软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2013,24(7):1626−1637 [doi: 10.3724/SP.J.1001.2013.04285]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

逻辑之间的语义忠实语义满翻译*

申宇铭[1,2], 马 越[1,2], 曹存根[1], 眭跃飞[1], 王 驹[3]

[1](中国科学院 计算技术研究所 智能信息处理重点实验室,北京 100190)
[2](中国科学院 研究生院,北京 100049)
[3](广西师范大学 计算机科学与信息工程学院,广西 桂林 541004)
通讯作者: 申宇铭, E-mail: ymshen@mailbox.gxnu.edu.cn

摘 要: 翻译在计算机科学中的一个重要应用是实现一个逻辑与另一个逻辑在表达能力上的比较,以及利用目标逻辑的推理机实现源逻辑的推理.现有逻辑之间的翻译理论和性质没有深入研究逻辑的语义翻译,以及翻译是否保持不可满足性等问题.该文研究了一类同时保持公式的可满足性和不可满足性的翻译——语义忠实语义满翻译,给出了语义忠实语义满翻译的定义,比较了语义忠实语义满翻译与已有文献中翻译定义的区别和联系,讨论了逻辑的可靠性、完备性、可判定性、紧致性、公式的逻辑等价性,以及模型的初等等价性在语义忠实语义满翻译下被保持的问题.运用语义忠实语义满翻译的定义给出了逻辑之间的同义性定义,并证明了同义关系是逻辑之间的一个等价关系.
关键词: 翻译;语义忠实语义满翻译;逻辑同义性
中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

中文引用格式: 申宇铭,马越,曹存根,眭跃飞,王驹.逻辑之间的语义忠实语义满翻译.软件学报,2013,24(7):1626−1637. http://www. jos.org.cn/1000-9825/4285.htm

英文引用格式: Shen YM, Ma Y, Cao CG, Sui YF, Wang J. Faithful and full translations between logics. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2013,24(7):1626−1637 (in Chinese). http://www.jos.org.cn/1000-9825/4285.htm

Faithful and Full Translations Between Logics

SHEN Yu-Ming[1,2], MA Yue[1,2], CAO Cun-Gen[1], SUI Yue-Fei[1], WANG Ju[3]

[1](Key Laboratory of Intelligent Information Processing, Institute of Computing Technology, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)
[2](Graduate University, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)
[3](School of Computer Science and Information Engineering, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)
Corresponding author: SHEN Yu-Ming, E-mail: ymshen@mailbox.gxnu.edu.cn

Abstract: In computer science, an important application of translations includes comparing the expressive power among logics to achieve reasoning tasks of a logic in another defined logic. General properties of translations found in the literature do not give a comprehensive study on semantically translations and the preservation of the unsatisfiability. To preserve the satisfiability and the unsatisfiability of formulas, the definition of faithful and full translation is given, in this paper, and connections between the faithful and full translation, and other definitions of translations in the literature are discussed. Some properties of logics, such as the soundness, the completeness, the decidability, the compactness, the logical equivalence of formulas and the elementary equivalence of models, which are characterized by the existence of faithful and full translations between logics are also studied. By definition of faithful and full translation, the concept of synonymous logics is introduced and the proof for the equivalence of the synonymous relation is also given.
Key words: translation; faithful and full translation; synonymy between logics

---

* 基金项目: 国家自然科学基金(60496326, 60573063, 60573064, 60773059, 61103169); 国家高技术研究发展计划(863)(2007AA01Z325)
收稿时间: 2010-04-18; 定稿时间: 2012-04-16

形式系统之间的翻译(转换、归约)是计算机科学理论中的基本方法.在 20 世纪 30 年代~60 年代,给出众多的计算系统(比如图灵机、自动机、形式文法等等)以后产生的一个问题就是这些计算系统的计算能力上的等价性.文献[1,2]给出了这些计算系统的计算能力上的等价性.即,图灵机、自动机、形式文法等计算模型的可计算函数类是相同的.洪加威[3]给出了这些计算系统在计算复杂性上的等价性,比如,一类问题在图灵机上是 NP 完全的当且仅当这类问题在形式文法上是 NP 完全的.

一个逻辑是一个形式系统,逻辑之间的翻译(转换、归约)是一个经典的、但近 10 年来越来越受到重视的逻辑问题[4].翻译在计算机科学中的重要应用主要表现在以下两个方面:一是实现一个逻辑(源逻辑)与另一个逻辑(目标逻辑)在表达能力上的比较;二是利用目标逻辑的推理机实现源逻辑的推理任务[5].比如,van Benthem[6]利用命题模态逻辑到一阶逻辑的翻译,建立了命题模态逻辑表达能力的刻画定理,精确地给出了命题模态逻辑公式与一阶逻辑公式等价的充分必要条件.Borgida 等人[7−10]利用描述逻辑到一阶逻辑的翻译,比较不同描述逻辑系统与一阶逻辑在表达能力上的差异.Ohlbach 等人[4,11−13]建立命题模态逻辑到一阶逻辑的翻译,将命题模态逻辑的推理问题转换为一阶逻辑的推理问题,从而避免在命题模态逻辑中专门设计推理机.上述这些应用成功实现的一个重要前提是,我们必须在两个逻辑之间建立合理的、巧妙的翻译.

一般来说,这样的翻译具备如下两条逻辑性质[4,9,10]:

- 可靠性(soundness):对任意公式φ,如果φ可满足,则翻译后的公式φ'也可满足;
- 完备性(completeness):对任意公式φ,如果φ'可满足,则φ也可满足.

由翻译的可靠性和完备性两条逻辑性质可知,公式的可满足性在可靠和完备的翻译下被保持,即φ可满足,当且仅当φ'也是可满足的.但是这样的翻译不一定保持不可满足性,即可靠的和完备的翻译可以将不可满足的公式翻译为可满足的公式.例如:一阶模态逻辑到对应物理论(counterpart theory)就有 3 种不同形式的可靠的和完备的翻译,它们分别是 Lewis 的翻译[14]、Forbes 的翻译[15]和 Ramachandran 的翻译[16].Fara 和 Williamson[17]举例指出,这 3 种翻译均存在把一阶模态逻辑中不可满足公式翻译成对应物理论中的可满足公式.

造成这一问题的主要原因是,在建立翻译时只是考虑了语言间的翻译和公式间的翻译,没有建立其相应的语义翻译.如果考虑逻辑间模型的翻译并且源逻辑的模型类被翻译为目标逻辑的模型类的真子类,那么可靠的和完备的翻译可以将不可满足的公式翻译为可满足的公式.为了确保源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式、不可满足公式翻译为目标逻辑的不可满足公式,在文献[18]中,我们提出了如下两条逻辑性质:

- 语义忠实性(faithfulness):对任意公式φ,对任意的源逻辑的模型 M 和赋值 v,M,v 满足φ,当且仅当翻译后的模型 M'和赋值 v'也满足翻译后的公式φ';
- 语义满性(fullness):对任意公式φ',对任意的目标逻辑的模型 M''和赋值 v'',如果 M''和 v''满足翻译后的公式φ',则总存在φ的可满足模型 M 和赋值 v,使得 M 翻译后等于 M'',v 翻译后等于 v''.

