

## 求解等球 packing 问题的两个策略\*

余亮<sup>+</sup>, 黄文奇

(华中科技大学 计算机科学与技术学院, 湖北 武汉 430074)

### Two Strategies for Solving the Equal Sphere Packing Problem

YU Liang<sup>+</sup>, HUANG Wen-Qi

(School of Computer Science and Technology, HuaZhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

+ Corresponding author: E-mail: forrestyu1980@gmail.com

**Yu L, Huang WQ. Two strategies for solving the equal sphere packing problem. Journal of Software, 2012, 23(9):2285-2296 (in Chinese).** <http://www.jos.org.cn/1000-9825/4158.htm>

**Abstract:** Based on the quasi physical model, two heuristic strategies are proposed for dealing with the equal sphere packing problem. The fake sphere strategy guarantees that the results are rigorous. The serial symmetrical relocation strategy is designed to search a dense feasible configuration from a local optimal configuration. Through a personal computer with Pentium E6500 2.93GHz CPU, the study has densely packed up to 200 equal spheres in spherical container and up to 150 equal spheres in cubic container. The obtained results not only have better quality than that of the international best known records, but also greatly outnumbered them. Particularly, the study packed 68 equal spheres of radius 1 into a large sphere whose radius is smaller than 5, thus proved wrong a conjecture which alleges a large sphere of radius 5 can contain at most 67 equal spheres of radius 1.

**Key words:** the equal sphere packing problem; the quasi physical model; heuristic; the fake sphere strategy; serial symmetrical relocation strategy

**摘要:** 为求解等球 packing 问题,在拟物模型基础上提出两个启发式策略:伪球策略和序列对称换位策略。前者旨在保证获取精确解;后者则用于从局部最优布局出发搜索到紧凑的可行布局。在处理器为 Pentium E6500 2.93GHz 的 PC 机上进行了实算。在球形容器内对多达 200 个等球、在立方体内对多达 150 个等球进行了紧密装填。结果在质量和算例数量上均显著改进了国际上已知最好记录。特别地,在半径小于 5 的大球中装下了 68 个半径为 1 的等球,证明否定了猜想,其认为半径为 5 的大球最多只能装下 67 个半径为 1 的等球。

**关键词:** 等球 packing 问题;拟物模型;启发式;伪球策略;序列对称换位策略

中图法分类号: TP301 文献标识码: A

如何把多个大小一样的球无嵌入地装入尽可能小的球形空间,这是最经典数学问题之一。它是开普勒猜想的延伸,也是 NP 难度问题。虽然文献[1]宣称证明了开普勒猜想,但此证明决不贬损在有限空间中的等球 packing 问题的价值,因为在有限空间中紧密装填等球的方式主要取决于容器的形状。文献[2]则提出一个强开普勒猜想,此猜想认为两个及多于两个等球在球形容器中的密度必然小于  $\pi/\sqrt{18}$ 。

\* 基金项目: 国家自然科学基金(61070235, 61173180)

收稿时间: 2011-07-09; 定稿时间: 2011-11-02

在有限空间中紧密地装填等球具有 NP 难度.迄今的研究表明,用彻底的公理化数学方法求解 NP 难度问题暂时看不到希望,为 NP 难度问题寻找高效的近似算法具有理论和现实意义.

国内外均有文献研究了在有限空间中装填等球的问题.文献[3]使用台球算法<sup>[4]</sup>的一个改进版本,得到了从 1~32 个等球在立方体中的紧密装填布局.文献[5]处理了相同或不同尺寸的圆形物体在二维或三维的圆形或方形容器中的装填问题,主要是提出了一种巧妙方法,以简化对物体嵌入深度的计算,但此文的缺憾是其装填方案不能严格地满足 packing 问题的定解条件.文献[6]给出了装填从 1~50 个等球的球形容器尺寸,其装填方案也不能严格地满足 packing 问题的定解条件.文献[7]最早提出了求解任意形状物体 packing 问题的拟物算法.在二维的圆形物体的特殊情况下,此文献用拟物算法进行过某些实算.

作为上述诸多文献工作的后续,作者以拟物思想来处理此问题,希望得到更高效的求解算法.

人们解决复杂物理问题的一般途径是为物理问题建立数学模型,通过计算数学模型来模拟物理现象.反过来,解决复杂数学问题的途径可以在自然界中寻找与原数学问题等价的物理现象,观察其演化规律,从中得到启发以获得求解原始数学问题的思想(idea).这是拟物算法的思想途径.

纯粹的拟物算法在一些情况下会表现乏力,比如陷入局部最优布局时无法跳出.本文提出两个启发式策略来改进纯粹的拟物算法,并用 C 语言编程进行了实算.作者在球形容器中紧密装填等球的最大算例为 200 球.为验证本文方法的通用性,作者也在立方体容器中紧密装填等球,最大算例为 150 球.本文的结果在数量和质量上明显优于国际上现有的最好结果.

