M + S\sqrt{n-1}.$$

从以上定理可以看出:若 $M - S\sqrt{n-1}$ 是正的,则 A 必为正定矩阵;若 $M + S\sqrt{n-1}$ 是负的,则 A 必为负定矩阵. 从而可以通过计算 $M - S\sqrt{n-1}$ 和 $M + S\sqrt{n-1}$ 对每个节点处 Hessian 矩阵 $H(x)$ 的正定性、负定性做出估计. 使用 DBSCAN 算法^[17]即可对函数 $f(x)$ 在区域 Ω 内凹凸子集的个数做出估计.

2.3 有效点的判定

为了进一步减少局部搜索算法的运行次数,在文献[12]中利用聚类的思想,通过引入平均半径的概念,将初始点分为有效点和无效点两类.下面作一简要介绍.

定义 1. 集合 $B(x^*) = \{x | x \in S \subset R^n, LS(x) = x^*\}$ 称为局部极小点 x^* 的盆域,其中, $LS(x)$ 是局部搜索算法从 x 出发找到的局部极小点.

为了减少局部搜索算法执行的次数,如果有初始点落入 x^* 的盆域 $B(x^*)$ 内,对于该点就无需执行局部搜索. 设 $r_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |x_i - LS(x_j)|$, 其中, x_i 表示初始点, $LS(x_j)$ 表示从 x_j 出发找到的局部极小点, M 表示局部搜索算法执行的次数. 该公式对盆域的平均半径做出了一个估计,为了使平均半径更好地反映盆域的大小,对此作了修正:

$$R_i = \frac{1}{M_i} \sum_{j=1}^{M_i} |x_i^{(j)} - x_i^*|,$$

其中, $\{x_i^{(j)}, j=1, \dots, M_i\} = \{x_i, i=1, \dots, M\} \cap A(x_i^*), LS(x_i^{(j)}) = x_i^*, M = \sum_{i=1}^{\omega} M_i$, ω 为迄今发现局部极小点的个数. 修正后的平均半径为

$$R = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{M_i}{M} R_i.$$

由此,把满足如下条件的初始点 x 称为有效初始点:

- (1) $|x-z| > R, z$ 为已知的局部极小点;
- (2) $(x-z)^T (\nabla f(x) - \nabla f(z)) < 0$.

若初始点是有效初始点才执行局部搜索,否则重新选择初始点.

2.4 GLLMA 体系

在前文构造的 G-度量的基础上,结合有效点判定,形成 GLLMA 算法,其伪码描述如下:

有效点检验

1. 令 $V = \emptyset$;
2. 令 T 为 N 个采样点的集合;
3. 对于所有的 $x \in T$, 如果 x 是有效点, 则 $V = V \cup \{x\}$.

增加初始点

若 $\frac{|V|}{N} < \frac{1}{2}$, 令 $N := \min\left(N + \frac{N}{10}, NMAX\right)$, $NMAX$ 为事先指定的每一轮采样点数目上限.

初始化

N 为初始采样点数目, X^* 为局部极小点的集合, M 为可行域的剖分成小区域的个数

主程序

1. 将可行域 Ω 剖分为 M 个小区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$, 计算每个区域上的 G-度量 $G_i (i=1, 2, \dots, M)$;
2. 区域 Ω_i 分配采样点数为 $N_i = \frac{G_i}{\sum_{j=1}^M G_j} N (i=1, 2, \dots, M)$, 并计算每个区域的有效点集 V_i ;
3. 取 $x \in V_i$ 为初始点, 执行局部搜索算法, 求出局部极小点 y ;
4. 计算平均距离 r_i ;
5. 若 $y \notin X^*$, 则 $X^* := X^* \cup \{y\}$;
6. 若满足停止准则, 则算法终止; 否则, 转第 2 步.