翻译的语义忠实性是一个翻译的可靠性和完备性之和,具备语义忠实性的翻译将源逻辑的可满足公式翻译为目标逻辑的可满足公式.语义满性是要求目标逻辑的每一个满足φ'的模型和赋值,都能在源逻辑中找到相应的模型和赋值满足φ',同时,具备语义忠实性和语义满性的翻译将源逻辑的不可满足公式翻译为目标逻辑的不可满足公式.比如,二阶逻辑在标准语义下到一阶逻辑的翻译是一个语义忠实的但不是语义满的翻译.Boolos[19]曾指出,二阶逻辑公式到一阶集合论公式的翻译没有把二阶永真公式翻译为集合论的定理.如果将二阶逻辑的语义由标准语义扩展为 Henkin 语义[20],那么可以建立二阶逻辑到一阶逻辑具备语义忠实性和语义满性的翻译.

逻辑之间的翻译本身是一个复杂的过程,到目前为止,还没有一个公认的判定一个翻译好坏的标准;而同时,保持公式的可满足性和不可满足性是翻译的基本要求.

如果一个翻译σ同时具备语义忠实性和语义满性,那么我们称σ是一个语义忠实语义满翻译.本文从逻辑语义模型的角度讨论逻辑之间的翻译问题,研究一类同时保持公式的可满足性和不可满足性的翻译——语义忠实语义满翻译,在确保利用目标逻辑推理机实现源逻辑推理的同时不会推出多余的结论和保持逻辑的元性质(比如可靠性、完备性、紧致性等)所起的作用.

本文第 1 节将给出语义忠实语义满翻译的定义和命题模态逻辑到一阶逻辑标准关系翻译(standard relational translation)的例子,并证明公式的可满足性和不可满足性在语义忠实语义满的翻译下被保持,以及标准关系翻译是一个语义忠实语义满翻译.第 2 节讨论语义忠实语义满翻译与已有文献中若干逻辑之间翻译定义的区别与联系,以及语义忠实语义满翻译在确保目标逻辑推理机不会推出多余结论所起的作用.第 3 节讨论语义忠实语义满翻译在保持逻辑的可靠性、完备性、可判定性、紧致性、公式的逻辑等价性以及模型的初等等价性所起的作用.第 4 节运用语义忠实语义满翻译的定义,给出两个逻辑之间同义性的概念.一个源逻辑与目标逻辑是同义的,当且仅当源逻辑到目标逻辑和目标逻辑到源逻辑均存在语义忠实语义满的翻译.进一步证明逻辑之间的同义关系是一个等价关系,从而给出逻辑之间的一个等价划分.第 5 节是结论和工作展望.

1 语义忠实语义满翻译

本节首先给出逻辑之间翻译的定义,其次给出命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译的例子,然后给出语义忠实语义满翻译的定义,最后证明公式的可满足性和不可满足性在语义忠实语义满的翻译下被保持,以及标准关系翻译是一个语义忠实语义满翻译.

一个逻辑是由逻辑的语言、语法和语义这 3 部分组成,其中,语言部分由非逻辑符号和逻辑符号组成;语法部分是由公式及公式的形成规则、推理公理和推理规则组成的公理系统;语义部分由模型和赋值组成(如果一个逻辑的语义部分没有赋值,比如命题逻辑,那么语义部分只考虑模型).比如,命题模态逻辑由以下 3 部分组成.

- 命题模态逻辑的语言:$\mathcal{L}$ 包含下列非逻辑符号:
  - (1) 可数多个命题变量符号:$p_0,p_1,\ldots$;
  - 另外,还包含下列逻辑符号:
  - (2) 模态词:$\Box$;
  - (3) 逻辑联结词:$\neg,\rightarrow$;
  - (4) 括号和标点:(,).
- 命题模态逻辑的语法:
  - (1) 命题模态逻辑的一个公式是一个符号串,定义为$\varphi=p|\neg\psi|\psi\rightarrow\theta|\Box\psi$.
  - (2) 命题模态逻辑的推理公理:
    - ✧ $\varphi\rightarrow(\theta\rightarrow\varphi)$;
    - ✧ $\varphi\rightarrow((\psi\rightarrow\theta)\rightarrow((\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\varphi\rightarrow\theta)))$;
    - ✧ $(\neg\psi\rightarrow\neg\varphi)\rightarrow((\neg\psi\rightarrow\varphi)\rightarrow\psi)$;
    - ✧ $(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box\varphi\rightarrow\Box\psi)$.
  - (3) 命题模态逻辑的推理规则:
    - ✧ 分离规则:由φ和$\varphi\rightarrow\psi$推出ψ;
    - ✧ 必然规则:由φ推出$\Box\varphi$.

上面我们给出的命题模态逻辑称为命题模态逻辑的 K 系统.如果在 K 公理系统中再添加$\Box\varphi\rightarrow\varphi$,则可以得到命题模态逻辑的 T 系统;如果在 K 公理系统中再添加$\Box\varphi\rightarrow\Diamond\varphi$,则可以得到命题模态逻辑的 D 系统.

- 命题模态逻辑的语义:命题模态逻辑的一个模型 M 是一个三元组(W,R,I),其中,W 是可能世界的集合;R 是 W 上的一个二元关系;I 是一个解释,使得:对任意的命题变量符号 p 和可能世界 w,$I(p,w)\in\{0,1\}$.

由此,逻辑之间的一个翻译是由语言层翻译、语法层翻译和语义层翻译组成,其中,语法层翻译是由公式间的翻译、推理公理间的翻译和推理规则间的翻译组成;语义层翻译是由模型间的翻译和赋值间的翻译组成.本文暂时先不讨论推理公理和推理规则间的翻译.

任意给定两个逻辑 S,S',一个 S 到 S'的翻译定义如下:

定义 1. 给定两个逻辑 S 和 S',一个 S 到 S'的翻译σ是满足如下条件的一个映射:

(1) 语言层:如果 S 语言中的符号在 S'的语言中存在对应关系,那么 S 中的非逻辑符号和逻辑符号,σ分别映射为 S'中的非逻辑符号和逻辑符号;

(2) 语法层:对 S 中的任意公式φ,σ映射φ为 S'中的公式;

(3) 语义层:对 S 中的任意模型 M,σ映射 M 为 S'中的模型;对 S 中的任意一个模型 M 上的任意一个赋值 v,σ映射 v 为$\sigma(M)$上的一个 S'赋值.