## 1 问题的提法及拟物模型

设一个半径为  $r_0$  的球形容器以及  $n$  个半径为  $r$  的等球,问能否将这  $n$  个等球放入此球形容器,使得等球相互之间、等球与球形容器之间不存在任何嵌入.此问题等价于:是否存在  $3n$  个实数  $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ , 使得对于正整数  $i=1, \dots, n$ , 有

$$\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \leq r_0 - r \quad (1)$$

对于任意两个不同正整数  $i, j (i, j=1, \dots, n)$ , 有

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \geq 2r \quad (2)$$

显见,球形容器尺寸越小,找到可行解越困难.因此,在每一个算例中,对可行解优劣评价的标准是:在装下所有等球的前提下,球形容器尺寸越小,得到的可行解越优越.

设想如下拟物模型:将  $n$  个等球设想为光滑的弹性球体,且球体非常轻,其所受重力忽略不计.将球形容器想像为从无限刚性实体中挖出的球形空腔,其半径为  $r_0$ .将  $n$  个弹性等球按照某一给定布局放入刚性球形容器,弹性等球相互挤压,或者与刚性容器壁挤压.在所受弹性合力作用下,每个弹性等球按弹性机制运动,在所受弹性合力为 0 时停止运动.全部弹性等球停止运动时,一种可能是每个弹性等球将停在受弹性力但弹性合力为零的位置上;另外一种可能是,如果初始摆放布局合理且容器半径可行,每个弹性等球将运动到一个不受任何弹性力的位置.此时,每个弹性等球与任何其他球或者容器壁都没有嵌入,全部弹性等球的球心坐标为一组满足约束条件(1)、约束条件(2)的实数.

以形式化算法模拟上述运动,即得到了求解等球 packing 问题的纯粹拟物算法.

文献[7]最早提出上述拟物算法,此拟物算法在文献[8,9]中针对二维情形应用过.现把这一思路应用到三维的等球 packing 问题中.

将刚性球形容器记为第 0 号物体,将笛卡尔坐标系的原点固定在刚性球形容器的球心上.记第  $i$  个等球的球心坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ .第  $i$  个球被球形容器壁挤压所造成的形变记为  $d_{i0}$ ,第  $i$  个球因此形变受到的弹性力记为  $\vec{d}_{i0}$ ,此弹性力的方向由第  $i$  个球的球心指向容器中心.

$$d_{i0} = \begin{cases} \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + r - r_0, & \text{if } \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + r > r_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $i=1, \dots, n$ .

图 1 中描绘了  $d_{i0}$  和  $\vec{d}_{i0}$ .

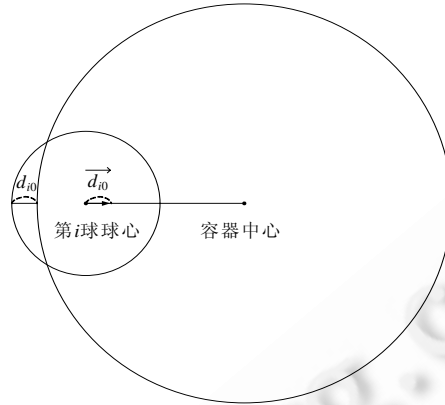


Fig.1 Deformation of the  $i$ th sphere caused by the container and the elastic repulsion force the  $i$ th sphere suffers for this deformation

图 1 第  $i$  球因容器挤压而遭受的形变,以及为此形变而受到的弹性力

第  $i$  个球被第  $j$  个球挤压所造成的形变记为  $d_{ij}$ ,第  $i$  个球因此形变受到的弹性力记为  $\vec{d}_{ij}$ ,此弹性力的方向由第  $j$  个球的球心指向第  $i$  个球的球心.

$$d_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \times (2r - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}), & \text{if } \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} < 2r \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $i, j=1, \dots, n, j \neq i$ .

图 2 中描绘了  $d_{ij}$  和  $\vec{d}_{ij}$ .

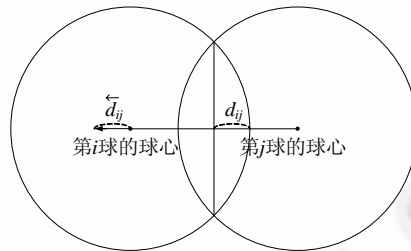


Fig.2 Deformation of the  $i$ th sphere caused by the  $j$ th sphere and the elastic repulsion force the  $i$ th sphere suffers for this deformation

图 2 第  $i$  球因第  $j$  球挤压而遭受的形变,以及为此形变而受到的弹性力

第  $i$  球所受的弹性合力为

$$\vec{d}_i = \sum_{j=0, j \neq i}^n \vec{d}_{ij}, i=1, \dots, n \quad (5)$$

弹性物体发生形变后,有恢复原来形状的趋势,故发生形变的弹性物体中蕴含弹性势能.根据弹性力学,弹性势能与其对应的形变幅度的平方成正比.本文取弹性势能等于对应的形变幅度的平方,故等球  $i$  的总弹性势能等于其在所有方向上形变幅度的平方和.此拟物模型中除弹性势能以外不存在其他势能,故以下简称弹性势能为势能.