3 数值实验

接下来将本文设计的 GLLMA 算法与 Multistart 算法、MinFinder 算法^[12]进行了对比. 为了方便比较, 所有的算法均使用了双箱停止准则; 每个算例均使用随机数生成器在可行域内生成服从均匀分布的初始点; 在表 2~表 4 中, Problem, Minima, Found, Fevals, Gevals 和 Time 分别表示算例、已知局部极小点个数、求出局部极小点个数平均值、函数值计算次数平均值、局部搜索算法执行次数和算法运行时间平均值(算法运行 50 次的平均值). 所有实验均在 Intel Xeon(R)2.67GHz, 32GB 内存, MATLAB7.10(64-bit), Windows XP Professional x64 环境下实现. 局部搜索算法使用了 MATLAB 中 fmincon 函数. f_1, f_2 和 f_4 以 0.1 为步长对可行域进行等距剖分, f_3 以 1 为步长对可行域进行等距剖分. 初始采样点数 N 为 20, 每一轮采样点数目上限 $NMAX$ 为 100. f_1, f_2 和 f_3 的可行域均划分为 9 块区域, f_4 的可行域划分为 2^N 块区域.

$$f_1(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4, x \in [-3, 3]^2,$$

$$f_2(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(18x_1) - \cos(18x_2), [-1, 1]^2,$$

$$f_3(x) = 1 + \frac{1}{200} \sum_{i=1}^2 x_i^2 - \prod_{i=1}^2 \frac{\cos(x_i)}{\sqrt{i}}, x \in [-100, 100]^2,$$

$$f_4(x) = -\sum_{i=1}^N \sin x_i \sin^{20}\left(\frac{i \times x_i^2}{\pi}\right), [0, \pi]^N, N = 10.$$

Table 2 Experimental results of Multistart algorithm

表 2 Multistart 算法实验结果

Problem	Minima	Found	Fevals	Gevals	Time
f_1	6	6	11 138	10 741	0.04
f_2	49	49	17 714	16 989	0.11
f_3	400	400	557 668	535 368	16.44
f_4	1 024	-	-	-	-

Table 3 Experimental results of Minfinder algorithm

表 3 Minfinder 算法实验结果

Problem	Minima	Found	Fevals	Gevals	Time
f_1	6	6	1 598	2 187	0.02
f_2	49	49	1 723	2 975	0.08
f_3	400	400	17 404	41 849	7.07
f_4	1 024	927	2 53 071	2 790 955	190.16

Table 4 Experimental results of GLLMA algorithm**表 4** GLLMA 算法实验结果

Problem	Minima	Found	Fevals	Gevals	Time
f_1	6	6	6 371	983	0.02
f_2	49	49	4 015	1 592	0.07
f_3	400	400	54 172	24 855	6.99
f_4	1 024	1024	8 99 792	1 13 075	182.53

对实验数据进行分析并作小结:

从表 2~表 4 的实验数据可以看出,GLLMA 算法具有很强的鲁棒性和稳定性:

- ① 对所选取的 benchmark,它们包含的局部极小点数相差很大,在控制参数基本保持不变的情况下,GLLMA 均能成功地找出所有目标函数的局部极小点;
- ② 对于低维的 benchmark,Multistart,MinFinder 和 GLLMA 算法运行时间差距较小,但当维数大幅增加后,由于 Multistart 保证可行域内每个点被选中的概率为 1,从而需要非常多的初始点,导致算法可能无法在有限时间内找出问题的全部局部极小点;GLLMA 可以通过 G-度量将初始点分配在局部极小点密集的区域,提高了算法的效率;
- ③ 在 GLLMA 算法中,由于计算 G-度量,增加了 Fevals 的计算次数.但实验结果表明,通过增加 Fevals 的计算次数,可以有效地减少 Gevals 的计算次数,随着 benchmark 维数的增加,这一优势更加明显.

4 总结与展望

求出函数所有局部极小点问题,是优化问题中一类困难的问题.通过对国内外文献的查阅,目前尚未有可靠和有效的解决方法.Minfinder 算法仅仅依赖于平均半径来减少局部优化算法的运行次数.在此基础上,我们提出了一种刻画局部极小点分布情况的 G-度量.通过该度量,可以更加有效地分配初始点,减少局部搜索算法运行的次数,数值实验为算法的正确性和有效性提供了依据.我们下一步的工作是针对高维复杂函数,结合进化算法等随机性算法以及并行计算技术,设计出更为有效的算法,为超高维的复杂函数局部极小点问题提供可靠的解决方案.同时,本文构造的 G-度量还可以应用在遗传算法、蚁群算法和粒子群算法等其他群智能算法中,以优化初始种群在可行域中的分布.