注 1:

(1) 定义 1 要求源逻辑的任意一个公式翻译为目标逻辑的一个公式.由命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译,这样的翻译是将命题模态逻辑的一个公式φ,在一个模型 M 的一个可能世界 w 中的真值性翻译到一阶逻辑中的一个公式,所以定义 1 中的映射σ应理解为允许带参数的翻译;

(2) 定义 1 要求源逻辑的一个模型翻译为目标逻辑的一个模型,源逻辑的一个赋值翻译为目标逻辑的一个赋值,但是并不是所有的逻辑语言都包含变量符号,比如命题逻辑、命题模态逻辑,因此,如果两个逻辑语言都包含变量符号,那么源逻辑的赋值被映射为目标逻辑的赋值;如果两个逻辑语言都不包含变量符号,那么两个逻辑没有赋值间的对应关系,比如命题逻辑到直觉命题逻辑的翻译;如果两个逻辑语言中的一方含有变量符号而另一方不含变量符号,那么映射σ应理解为一个偏函数,即允许赋值间没有对应关系,比如命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译.

Kerber 在文献[21,22]中给出了如下逻辑之间翻译的定义:

定义 2. 给定两个逻辑 S 和 S',一个 S 到 S'的翻译σ是满足如下条件的一个映射:

- 对 S 语言中的任意非逻辑符号 s,σ映射 s 为 S'中的非逻辑符号;
- 对 S 中的任意公式集合Σ,σ映射Σ为 S'中的公式集合.

定义 1 与定义 2 的区别在于,定义 1 在语言层翻译增加了逻辑符号的翻译,考虑了语义层翻译,增加了模型和赋值间的翻译.下面我们以命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译为例来说明定义 1.

例 1:设σ_1是命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译,翻译以后的一阶逻辑语言 $\mathcal{L}'$包含下列符号:

(1) 变量符号 $w_0,w_1,\ldots$;

(2) 一元谓词符号 $p_1,p_2,\ldots$;

(3) 特殊二元谓词符号:$\boldsymbol{R}$.

- 语言层翻译

命题模态逻辑语言中的命题变量符号 p 对应于一阶逻辑语言的一元谓词符号 $\boldsymbol{p}$;逻辑联结词$\neg,\rightarrow$分别对应于一阶逻辑语言的逻辑联结词$\neg,\rightarrow$;括号和标点(,)对应于一阶逻辑的括号和标点(,);命题模态逻辑模型中的可能世界 w 对应于一阶逻辑语言中的变量符号 $\boldsymbol{w}$;命题模态逻辑模型 M 中的可达关系 R 对应于一阶逻辑语言中的特殊二元谓词符号 $\boldsymbol{R}$,即通过在目标逻辑的语言中添加变量符号和特殊的谓词符号来表达源逻辑的语义信息;模态词$\Box$在一阶逻辑语言中没有对应,但是,当模态词$\Box$在命题模态逻辑的公式中出现,在进行公式间的翻译时,特殊的谓词符号 $\boldsymbol{R}$ 在被翻译的公式中出现.

- 语法层翻译

σ_1将命题模态逻辑的一个公式φ,在模型 M 的一个可能世界 w 中的真值性翻译到一阶逻辑中的一个公式,其中,W 中的元素 w 翻译为一阶逻辑中的变量符号 $\boldsymbol{w}$.对于任何一个可能世界 w,设命题模态逻辑的公式φ带参数 w 的翻译为$\sigma_1(\varphi,w)$,则有:

$$\sigma_1(\varphi,w)=\begin{cases} p(w), & \text{如果}\varphi=p \\ \neg\sigma_1(\psi,w), & \text{如果}\varphi=\neg\psi \\ \sigma_1(\psi,w)\rightarrow\sigma_1(\theta,w), & \text{如果}\varphi=\psi\rightarrow\theta \\ \forall w'(R(w,w')\rightarrow\sigma_1(\psi,w')), & \text{如果}\varphi=\Box\psi \end{cases}.$$

- 语义层翻译

任意给定命题模态逻辑的模型 M,构造相应的一阶逻辑的模型$\sigma_1(M)=M'=(N',I')$和赋值 v'如下:

(1) $N'=W$;

(2) $I'(p)=\{w\in W:I(p,w)=1\}$;

(3) $I'(\boldsymbol{R})=R$;

(4) $v'(\boldsymbol{w})=w$.

注 2:严格地说,我们在这里假设命题模态逻辑的模型 M 中的可能世界集合 W 到一阶逻辑的可能世界变量集合之间存在一个满单射 f,$f(w)$可以看做是 W 中的元素 w 语义语法化后的对象.根据上述假设,σ_1 定义为

$$\sigma_1(\varphi,w)=\begin{cases}p(f(w)), & \text{如果}\varphi=p\\ \neg\sigma_1(\psi,w), & \text{如果}\varphi=\neg\psi\\ \sigma_1(\psi,w)\to\sigma_1(\theta,w), & \text{如果}\varphi=\psi\to\theta\\ \forall w'(R(f(w),w')\to\sigma_1(\psi,f^{-1}(w'))), & \text{如果}\varphi=\Box\psi\end{cases}.$$

这里,f^{-1} 表示 f 的逆函数.

命题模态逻辑到一阶逻辑翻译的整个过程如图 1 所示.

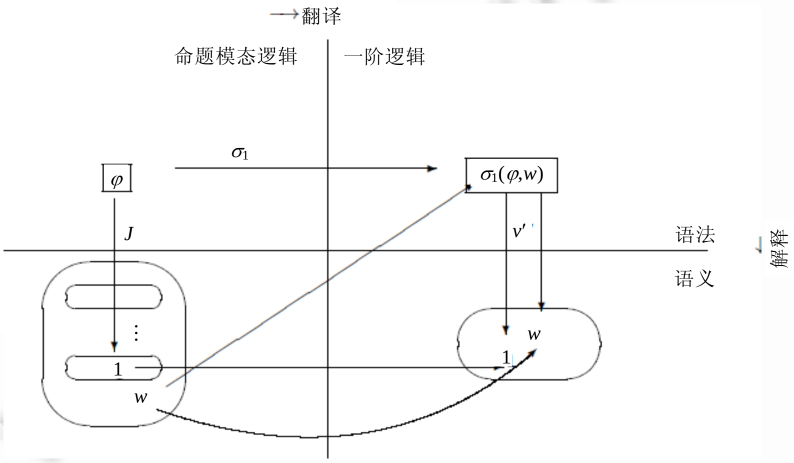

Fig.1 The translation from propositional modal logic into first-order logic

图 1 命题模态逻辑到一阶逻辑的翻译过程

在图 1 中:φ表示命题模态逻辑的公式,该公式在模型 M、可能世界 w 中为真(图中用 1 表示);翻译σ把公式φ和可能世界 w 翻译为一阶逻辑公式$\sigma(\varphi,\boldsymbol{w})$,该公式在模型 M'、赋值 v'下为真(图中用 1 表示),且 $v'(\boldsymbol{w})=w$.命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译是把命题模态逻辑的公式和模型中的可能世界混合翻译成一阶逻辑的公式,在这个翻译中,有一个语义信息语法化的过程,即,命题模态逻辑中的可能世界 w 翻译为一阶逻辑的可能世界变量 $\boldsymbol{w}$.