具体地,定义第  $i$  个等球的势能为

$$u_i = \sum d_{ij}^2, j = 0, \dots, n, j \neq i \quad (6)$$

容器壁是刚性的,故容器无形变也无弹性势能.整个模型的势能只存在于弹性等球中,其大小等于全体等球的势能之和,用  $U$  表示:

$$U = \sum_{i=1}^n u_i \quad (7)$$

由公式(3)~公式(7),整个拟物模型的势能  $U$  可表示为  $n$  个等球球心坐标的函数,等球半径  $r$  及容器半径  $r_0$  是此函数的常数参数.

$$U=U(X,r,r_0) \quad (8)$$

其中,  $X=\{X_1, \dots, X_n\}=\{x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n\}$ . 因为此势能函数等于所有等球的形变幅度的平方和,当其值趋近于 0 时,所有等球的形变幅度均趋近于 0,反之亦然.局部最小化此势能函数等价于局部最小化所有等球的形变幅度.如  $U(X,r,r_0)$  被最小化到 0,则对应的布局  $X$  即为一个满足约束条件(1)、约束条件(2)的可行解.

## 2 伪球策略和算法 A0

作者选取 L-BFGS 方法<sup>[10]</sup>来局部最小化势能函数  $U(X,r,r_0)$ ,同时局部最优布局  $X$ .使用 L-BFGS 方法局部最小化  $U(X,r,r_0)$ 时,选取第  $i$  球所受合力  $\vec{d}_i$  的  $x$  分量作为变元  $x_i$  的梯度变量,  $\vec{d}_i$  的  $y$  分量作为变元  $y_i$  的梯度变量,  $\vec{d}_i$  的  $z$  分量作为变元  $z_i$  的梯度变量.

如等球的初始布局有利且容器尺寸合理,理论上说,势能函数  $U(X,r,r_0)$  可被最小化到 0.但由于数字计算机的浮点数精度有限,实践中  $U(X,r,r_0)$  至多只能被最小化到一个接近于 0 的正值,此时对应的布局  $X$  中等球仍然有小幅形变.在本文的实算中,当  $U(X,r,r_0)$  被最小化到小于  $10^{-16}$  时,即认为其值已到 0 并停止计算.此时,布局  $X$  尚不能严格满足等球 packing 问题的定解条件.为获得精确解,作者使用如下伪球策略.

不失一般性,本文取等球的标准半径为 0.5,伪球策略是在实算中以半径为  $0.5+10^{-8}$  的伪球代替标准等球.

**定理 1.** 当  $U(X,0.5+10^{-8},r_0) < 10^{-16}$  时,  $U(X,0.5,r_0)=0$ .

$$\text{证明: } U(X,0.5+10^{-8},r_0) = \sum_{i=1}^n d_{i0}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}^2 < 10^{-16}$$

$$\Rightarrow \text{当 } r=0.5+10^{-8} \text{ 时, } d_{i0}^2 < 10^{-16} \text{ 且 } d_{i0} < 10^{-8} (i=1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow d_{i0} = \begin{cases} \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + 0.5 + 10^{-8} - r_0, & \text{if } \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + 0.5 + 10^{-8} > r_0, i=1, \dots, n < 10^{-8} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + 0.5 + 10^{-8} - r_0 < 10^{-8}, i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} + 0.5 < r_0, i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \text{取 } r=0.5 \text{ 时, } d_{i0}=0 (i=1, \dots, n);$$

$$U(X,0.5+10^{-8},r_0) = \sum_{i=1}^n d_{i0}^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij}^2 < 10^{-16}$$

$$\Rightarrow \text{当 } r=0.5+10^{-8} \text{ 时, } d_{ij}^2 < 10^{-16} \text{ 且 } d_{ij} < 10^{-8} (i=1, \dots, n; j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow d_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \times (2 \times (0.5 + 10^{-8}) - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}), \\ \text{if } \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} < 2 \times (0.5 + 10^{-8}), i, j = 1, \dots, n, j \neq i < 10^{-8} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times (2 \times (0.5 + 10^{-8}) - \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}) < 10^{-8}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} > 2 \times 0.5$$

$\Rightarrow$ 取  $r=0.5$  时,  $d_{ij}=0(i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; j \neq i)$ .