致谢 在此,谨向对本文评审中提出宝贵建议的匿名审稿专家表示诚挚的感谢.同时,对编辑部为本文付出辛勤劳动和默默奉献的各位责任编辑老师致以崇高的敬意,你们是科技进步不可或缺的动力.

References:

- [1] Leung YW, Wang YP. An orthogonal genetic algorithm with quantization for global numerical optimization. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2001,5(1):41-53. [doi: 10.1109/4235.910464]
- [2] Liu Q, Wang XY, Fu QM, Zhang YG, Zhang XF. Double elite coevolutionary genetic algorithm. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2012,23(4):768-775 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4040.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04040]
- [3] Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP. Optimization by simulated annealing. Science, 1983,220(4598):671-680. [doi: 10.1126/science.220.4598.671]
- [4] Corana A, Marchesi M, Martini C, Ridella S. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the "simulated annealing" algorithm. ACM Trans. on Mathematical Software, 1987,13(3):262-280. [doi: 10.1145/29380.29864]
- [5] Chelouah R, Siarry P. Tabu search applied to global optimization. European Journal of Operational Research, 2000,123(2):256-270. [doi: 10.1016/S0377-2217(99)00255-6]
- [6] Kovacevic-Vjelic VV, Cangalovic MM. TABU search methodology in global optimization. Computers and Mathematics with Applications, 1999,37(1):125-133. [doi: 10.1016/S0898-1221(99)00064-4]
- [7] Glover FW, Kochenberger GA. Hand Book of Metaheuristics. Holland: Kluwer Academic Publishers, 2003.

- [8] Salhi S, Queen NM. A hybrid algorithm for identifying global and local minima when optimizing functions with many minima. *European Journal of Operational Research*, 2004,155(1):51–67. [doi: 10.1016/S0377-2217(02)00871-8]
- [9] Boender GGE, Rinnooy Kan AHG, Timmer GT, Stougie L. A stochastic method for global optimization. *Mathematical Programming*, 1982,22(1):125–140. [doi: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01581033>]
- [10] Rinnooy Kan AHG, Timmer GT. Stochastic global optimization methods, Part I: Clustering methods. *Mathematical Programming*, 1987,39(1):27–56. [doi: 10.1007/BF02592070]
- [11] Rinnooy Kan AHG, Timmer GT. Stochastic global optimization methods, Part II: Multilevel methods. *Mathematical Programming*, 1987,39(1):57–78. [doi: 10.1007/BF02592070]
- [12] Tsoulos IG, Lagaris IE. Minfinder: Locating all the local minima of a function. *Computer Physics Communications*, 2006,174(2):166–179. [doi: 10.1016/j.cpc.2005.10.001]
- [13] Tsoulos IG, Stavrakoudis A. On locating all roots of systems of nonlinear equations inside bounded domain using global optimization methods. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010,11(4):2465–2471. [doi: 10.1016/j.nonrwa.2009.08.003]
- [14] Lagaris IE, Tsoulos IG. Stopping rules for box-constrained stochastic global optimization. *Applied Mathematics and Computation*, 2008,197(2):622–632. [doi: 10.1016/j.amc.2007.08.001]
- [15] Törn A, Žilinskas A. Global optimization. In: Goos G, Hartmanis J, eds. *Lecture Notes in Computer Science 350*, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987.
- [16] Wei QL, Wang RS, Xu B. *Introduction to Mathematical Programming*. Beijing: BeiHang University Press, 1991. 39–62 (in Chinese).
- [17] Ester M, Kriegel HP, Sander J, Xu XW. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. In: *Proc. of the 2nd Int'l Conf. on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD'96)*. Portland: AAAI Press, 1996. [doi: 10.1023/A:1009745219419]

附中文参考文献:

- [2] 刘全, 王晓燕, 傅启明, 张永刚, 章晓芳. 双精英协同进化算法. *软件学报*, 2012, 23(4): 768–775. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4040.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2012.04040]
- [16] 魏权龄, 王日爽, 徐兵. *数学规划引论*. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1991. 39–62.



刘杰(1977—),男,宁夏银川人,博士生,主要研究领域为全局优化算法设计.
E-mail: tears191@foxmail.com



王宇平(1961—),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为进化算法,数据挖掘.
E-mail: ywang@xidian.edu.cn