任意给定两个逻辑 S,S',下面从一个翻译必须同时保持公式的可满足性和不可满足性这一基本要求出发,给出语义忠实语义满翻译的定义:

定义 3. 设σ是 S 到 S'的一个翻译,如果σ还满足如下两个条件:

(1) 对于任意给定的 S 上的公式φ、模型 M、赋值 v 都有

$$(M,v)\vDash\varphi,\text{当且仅当}(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\varphi).$$

(2) 对于任意给定的 S 上的公式φ、任意 S'的模型 M'、赋值 v'都有:如果$(M',v')\vDash\sigma(\varphi)$,则存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得

$$(M,v)\vDash\varphi\text{并且}\sigma(M)=M',\sigma(v)=v',$$

那么称σ是一个语义忠实语义满翻译.

由定义 3 可知,公式的可满足性和不可满足性在语义忠实语义满的翻译下被保持.

命题 1. 如果σ是 S 到 S'的一个语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,φ在 S 中可满足当且仅当$\sigma(\varphi)$在 S'中可满足.

命题 2. 如果σ是 S 到 S'的一个语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,φ在 S 中不可满足当且仅当$\sigma(\varphi)$在 S'中不可满足.

证明:假设φ在 S 中不可满足但是$\sigma(\varphi)$在 S'中可满足,那么存在模型 M'和赋值 v',使得$(M',v')\vDash\sigma(\varphi)$.由语义忠实语义满翻译的条件(2),则有:$S$ 的模型 M 和赋值 v 使得$(M,v)\vDash\varphi$,这与φ在 S 中不可满足相矛盾;反之,若$\sigma(\varphi)$在 S'中不可满足但是φ在 S 中可满足,那么存在 S 模型 M 和赋值 v,使得$(M,v)\vDash\varphi$.由语义忠实语义满翻译的条件(1),则有:$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash\sigma(\varphi)$,这与$\sigma(\varphi)$在 S'中不可满足相矛盾. □

由定义 3,施归纳于公式φ的结构,可以证明命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译是一个语义忠实语义满翻译.

定理 3. 命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译是一个语义忠实语义满翻译.

证明:根据模型的构造,施归纳于公式φ的结构.这里仅列举原子公式的情形,其他情形与此类似.

若$\varphi=p$.因为$(M,w)\vDash p$ 当且仅当 $I(p,w)=1$,所以 $w\in I'(p)=\{w\in W:I(p,w)=1\}$.即,$(\sigma_1(M),v')\vDash p(\boldsymbol{w})$.对任意一阶逻辑的模型 $M'=(U',I')$和赋值 v',如果$(M',v')\vDash p(\boldsymbol{w})$,那么相应的命题模态逻辑的模型 $M=(W,R,I)$构造如下:

- $W=U'$;
- $I(p,w)=1$ 当且仅当 $w\in I'(p)$;
- $R=I'(\boldsymbol{R})$.

由上述模型的构造以及例 1 中的语义层翻译则有:$\sigma_1(M)=M'$并且$(M,w)\vDash p$. □

2 语义忠实语义满翻译与若干已有翻译定义的区别与联系

在本节,我们讨论语义忠实语义满翻译与已有文献中给出的若干翻译定义的区别与联系,以及语义忠实语义满翻译在确保目标逻辑推理机不会推出多余结论所起的作用.在讨论之前,我们先给出翻译的模型单、赋值单、否定可分配以及公式满这 4 个定义,并证明例 1 的翻译是模型单的、否定可分配的但不是公式满的翻译.

定义 4. 一个翻译σ是模型单的是指,对 S 的任意两个模型 M_1,M_2,如果 $M_1\neq M_2$,那么$\sigma(M_1)\neq\sigma(M_2)$.

命题 4. 命题模态逻辑到一阶逻辑模型间的翻译是一个单射.

证明:对任意两个命题模态逻辑的模型 $M_1=(W_1,R_1,I_1),M_2=(W_2,R_2,I_2)$,如果 $M_1\neq M_2$,那么由命题模态逻辑模型的定义则有:或者 $W_1\neq W_2$ 或者 $R_1\neq R_2$ 或者 $I_1\neq I_2$:

- 如果 $W_1\neq W_2$,那么由σ_1 的语义层翻译就有 $N_1'\neq N_2'$,即$\sigma_1(M_1)\neq\sigma_1(M_2)$;
- 如果 $R_1\neq R_2$,那么由σ_1 的语义层翻译就有 $I_1'(\boldsymbol{R})\neq I_2'(\boldsymbol{R})$, 即$\sigma_1(M_1)\neq\sigma_1(M_2)$;
- 如果 $I_1\neq I_2$,那么存在某个命题变量符号 p,使得 $I_1(p)\neq I_2(p)$.由σ_1 的语义层翻译则有 $I_1'(p)\neq I_2'(p)$, 即$\sigma_1(M_1)\neq\sigma_1(M_2)$. □

定义 5. 一个翻译σ是赋值单的是指,对 S 的任意模型 M 上的两个赋值 v_1,v_2,如果 $v_1\neq v_2$,那么$\sigma(v_1)\neq\sigma(v_2)$.

定义 6. 一个翻译σ是否定可分配的是指,对 S 的任意公式φ,$\sigma(\neg\varphi)=\neg\sigma(\varphi)$.

由例 1 给出的公式间的对应关系可知:命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译是否定可分配的.

定义 7. 一个翻译σ是公式满的是指,对任意 S'的公式σ',总存在 S 的公式σ,使得$\sigma(\varphi)=\varphi'$.

命题 5. 命题模态逻辑到一阶逻辑的公式间翻译不是满射.

证明:令$\varphi'=\forall\boldsymbol{w}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})$,则$\varphi'$是一个一阶逻辑的公式.因为$\varphi'$包含特殊的谓词符号 $\boldsymbol{R}$,所以如果存在命题模态逻辑的某个公式φ满足$\sigma_1(\varphi,w)=\varphi'$,那么这样的公式$\varphi$应该包含模态词□.由命题模态逻辑到一阶逻辑的公式间翻译可知,如果某个公式包含模态词□,那么这样的公式翻译为一阶逻辑的公式必定包含蕴含联结词.因为φ'不含蕴含联结词,所以不存在命题模态逻辑的公式φ满足$\sigma_1(\varphi,w)=\varphi'$.即,命题模态逻辑到一阶逻辑公式间的翻译不是满射. □

Epstein[23]从可满足关系角度定义了一个命题逻辑 S_1 到另一个命题逻辑 S_2 的翻译是满足如下条件的一个

永真映射:对 S_1 的任意公式集合$\Gamma\cup\{\varphi\}$, $\Gamma\models_{S_1}\varphi$ 当且仅当 $\sigma(\Gamma)\models_{S_2}\sigma(\varphi)$.

下面我们证明:如果源逻辑到目标逻辑的翻译是模型单的、赋值单的语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式集合Φ和公式φ,$\Phi\models_S\varphi$当且仅当$\sigma(\Gamma)\models_{S'}\sigma(\varphi)$.即,语义忠实语义满翻译如果还满足模型单和赋值单的条件,那么语义忠实语义满翻译的定义与 Epstein 给出的翻译的定义是相吻合的.