综上, 如  $U(X, 0.5+10^{-8}, r_0) < 10^{-16}$ , 在取  $r=0.5$  时, 有  $d_{i0}=0$  且  $d_{ij}=0(i=1, \dots, n; j=1, \dots, n; j \neq i)$ , 以及  $U(X, 0.5, r_0)=0$ .  $\square$

本文把局部最小化  $U(X, 0.5+10^{-8}, r_0)$  的 L-BFGS 方法记为算法 A0. 如 A0 把  $U(X, 0.5+10^{-8}, r_0)$  局部最小化到小于  $10^{-16}$ , 则相应的布局  $X$  是一个由半径为 0.5 的等球构成的精确可行布局. 当等球半径、容器半径以及  $n$  个等球的初始布局  $X$  给定时, A0 是一个确定型算法, 它在给定容器中把初始布局  $X$  要么发展为一个可行布局, 要么发展为一个局部最优布局. 因此, A0 可用于判定任一给定布局在给定容器内是否可以发展为可行布局. 一旦 A0 得到一个可行布局, 该可行布局严格满足约束(1)、约束(2).

此外, 可将对分搜索(binary search)与 A0 结合起来, 确定任意给定布局的最小可行容器尺寸. 在任何小于此尺寸的容器中, 该给定布局都不能被 A0 发展为可行布局; 在任何大于或等于此尺寸的容器中, 该给定布局一定能被 A0 发展为可行布局.

### 3 序列对称换位策略和算法 A1

本文提出一种序列对称换位策略. 此策略每次执行时, 以一个局部最优布局为起点, 产生  $n(n-1)/2$  个新布局, 这些新布局不仅与起点布局不相同, 彼此之间也互不相同.

将第  $i$  个等球的球心坐标由  $(x_i, y_i, z_i)$  移动到  $(-x_i, -y_i, -z_i)$  的动作称为该球的对称换位动作. 如将一个局部最优布局中部分等球执行此动作而保持其余等球位置不变, 势必极大地打破原有布局, 得到一个新布局.

为描述序列对称换位策略, 引入如下符号:

- $X_{local}$  表示一个局部最优布局, 是  $n$  个等球球心坐标的集合;
- $\min U(i, A)$  表示集合  $A$  中势能最小的前  $i$  个等球;
- $\max U(i, A)$  表示集合  $A$  中势能最大的前  $i$  个等球,  $A$  为  $X_{local}$  的一个子集;
- $reverse(A, X_{local})$  表示在  $X_{local}$  中将子集  $A$  中的等球做对称换位动作并保持其余等球不动, 从而得到的新布局.

序列对称换位策略按照公式(9)产生  $n(n-1)/2$  个新布局

$$reverse(\max U(i, \min U(j, X_{local})), X_{local}), 1 \leq j \leq n, 1 \leq i < j \quad (9)$$

每一个新布局都是把起点布局  $X_{local}$  的某一真子集对称换位而得到, 故每一个新布局都与起点布局  $X_{local}$  不同; 每一新布局都是把  $X_{local}$  的不同真子集对称换位而得到, 故新布局彼此也不相同.

将序列对称换位策略一次产生的所有新布局依次作为 A0 的初始布局在给定容器中进行局部优化, 可得到对应的局部优化后的布局. 如其中某一新布局特别有利, 则它可能被 A0 在给定容器中局部优化为可行布局.

序列对称换位策略从起点布局  $X_{local}$  一次产生  $n(n-1)/2$  个新布局并用 A0 局部优化它们, 本文将这一过程称为一趟扫描. 实验表明, 序列对称换位策略有一极有用的性质, 即每趟扫描通常可以找到一个 A0 优化后的布局, 其势能小于或近似等于起点布局的势能. 换言之, 每趟扫描通常可以从一个局部最优布局(起点布局)到达一个同等质量或者更好的布局. 如把前一趟扫描找到的最好局部最优布局作为下一趟扫描的起点布局, 则期待在下一趟扫描中找到势能更小的局部最优布局, 或者直接得到一个可行布局.

将序列对称换位策略和算法 A0 结合得到算法 A1. 算法 A1 的输入数据包括一个随机产生的初始布局和对容器尺寸的经验估计值, 其输出则是一个紧密的可行布局.

关于装填  $n$  个等球的球形容器尺寸  $r_0$ , 本文用如下经验公式给出估计值:

$$r_0 = r / 0.7455n^{-0.3161} \quad (10)$$

其中,  $r$  取标准等球半径 0.5. 经验公式(10)产生的球形容器尺寸估计值并不等于我们最终找到的装填  $n$  个等球的最小容器尺寸. 公式(10)的目的在于为装填  $n$  个等球给出一个大致合理的容器尺寸估计值. 在实算中, 也可人为根据实际需要调大或调小公式(10)给出的容器尺寸估计值.

**算法 A1.**

第 1 步:由公式(10)给出大致合理的容器尺寸  $r_0$ ;生成随机初始布局  $X_{random}$ .