命题 6. 如果σ是 S 到 S'的模型单的、赋值单的语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式集合Φ和公式φ, $\Phi\models_S\varphi$当且仅当$\sigma(\Phi)\models_{S'}\sigma(\varphi)$.

证明:假设$\Phi\models_S\varphi$.对 S'的所有模型 M'和赋值 v',如果$(M',v')\models_{S'}\sigma(\varphi)$,那么由$\sigma$是语义忠实语义满的翻译则有:$S$ 的模型 M 和赋值 v 满足$\sigma(M)=M'$,$\sigma(v)=v'$,并且$(M,v)\models_S\Phi$;又因为$\Phi\models_S\varphi$,所以$(M,v)\models_S\varphi$;再根据σ是语义忠实语义满的,就有$(M',v')\models_{S'}\sigma(\varphi)$;

反之,假设$\sigma(\Phi)\models_{S'}\sigma(\varphi)$.对 S 的所有模型 M 和赋值 v,如果$(M,v)\models_S\Phi$,那么由σ是语义忠实语义满的,则有$(\sigma(M),\sigma(v))\models_{S'}\sigma(\Phi)$,从而则有$(\sigma(M),\sigma(v))\models_{S'}\sigma(\varphi)$;又因为$\sigma$是模型单的、赋值单的和语义忠实语义满的,所以有$(M,v)\models_S\varphi$. □

本文考虑的语义忠实语义满翻译的定义与 Epstein 给出的翻译的定义的区别在于:语义忠实语义满翻译描述的是源逻辑的模型、赋值以及公式与源逻辑的可满足关系所形成的元断言,即$(M,v)\models_S\varphi$和目标逻辑的模型赋值以及翻译后的公式与目标逻辑的可满足关系所形成的元断言,即$(M',v')\models_{S'}\sigma(\varphi)$之间的关系;而 Epstein 的定义描述的是源逻辑的公式集合和公式与源逻辑的可满足关系所形成的元断言,即 $\Gamma\models_{S_1}\varphi$ 与目标逻辑的翻译后的公式集合和公式与目标逻辑的可满足关系所形成的元断言,即 $\sigma(\Gamma)\models_{S_2}\sigma(\varphi)$ 之间的关系.

由 Prawitz,Malmnäs[24]的翻译定义以及 Feitosa,Ottaviano[25]的保守映射定义,从可推导关系来刻画逻辑之间的一个翻译.给定两个逻辑 S 和 S',一个 S 到 S'的翻译σ是满足如下条件的一个映射:对任意 S 中的公式φ,都有$\vdash_S\varphi$当且仅当$\vdash_{S'}\sigma(\varphi)$.

下面我们证明:如果 S,S'的语言都包含否定联结词并且σ是一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,$\vdash_S\varphi$当且仅当$\vdash_{S'}\sigma(\varphi)$.即,语义忠实语义满翻译的定义与 Prawitz,Malmnäs 的翻译定义以及 Feitosa,Ottaviano 的保守映射定义是相吻合的.

命题 7. S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意公式φ,有

$$\vdash_S\varphi\text{当且仅当}\vdash_{S'}\sigma(\varphi).$$

证明:对 S 的任意公式φ,如果$\vdash_S\varphi$但是$\nvdash_{S'}\sigma(\varphi)$,那么存在 S'的模型 M'和赋值 v',使得$(M',v')\models_{S'}\neg\sigma(\varphi)$.因为$\sigma$是语义忠实语义满的,并且对任意的公式$\varphi$,$\sigma(\neg\varphi)=\neg\sigma(\varphi)$,所以存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得$(M,v)\models_S\neg\varphi$.这与$\vdash_S\varphi$相矛盾;

反之,如果$\vdash_{S'}\sigma(\varphi)$但是$\nvdash_S\varphi$,那么存在 S 的模型 M 和赋值 v,使得$(M,v)\models_S\neg\varphi$.因为$\sigma$是语义忠实语义满的,并且对任意的公式$\varphi$,$\sigma(\neg\varphi)=\neg\sigma(\varphi)$,所以就有$(\sigma(M),\sigma(v))\models_{S'}\neg\sigma(\varphi)$.这与$\vdash_{S'}\sigma(\varphi)$相矛盾. □

与 Prawitz,Malmnäs 的翻译定义以及 Feitosa,Ottaviano 的保守映射定义相比,语义忠实语义满翻译强调的是语义信息,是从可满足关系来刻画一个翻译;而 Prawitz,Malmnäs 以及 Feitosa,Ottaviano 关于翻译的定义强调的是语法信息,是从可推导关系来刻画一个翻译.

命题 7 还表明了如下的事实:如果源逻辑到目标逻辑之间能够建立否定可分配的语义忠实语义满的翻译,那么若运用目标逻辑的推理机来实现源逻辑的推理,则目标逻辑的推理机不会推出多余的结论.由例 1 和定理 3 可知,命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译是一个否定可分配的语义忠实语义满翻译.由命题 7 可知,当运用一阶逻辑的推理机来实现命题模态逻辑的推理时,一阶逻辑的推理机不会推出多余的结论.

3 语义忠实语义满翻译的若干性质

本节首先证明语义忠实语义满翻译满足传递性.即,如果σ是 S 到 S'的一个语义忠实语义满翻译,τ是 S'到 S''

的一个语义忠实语义满翻译,令$\rho=\sigma\circ\tau$表示ρ是σ和τ的复合函数,那么ρ是 S 到 S''的一个语义忠实语义满翻译.

命题 8. 如果σ是 S 到 S'的一个语义忠实语义满翻译,τ是 S'到 S''的一个语义忠实语义满翻译,那么$\rho=\sigma\circ\tau$是 S 到 S''的一个语义忠实语义满翻译.

证明:按照语义忠实语义满翻译的定义直接验证. □

接下来,我们讨论逻辑的可靠性、完备性、可判定性、紧致性、公式的逻辑等价性及模型的初等等价性在语义忠实语义满翻译下的可保持问题.一个逻辑 S 是可靠的当且仅当对 S 的任意公式φ,如果φ是 S 的一个定理,那么φ是 S 的一个永真公式.接下来我们证明:如果源逻辑到目标逻辑存在否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么目标逻辑的可靠性蕴涵了源逻辑的可靠性.

命题 9. 设 S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么若 S'是可靠的,则 S 也是可靠的.

证明:对 S 的任意公式φ,如果φ是 S 的定理,那么由命题 7 可得:$\sigma(\varphi)$是 S'的定理.因为 S'是可靠的,所以$\sigma(\varphi)$是一个永真公式.由命题 2 则有:φ是 S 的一个永真公式,即 S 是可靠的. □

一个逻辑 S 是完备的当且仅当对 S 的任意公式φ,若φ是一个永真公式,则φ是 S 的一个定理.下面我们证明:若源逻辑到目标逻辑存在否定可分配的语义忠实语义满翻译,则目标逻辑的完备性蕴涵了源逻辑的完备性.