第 2 步:将  $X_{random}$  作为 A0 的初始布局,如  $X_{random}$  被 A0 发展为可行布局(记为  $X_{find}$ ),转第 4 步;否则,A0 将  $X_{random}$  发展为局部最优布局,记为  $X_{local}$ .

第 3 步:从  $X_{local}$  按公式(9)生成  $n(n-1)/2$  个新布局,用 A0 发展每一个新布局,如果某一新布局被发展为可行布局,将此可行布局记为  $X_{find}$ ,转第 4 步;如  $n(n-1)/2$  个新布局全部被发展为相应的局部最优布局,则选取这些局部最优布局中势能最小者为新  $X_{local}$ ,重复第 3 步.为区别起见,将所有  $X_{local}$  按先后次序编号为  $X_{local}^{(0)}, X_{local}^{(1)}, X_{local}^{(2)}, \dots$ .如有连续的  $X_{local}^{(m)}, X_{local}^{(m+1)}, X_{local}^{(m+2)}$  的势能彼此近似相等,则选取目前所找到的所有局部最优布局中势能最小者记为  $X_{find}$ ,转第 4 步.

第 4 步:在闭区间  $[r_0/2, 2 \times r_0]$  内,用对分搜索(binary search)和 A0 为  $X_{find}(X_{find}$  可能是一个松弛的可行布局或者一个局部最优布局)找出其最小可行容器尺寸,以及对应的紧凑可行布局.此紧凑可行布局即为 A1 的输出结果.在此,算法 A1 结束.

对等球数为  $n$  的算例执行 A1 共 5 次,得到 5 个紧凑可行布局,取其中最紧凑者(即对应的容器尺寸最小者)作为 A1 找到的  $n$  个等球的最优装填布局.

**4 计算结果**

为验证 A1 的有效性,本文用 A1 计算了大量在球形容器中装填等球的算例,其中最大的算例是在球形容器中装填 200 个等球.值得一提的是,本文在球形容器中装填 68 球的结果证否了记载于文献[11]的猜想.此猜想认为,半径为 5 的大球至多装填 67 个半径为 1 的等球,本文则成功地装进了 68 个等球.

为检验 A1 的通用性,本文使用 A1 的修改版本计算了在立方体中装填等球的算例,其中最大的算例是在立方体中装填 150 个等球.

本文所有计算均使用一台 CPU 为 Pentium E6500 2.93GHz、内存为 2G DDR2 800MHZ 的个人计算机.

表 1 列出了 A1 在球形容器中装填等球所获得的本文最好容器尺寸和国际上已知最好的精确记录,同时给出了 A1 获得本文最好容器尺寸的单次计算时间.

为便于与国际记录比较,表 1 中容器尺寸的质量以等球半径  $r$  与容器半径  $r_0$  的比值表示.此比值越大,表示容器尺寸相对于等球尺寸越小,质量越高.

表 1 中: A1  $r/r_0$  是 A1 获得的在球形容器中装填等球的记录;Hugo(a)  $r/r_0$  是 Pfoertner<sup>[12]</sup>提供的个人记录,此记录有等球球心坐标支持其正确性;Hugo(b)  $r/r_0$  是由 Pfoertner<sup>[13]</sup>汇集的集体记录,由 Pfoertner, Gensane 和 Boll 等人共同给出;Dave  $r/r_0$  是 Boll<sup>[14]</sup>的个人记录.

在表 1 中,某项记录带有上标(+)表示在 A1  $r/r_0$  中的对应记录大(优)于此项记录.例如,在 Hugo(b)  $r/r_0$  中装填 72 球的记录带有上标(+),因为在 A1  $r/r_0$  中装填 72 球的记录比它大(优) $4.8581 \times 10^{-4}$ .上标(-)的含义与(+)相反.

表 2 列出了 A1 在立方体中装填等球所获得的本文最好容器尺寸和国际上已知最好的精确容器尺寸,同时给出了 A1 获得本文最好容器尺寸的单次计算时间.此处取立方体边长的一半作为容器半径  $r_0$ .表 2 中,容器尺寸的质量也以等球半径  $r$  与容器半径  $r_0$  的比值表示,此比值越大,表示容器相对于等球越小,质量越高.

表 2 中的上标(+), (-)与在表 1 中有一样的含义.

表 2 中:A1  $r/r_0$  是 A1 得到的在立方体中装填等球的记录;Hugo  $r/r_0$  则是 Pfoertner<sup>[15]</sup>汇集的集体记录,由 Schaer, Goldberg, Pfoertner, Gensane 和 Boll 共同给出.

本文作者能够提供准确的等球球心坐标支持表 1 和表 2 中 A1 所找到的所有容器尺寸,这些坐标严格满足等球 packing 问题的约束条件.图 3 展示了 6 个可行装填布局.