命题 10. 设 S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的一个否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么若 S'是完备的,则 S 也是完备的.

证明:对 S 的任意公式φ,如果φ是一个永真公式,那么由命题 2 则有:$\sigma(\varphi)$是 S'一个永真公式.因为 S'是完备的,所以$\sigma(\varphi)$是 S'的一个定理.由命题 7 则有:φ也是 S 的一个定理,即 S 是完备的. □

一个逻辑 S 是可判定的当且仅当存在一种算法,使得对该逻辑的任意一个公式φ,该算法在有穷步内得出φ是或者不是 S 的定理.我们将证明:如果源逻辑到目标逻辑存在公式间的翻译是可计算的、否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么目标逻辑的可判定性蕴涵了源逻辑的可判定性.

命题 11. 设 S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的语义忠实语义满翻译,并且σ还满足在公式间的翻译是可计算的、否定可分配的,那么若 S'是可判定的,则 S 也是可判定的.

证明:任意给定 S 的公式φ,因为σ在公式间的翻译是可计算的,所以$\sigma(\varphi)$是可确定的.因为 S'是可判定的,所以可以判定$\sigma(\varphi)$是或者不是 S'的定理.如果$\sigma(\varphi)$不是 S'的定理,那么存在 S'的模型 M'和赋值 v',满足

$$(M',v')\vDash_{S'}\neg\sigma(\varphi).$$

由σ是否定可分配的语义忠实语义满翻译可知,S 的模型 M 和赋值 v 满足$(M,v)\vDash_S\neg\varphi$,由此可知φ也不是 S 的定理.如果$\sigma(\varphi)$是 S'的定理但是φ不是 S 的定理,即存在 S 的模型 M 和赋值 v 满足$(M,v)\vDash_S\neg\varphi$,由σ是否定可分配的语义忠实语义满的翻译,则有$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash_{S'}\neg\sigma(\varphi)$.这与$\sigma(\varphi)$是 S'的定理相矛盾. □

命题模态逻辑系统 K,D,T,S4,S5 均是可判定的逻辑系统[26],而一阶逻辑是不可判定的,根据命题 11,我们有如下推论:

命题 12. 不存在一阶逻辑到命题模态逻辑系统 K,D,T,S4,S5 的可计算的、否定可分配的语义忠实语义满翻译. □

接下来我们证明:如果源逻辑到目标逻辑的翻译满足在公式间的翻译是可计算的、公式满的、否定可分配的语义忠实语义满翻译,那么源逻辑的可判定性蕴含了目标逻辑的可判定性.

命题 13. 设 S,S'的语言都包含否定联结词.如果σ是 S 到 S'的语义忠实语义满翻译,并且σ还满足在公式间的翻译是可计算的、否定可分配的及公式满的,那么若 S 是可判定的,则 S'也是可判定的.

证明:因为σ是公式满的,所以对任意的 S'的公式φ',存在 S 的公式φ,使得$\sigma(\varphi)=\varphi'$.因此,类似命题 11 的证明,我们可以把φ'是否是 S'的定理的问题转换为φ是否为 S 的定理问题;又因为 S 是可判定的,所以可得 S'也是可判定的. □

一个逻辑的紧致性定理是指,对 S 的任意公式集合Φ,Φ可满足当且仅当Φ的每一个有穷子集可满足.下面的命题说明:如果源逻辑到目标逻辑存在语义忠实语义满翻译,那么紧致性定理在目标逻辑中成立即蕴含了紧致

性定理在源逻辑中成立.

命题 14. 设σ是 S 到 S'的语义忠实语义满翻译,那么如果紧致性定理在 S'中成立,则紧致性定理在 S 中成立.

证明:对任意公式集合$\Phi\subseteq$Form($\mathcal{L}$)和任意有穷公式集合$\psi_0\subseteq\sigma(\Phi)$,存在$\Phi$的有穷公式集合$\Phi_0$,使得$\sigma(\Phi_0)=\psi_0$.因为$\sigma$是语义忠实语义满的翻译,所以有:如果$\Phi_0$ 可满足,那么ψ_0 也可满足.由于紧致性定理在 S'中成立,所以有:$\sigma(\Phi)$是可满足的;又因为σ是语义忠实语义满的,从而有:Φ是可满足的. □

由于紧致性定理在一阶逻辑中成立,而在二阶逻辑的标准语义下不成立,根据命题 14,有如下推论:

推论 15. 不存在二阶逻辑在标准语义下到一阶逻辑的语义忠实语义满翻译. □

对 S 的任意两个公式φ,ψ,如果对 S 的所有模型 M 和赋值 v 都有:$(M,v)\vDash_S\varphi$当且仅当$(M,v)\vDash_S\psi$,那么称φ和ψ是逻辑等价的两个公式.下面的命题 16 说明:如果源逻辑到目标逻辑存在模型单的、赋值单的语义忠实语义满翻译,那么任意两个在源逻辑中逻辑等价的公式φ,ψ当且仅当翻译后的公式$\sigma(\varphi),\sigma(\psi)$在目标逻辑中也是逻辑等价的.

命题 16. 设σ是 S 到 S'模型单的、赋值单的语义忠实语义满翻译,那么对 S 的任意两个公式φ,ψ,它们在 S 中逻辑等价当且仅当$\sigma(\varphi),\sigma(\psi)$在 S'中逻辑等价.

证明:设φ,ψ是 S 中的两个逻辑等价公式.对 S'的所有模型 M'和赋值 v',如果$(M',v')\vDash_{S'}\sigma(\varphi)$,那么由$\sigma$是语义忠实语义满翻译,则有 S 的模型 M 和赋值 v 满足:$\sigma(M)=M'$,$\sigma(v)=v'$并且$(M,v)\vDash_S\varphi$;又因为ψ与φ是逻辑等价的,所以有$(M,v)\vDash_S\psi$;再由σ是语义忠实语义满翻译,因此可得$(M',v')\vDash_{S'}\sigma(\psi)$.

类似地,可以证明:如果$(M',v')\vDash_{S'}\sigma(\psi)$,那么$(M',v')\vDash_{S'}\sigma(\varphi)$.即,$\sigma(\varphi)$与$\sigma(\psi)$在 S'中逻辑等价;

反之,对 S 的任意两个公式φ,ψ,如果$\sigma(\varphi),\sigma(\psi)$在 S'中逻辑等价,那么对 S 的所有模型 M 和赋值 v,如果$(M,v)\vDash_S\varphi$,那么由σ是语义忠实语义满翻译,则有$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash_{S'}\sigma(\varphi)$,从而有$(\sigma(M),\sigma(v))\vDash_{S'}\sigma(\psi)$;又因为$\sigma$是模型单的、赋值单的语义忠实语义满翻译,所以有$(M,v)\vDash_S\psi$.