**Table 1** Spherical containers sizes for packing equal spheres

**表 1** 在球形容器中装填等球的容器尺寸

$n$	A1 $r/r_0$	A1 的计算时间 (ms)	Hugo(a) $r/r_0$	Hugo(b) $r/r_0$	Dave $r/r_0$	A1 $r/r_0$ -Hugo(b) $r/r_0$
1	1.000 000 00	1	1.000 000 00	1.000 000 00	—	0.000 000 00
2	0.500 000 00	1	0.500 000 00	0.500 000 00	—	0.000 000 00
3	0.464 101 60	1	0.464 101 60	0.464 101 60	—	0.000 000 00
4	0.449 489 74	1	0.449 489 70 <sup>(+)</sup>	0.449 489 70 <sup>(+)</sup>	—	0.000 000 04
5	0.414 213 50	1	0.414 213 50	0.414 213 50	—	0.000 000 00
6	0.414 213 50	1	0.414 213 50	0.414 213 50	—	0.000 000 00
7	0.385 913 55	1	0.385 913 50 <sup>(+)</sup>	0.385 913 60 <sup>(-)</sup>	—	-0.000 000 05
8	0.378 024 80	15	0.378 024 80	0.378 024 80	—	0.000 000 00
9	0.366 025 39	12	0.366 025 30 <sup>(+)</sup>	0.366 025 40 <sup>(-)</sup>	—	-0.000 000 01
10	0.353 049 42	15	0.353 049 40 <sup>(+)</sup>	0.353 049 40 <sup>(+)</sup>	—	0.000 000 02
11	0.344 576 50	1	0.344 576 40 <sup>(+)</sup>	0.344 576 50	—	0.000 000 00
12	0.344 576 50	1	0.344 576 40 <sup>(+)</sup>	0.344 576 50	—	0.000 000 00
13	0.333 333 32	2	0.333 333 30	0.333 333 30	—	0.000 000 02
14	0.323 504 66	2	0.323 504 60 <sup>(+)</sup>	0.323 504 60 <sup>(+)</sup>	—	0.000 000 06
15	0.318 304 81	78	0.318 304 70 <sup>(+)</sup>	0.318 304 80 <sup>(+)</sup>	0.318 305 00 <sup>(-)</sup>	0.000 000 01
16	0.310 975 91	15	0.310 975 80 <sup>(+)</sup>	0.310 975 90 <sup>(+)</sup>	0.310 976 00 <sup>(-)</sup>	0.000 000 01
17	0.305 693 95	2	0.305 693 90 <sup>(+)</sup>	0.305 694 00 <sup>(-)</sup>	0.305 694 00 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 05
18	0.301 296 58	3	0.301 296 50 <sup>(+)</sup>	0.301 296 50 <sup>(+)</sup>	0.301 296 00 <sup>(-)</sup>	0.000 000 08
19	0.295 332 32	15	0.295 332 30 <sup>(+)</sup>	0.295 332 30 <sup>(+)</sup>	0.295 332 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 02
20	0.287 890 82	31	0.287 890 70 <sup>(+)</sup>	0.287 890 70 <sup>(+)</sup>	0.287 851 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 12
21	0.286 832 81	32	0.286 832 70 <sup>(+)</sup>	0.286 832 70 <sup>(+)</sup>	0.286 833 00 <sup>(-)</sup>	0.000 000 11
22	0.279 342 62	828	0.279 342 50 <sup>(+)</sup>	0.279 342 50 <sup>(+)</sup>	0.279 334 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 12
23	0.275 670 69	187	0.275 670 70 <sup>(-)</sup>	0.275 670 70 <sup>(-)</sup>	0.275 081 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 01
24	0.271 341 30	1 062	0.271 341 30	0.271 341 30	0.271 336 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 00
25	0.271 191 82	2 250	0.271 191 70 <sup>(+)</sup>	0.271 191 80 <sup>(+)</sup>	0.271 120 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 02
26	0.266 851 26	177	0.266 849 60 <sup>(+)</sup>	0.266 851 30 <sup>(-)</sup>	0.266 679 20 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 04
27	0.262 232 07	343	0.262 232 00 <sup>(+)</sup>	0.262 232 10 <sup>(-)</sup>	0.262 120 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 03
28	0.260 305 47	533	0.260 300 80 <sup>(+)</sup>	0.260 305 50 <sup>(-)</sup>	0.260 096 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 03
29	0.257 925 45	5 276	0.257 925 10 <sup>(+)</sup>	0.257 925 50 <sup>(-)</sup>	0.257 819 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