类似地,可以证明:如果$(M,v)\vDash_S\psi$,那么$(M,v)\vDash_S\varphi$.即,φ与ψ在 S 中逻辑等价. □

讨论完公式的逻辑等价性在语义忠实语义满翻译下的可保持性问题,我们转向讨论模型的初等等价性在语义忠实语义满翻译下的可保持性问题.对 S 的任意模型 M,N:

M,N 是初等等价的当且仅当对 S 的任意句子φ,$M\vDash_S\varphi$当且仅当 $N\vDash_S\varphi$.

下面证明:如果源逻辑到目标逻辑的翻译是模型单的、公式满的语义忠实语义满翻译,那么 M,N 在 S 中初等等价当且仅当$\sigma(M),\sigma(N)$在 S'中初等等价.

命题 17. 设σ是 S 到 S'模型单的、公式满的语义忠实语义满翻译,那么 M,N 在 S 中初等等价当且仅当$\sigma(M)$,$\sigma(N)$在 S'中初等等价.

证明:对 S 的任意模型 M,N,假设$\sigma(M),\sigma(N)$在 S'中初等等价.如果对 S 的任意句子φ,$M\vDash_S\varphi$,那么由σ是语义忠实语义满翻译就有$\sigma(M)\vDash_{S'}\sigma(\varphi)$,从而有$\sigma(N)\vDash_{S'}\sigma(\varphi)$;再根据$\sigma$是模型单的语义忠实语义满翻译,于是有 $N\vDash_S\varphi$.

同样地,可以证明:如果 $N\vDash_S\varphi$,那么 $M\vDash_S\varphi$,即 M,N 在 S 中是初等等价的;

反之,如果 M,N 在 S 中是初等等价并且对 S'的任意句子φ',假设$\sigma(M)\vDash_{S'}\varphi'$,由$\sigma$是公式满的、模型单的语义忠实语义满翻译,则有 S 的公式φ满足$\sigma(\varphi)=\varphi'$并且 $M\vDash_S\varphi$,从而有 $N\vDash_S\varphi$;再由σ是语义忠实语义满翻译,则有$\sigma(N)\vDash_{S'}\varphi'$.

同样地,可以证明:如果$\sigma(N)\vDash_{S'}\varphi'$,那么$\sigma(M)\vDash_{S'}\varphi'$,即$\sigma(M),\sigma(N)$在 S'中是初等等价的. □

与命题 16 相比,命题 17 表明:源逻辑的模型初等等价性,在增加翻译是公式满的条件下,能够继承到目标逻辑中;但在大多数的情况下,源逻辑到目标逻辑的翻译都不是公式满的,比如命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译.如果源逻辑到目标逻辑的翻译不是公式满的,那么命题 17 就不一定成立.下面我们以命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系翻译为例来说明这一点.

由命题 5 可知,命题模态逻辑到一阶逻辑的标准关系不是公式满的.令 $M=(W,R,I)$和 $M'=(W',R',I')$分别是命题模态逻辑的两个模型,其中,

- $W=\{w\}$,$R=\{(w,w)|w\in W\}$,$I(p,w)=1$;

- $W'=\{w_i|i=1,2,...\}$,$R'=\{(w_i,w_{i+1})|i=1,2,...\}$,$I'(p,w_i)=1,i=1,2,...$

令 Z 是 M 到 M'的非空二元关系,使得对任意的 $w\in W,w_i\in W',(w,w_i)\in Z,i=1,2,...$

下面我们证明 Z 是 M 到 M'的互模拟关系,即,证明 Z 满足如下 3 条:

(1) 如果$(w,w')\in Z$,那么 $I(p,w)=I'(p,w')$;

(2) 如果$(w,w')\in Z,(w,v)\in R$,那么存在 $v'\in W'$,使得$(w',v')\in R',(v,v')\in Z$;

(3) 如果$(w,w')\in Z,(w',v')\in R$,那么存在 $v\in W$,使得$(w,v)\in R,(v,v')\in Z$.

命题 18. Z 是 M 到 M'的互模拟关系.

证明:因为 $I(p,w)=1,I(p,w_i)=1,i=1,2,...$,所以 Z 满足条件(1);

- 如果$(w,w_i)\in Z,(w,w)\in R$,由模型 M'中 R'的定义可知:存在 $w_{i+1}\in W',(w_i,w_{i+1})\in R'$并且$(w,w_{i+1})\in Z$.即,$Z$ 满足条件(2);
- 如果$(w,w_i)\in Z,(w_i,w_{i+1})\in R'$,由 M 中 R 的定义可知:存在 $w\in W,(w,w)\in R$ 并且$(w,w_{i+1})\in Z$.即,Z 满足条件(3).

由此可知,Z 是 M 到 M'的互模拟关系. □

根据文献[27]中的定理 2.20,如果命题模态模型 M,M'之间存在互模拟关系,那么 M,M'是初等等价的.下面我们证明:$\sigma_1(M),\sigma_1(M')$在仅含一元谓词符号和一个二元谓词符号的一阶逻辑中不是初等等价的.根据命题模态逻辑到一阶逻辑的语义层翻译,则有:

- $\sigma_1(M)=(N,J)$,其中,$N=W,J(p)=\{w\},J(R)=\{(w,w)\}$;
- $\sigma_1(M')=(N',J')$,其中,$N'=W',J'(p)=W',J'(R)=\{(w_i,w_{i+1})\},i=1,2,...\}$.

令$\varphi'=\forall \boldsymbol{wR}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})$,则$\sigma_1(M)\vDash\forall \boldsymbol{wR}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})$,但是$\sigma_1(M')\nvDash\forall \boldsymbol{wR}(\boldsymbol{w},\boldsymbol{w})$.即,$\sigma_1(M)$与$\sigma_1(M')$不是初等等价的.

4 逻辑的同义性

在本节,我们将运用语义忠实语义满翻译的概念建立逻辑之间的同义性定义,并证明逻辑之间的同义关系是一个等价关系.由此,给出了逻辑之间的一个等价划分.

定义 7. 如果 S 到 S'和 S'到 S 都存在语义忠实语义满翻译,那么就称 S 与 S'是同义的,记作 $S\backsim S'$.

下面证明:由语义忠实语义满翻译所诱导出的逻辑之间的同义关系是一个等价关系.

命题 19. 逻辑之间的同义关系是一个等价关系.

证明:

(i) 自反性.令σ是 S 到 S 的恒等映射,使得:

- 对 S 语言的非逻辑符号 $s,\sigma(s)=s$;
- 对 S 语言的逻辑符号 $h,\sigma(h)=h$;
- 对任意公式$\varphi,\sigma(\varphi)=\varphi$;
- 对任意模型 M 和赋值 $v,\varphi(M)=M,\varphi(v)=v$.

  由上述φ的定义可知,φ是一个 S 到 S 的语义忠实语义满翻译.即,$S\backsim S$;

(ii) 对称性.若 $S\backsim S'$,则 S 到 S'和 S'到 S 都存在语义忠实语义满翻译.由定义 8 可知,$S'\backsim S$;

(iii) 传递性.如果 $S\backsim S',S'\backsim S''$,那么存在 4 个翻译$\sigma,\sigma',\tau,\tau'$,使得:

- σ,σ'分别是 S 到 S'和 S'到 S 的语义忠实语义满翻译;
- τ,τ'分别是 S'到 S''和 S''到 S'的语义忠实语义满翻译.