30	0.255 330 55	9 068	0.255 330 00 <sup>(+)</sup>	0.255 330 60 <sup>(-)</sup>	0.254 780 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
31	0.253 116 20	423	0.253 114 10 <sup>(+)</sup>	0.253 116 20	0.253 115 00 <sup>(+)</sup>	0.0000 000 0
32	0.250 787 44	1 249	0.250 787 40 <sup>(+)</sup>	0.250 787 40 <sup>(+)</sup>	0.250 712 00 <sup>(+)</sup>	0.0000 000 4
33	0.248 762 30	2 683	0.248 710 40 <sup>(+)</sup>	0.248 762 40 <sup>(+)</sup>	0.248 703 00 <sup>(+)</sup>	-0.0000 001 0
34	0.247 052 65	682	0.247 042 20 <sup>(+)</sup>	0.247 052 70 <sup>(-)</sup>	0.247 006 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
35	0.244 833 65	1 167	0.244 828 40 <sup>(+)</sup>	0.244 833 70 <sup>(-)</sup>	0.244 773 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
36	0.243 132 16	2 265	0.243 132 10 <sup>(+)</sup>	0.243 132 20 <sup>(-)</sup>	0.241 787 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 04
37	0.240 686 55	30 232	0.240 621 70 <sup>(+)</sup>	0.240 686 60 <sup>(-)</sup>	0.240 441 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
38	0.240 519 36	1 675	0.240 514 70 <sup>(+)</sup>	0.240 515 60 <sup>(+)</sup>	0.240 360 00 <sup>(+)</sup>	0.000 003 76
39	0.236 745 23	6 250	0.236 552 10 <sup>(+)</sup>	0.236 745 20 <sup>(+)</sup>	0.236 703 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
40	0.234 999 23	13 724	0.234 975 60 <sup>(+)</sup>	0.234 999 20 <sup>(+)</sup>	0.234 871 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
41	0.232 755 97	16 392	0.232 664 30 <sup>(+)</sup>	0.232 755 90 <sup>(+)</sup>	0.232 702 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 07
42	0.232 118 60	12 679	0.231 841 50 <sup>(+)</sup>	0.232 119 00 <sup>(-)</sup>	0.232 119 00 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 40
43	0.229 732 95	38 007	0.229 340 50 <sup>(+)</sup>	0.229 733 00 <sup>(-)</sup>	0.229 667 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
44	0.228 163 02	49 720	0.228 158 60 <sup>(+)</sup>	0.228 162 90 <sup>(+)</sup>	0.228 083 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 12
45	0.226 911 55	35 000	0.226 741 20 <sup>(+)</sup>	0.226 911 60 <sup>(-)</sup>	0.226 594 00 <sup>(+)</sup>	-0.000 000 05
46	0.225 168 18	25 093	0.225 116 10 <sup>(+)</sup>	0.225 168 10 <sup>(+)</sup>	0.225 164 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 08
47	0.223 507 04	15 734	0.223 482 00 <sup>(+)</sup>	0.223 507 00 <sup>(+)</sup>	0.223 342 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 04
48	0.222 405 93	174 090	0.222 354 00 <sup>(+)</sup>	0.222 405 90 <sup>(+)</sup>	0.222 363 00 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
49	0.221 278 17	52 908	0.220 917 60 <sup>(+)</sup>	0.221 275 10 <sup>(+)</sup>	0.220 980 00 <sup>(+)</sup>	0.000 003 07
50	0.219 758 27	62 618	0.219 348 40 <sup>(+)</sup>	0.219 752 90 <sup>(+)</sup>	—	0.000 005 37
51	0.218 550 27	75 082	0.217 888 00 <sup>(+)</sup>	0.217 888 80 <sup>(+)</sup>	—	0.000 661 47
52	0.216 930 40	180 523	—	0.216 766 50 <sup>(+)</sup>	—	0.000 163 90
53	0.216 288 05	63 018	—	0.215 777 20 <sup>(+)</sup>	—	0.000 510 85
54	0.214 920 66	90 968	—	0.214 684 60 <sup>(+)</sup>	—	0.000 236 06
55	0.213 441 68	119 359	—	0.213 268 00 <sup>(+)</sup>	—	0.000 173 68
56	0.213 067 86	103 083	—	0.212 613 60 <sup>(+)</sup>	—	0.000 454 26