令$\rho=\sigma\circ\tau,\rho'=\tau'\circ\sigma'$,则由命题 8 可知,$\rho,\rho'$都是语义忠实语义满翻译,从而有 $S\backsim S''$.

由上述 3 点可知,$\backsim$是逻辑之间的一个等价关系.

5 总结及进一步的工作展望

本文主要研究了逻辑之间一类同时保持公式的可满足性和不可满足性的翻译——语义忠实语义满翻译,在确保利用目标逻辑推理机实现源逻辑推理的同时不会推出多余的结论和保持逻辑的元性质,比如可靠性、完

备性、紧致性、可判定性、公式的逻辑等价性以及模型的初等等价性所起的作用.由逻辑之间语义忠实语义满翻译的定义,我们还给出了逻辑之间的同义性定义,并证明了逻辑之间的同义关系是一个等价关系,从而给出了逻辑之间的一个等价划分.

下一步的工作将分为两个方面:一方面,对任意给定的两个逻辑 S 与 S',S 与 S'之间存在语义忠实语义满的充分必要条件是什么;另一方面,围绕逻辑之间的同义性定义展开,我们将研究具体的命题模态逻辑系统(比如 K,D,T,S4,S5,B,KD45 等等)之间是否具有同义性.

References:

[1] Hopcroft JE, Ullman JD. Introduction to Automata Theory, Languages and Computation. 3rd ed., New Jersey: Addison-Wesley, 2006.

[2] Sipser M. Introduction to the Theory of Computation. Cambridge: PWS Publishing, 1997.

[3] Hong JW. Computation: Computability, Similarity and Duality. New York: Pitman, 1986.

[4] Schmidt RA, Hustadt U. The axiomatic translation principle for modal logic. ACM Trans. on Computational Logic, 2007,8(4): 1−55. [doi: 10.1145/1276920.1276921]

[5] Ohlbach H, Nonnengart A, de Rijke M, Gabbay D. Encoding two-valued nonclassical logics in classical logic. In: Robinson A, Voronkov A, eds. Handbook of Automated Reasoning. Amsterdam: Elsevier, 2001. 1403−1486.

[6] van Benthem J. Correspondence theory. In: Gabbay D, Guenthner F, eds. Handbook of Philosophical Logic, Vol.2: Extensions of Classical Logic. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983. 167−247.

[7] Borgida A. On the relative expressiveness of description logics and predicate logics. Artificial Intelligence, 1996,82(1-2):353−367. [doi: 10.1016/0004-3702(96)00004-5]

[8] Gradel E. Guarded fragments of first-order logic: A perspective for new description logics? In: Franconi E, De Giacomo G, Macgregor RM, Nutt W, Welty CA, eds. Proc. of the ’98 Int’l Workshop on Description Logics (DL’98). Trento: Istituto Trentino di Cultura, 1998. 5−8.

[9] Kurtonina N, de Rijke M. Expressive of concept expression in first-order description logics. Artificial Intelligence, 1999,107(2): 303−333. [doi: 10.1016/S0004-3702(98)00109-X]

[10] Hustadt U, Schmidt RA, Georgieva L. A survey of decidable first-order fragments and description logics. Journal of Relational Methods in Computer Science, 2004,1(1):251−276.

[11] de Nivelle H, de Rijke M. Deciding the guarded fragments by resolution. Journal of Symbolic Computation, 2003,35(1):21−58. [doi: 10.1016/S0747-7171(02)00092-5]

[12] Nonnengart A. First-Order modal logic theorem proving and functional simulation. In: Bajcsy R, ed. Proc. of the ’93 Int’l Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI’93). Chambéry: Morgan Kaufmann Publishers, 1993. 80−85.

[13] Ohlbach H, Schmidt R. Functional translation and second-order frame properties of modal logics. Journal of Logic and Computation, 1997,7(5):581−603. [doi: 10.1093/logcom/7.5.581]

[14] Lewis D. Counterpart theory and quantified modal logic. Journal of Philosophy, 1968,65(5):113−126. [doi: 10.2307/2024555]

[15] Forbes G. Counterparts, logic and metaphysics: Reply to Ramachandran. Analysis, 1990,50(3):167−173. [doi: 10.1093/analys/50.3.167]

[16] Ramachandran M. An alternative translation scheme for counterpart theory. Analysis, 1989,49(3):131−141. [doi: 10.1093/analys/49.3.131]

[17] Fara M, Williamson T. Counterparts and actuality. Mind, 2005,114(453):1−30. [doi: 10.1093/mind/fzi001]

[18] Shen YM, Ma Y, Cao CG, Sui YF, Wang J. Logical properties on translations between logics. Chinese Journal of Computers, 2009, 32(10):2091−2098 (in Chinese with English abstract).

[19] Boolos G. On second-order logic. Journal of Philosophy, 1975,72(16):509−527. [doi: 10.2307/2025179]

[20] Henkin L. Completeness in the theory of types. Journal of Symbolic Logic, 1950,15(2):159−171.

[21] Kerber M. How to prove higher order theorems in first order logic. In: Mylopoulos J, Reiter R, eds. Proc. of the ’91 Int’l Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI’91). San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1991. 137−142.

[22] Kerber M. On the translation of higher-order problems into first-order logic. In: Cohn T, ed. Proc. of the 11th ECAI. Amsterdam, Chichester: John Wiley and Sons, 1994. 145−149.

[23] Epstein RL. The Semantic Foundations of Logics, Vol.1: Propositional Logics. New York: Oxford University, 1995.

[24] Prawitz D, Malmnäs PE. A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. In: Schmidt H, *et al*., eds. Proc. of the Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 50. Amsterdam: Elsevier, 1968. 215−229.

[25] Feitosa HA, D'Ottaviano IML. Conservative translations. Annals of Pure and Applied Logic, 2001,108(1-3):205−227. [doi: 10. 1016/S0168-0072(00)00046-4]

[26] Gabbay D, Kurucz A, Wolter F, Zakharyaschev M. Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications. Amsterdam: Elsevier, 2003.

[27] Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. Modal Logic. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

附中文参考文献:

[18] 申宇铭,马越,曹存根,眭跃飞,王驹.不同逻辑间翻译的逻辑性质.计算机学报,2009,32(10):2091−2098.

申宇铭(1976－),男,广西桂林人,博士生,CCF 会员,主要研究领域为模态逻辑,描述逻辑.

E-mail: ymshen@mailbox.gxnu.edu.cn

马越(1984－),男,博士生,主要研究领域为模态逻辑,描述逻辑.

E-mail: ma-yue@mails.gucas.ac.cn

曹存根(1964－),男,博士,研究员,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为大规模知识获取.

E-mail: cgcao@ict.ac.cn

眭跃飞(1963－),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为模态逻辑.

E-mail: yfsui@ict.ac.cn

王驹(1950－)男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为人工智能.

E-mail: juwang500909@163.com