Table 1 Spherical containers sizes for packing equal spheres (Continued)

表 1 在球形容器中装填等球的容器尺寸(续)

$n$	AI $r/r_0$	AI 的计算时间 (ms)	Hugo(a) $r/r_0$	Hugo(b) $r/r_0$	Dave $r/r_0$	AI $r/r_0$ -Hugo(b) $r/r_0$
57	0.211 309 35	156 593	—	0.210 866 10 <sup>(+)</sup>	—	0.000 443 25
58	0.210 480 09	76 287	—	0.210 302 20 <sup>(+)</sup>	—	0.000 177 89
59	0.209 759 44	47 250	—	0.209 625 20 <sup>(+)</sup>	—	0.000 134 24
60	0.209 426 99	166 250	—	0.209 426 90 <sup>(+)</sup>	—	0.000 000 09
61	0.209 108 65	88 078	—	0.208 912 30 <sup>(+)</sup>	—	0.000 196 35
62	0.206 739 15	4 937	—	0.205 817 00 <sup>(+)</sup>	—	0.000 922 15
63	0.205 954 91	103 687	—	0.204 714 00 <sup>(+)</sup>	—	0.001 240 91
64	0.204 087 15	73 265	—	0.203 664 60 <sup>(+)</sup>	—	0.000 422 55
65	0.203 076 03	140 343	—	0.202 747 50 <sup>(+)</sup>	—	0.000 328 53
66	0.202 108 75	175 953	—	0.201 915 80 <sup>(+)</sup>	—	0.000 192 95
67	0.201 216 62	693 343	—	0.200 442 90 <sup>(+)</sup>	—	0.000 773 72
68	0.200 002 22	884 468	—	0.199 722 00 <sup>(+)</sup>	—	0.000 280 22
69	0.199 281 52	180 234	—	0.198 792 20 <sup>(+)</sup>	—	0.000 489 32
70	0.198 688 72	220 253	—	0.198 331 00 <sup>(+)</sup>	—	0.000 357 72
71	0.197 222 12	382 046	—	0.196 978 70 <sup>(+)</sup>	—	0.000 243 42
72	0.196 285 91	1 150 531	—	0.195 800 10 <sup>(+)</sup>	—	0.000 485 81
73	0.195 627 34	1 036 978	—	—	—	—
74	0.195 146 78	639 250	—	—	—	—
75	0.193 964 42	123 281	—	—	—	—
76	0.192 947 42	1 040 968	—	—	—	—
77	0.192 254 11	1 220 578	—	—	—	—
78	0.191 458 92	521 500	—	—	—	—
79	0.190 659 73	1 345 718	—	—	—	—
80	0.189 727 28	514 812	—	—	—	—
81	0.188 967 12	498 453	—	—	—	—
82	0.188 293 04	147 734	—	—	—	—
83	0.187 640 17	401 531	—	—	—	—
84	0.186 956 02	413 578	—	—	—	—
85	0.186 411 22	875 203	—	—	—	—
86	0.185 610 06	1 230 484	—	—	—	—
87	0.184 952 92	1 904 718	—	—	—	—
88	0.184 275 88	768 937	—	—	—	—
89	0.183 481 26	976 781	—	—	—	—
90	0.182 937 32	1 102 437	—	—	—	—
91	0.182 353 27	1 237 372	—	—	—	—
92	0.181 774 12	1 128 500	—	—	—	—
93	0.181 082 00	3 230 046	—	—	—	—
94	0.180 471 96	631 093	—	—	—	—
95	0.180 114 39	1 188 421	—	—	—	—
96	0.179 566 85	1 470 328	—	—	—	—
97	0.178 932 18	2 546 187	—	—	—	—
98	0.178 300 07	227 328	—	—	—	—
99	0.177 879 65	2 316 406	—	—	—	—
100	0.177 439 21	603 796	—	—	—	—
110	0.172 129 34	2 166 781	—	—	—	—
120	0.167 499 07	6 791 187	—	—	—	—
130	0.163 735 13	12 995 343	—	—	—	—
140	0.160 299 21	2 988 406	—	—	—	—
150	0.156 658 32	1 070 578	—	—	—	—
160	0.153 359 71	5 133 140	—	—	—	—
170	0.150 345 79	13 460 359	—	—	—	—
180	0.147 418 02	13 606 187	—	—	—	—
190	0.144 455 29	16 768 718	—	—	—	—
200	0.142 247 61	25 771 468	—	—	—	—



Table 2 Cubes sizes for packing equal spheres

表 2 在立方体容器中装填等球的容器尺寸

$n$	A1 $r/r_0$	A1 的计算时间 (ms)	Hugo $r/r_0$	A1 $r/r_0$ -Hugo $r/r_0$
1	1.000 000 00	1	1.000 000 00	0.000 000 00
2	0.633 974 58	1	0.633 974 60 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 02
3	0.585 786 40	1	0.585 786 40	0.000 000 00
4	0.585 786 40	1	0.585 786 40	0.000 000 00
5	0.527 864 00	3	0.527 864 00	0.000 000 00
6	0.514 718 61	1	0.514 718 60 <sup>(+)</sup>	0.000 000 01
7	0.500 272 31	3	0.500 272 30 <sup>(+)</sup>	0.000 000 01
8	0.500 000 00	17	0.500 000 00	0.000 000 00
9	0.464 101 61	13	0.464 101 60 <sup>(+)</sup>	0.000 000 01
10	0.428 571 42	15	0.428 571 40 <sup>(+)</sup>	0.000 000 02
11	0.415 244 47	19	0.415 244 50 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 03
12	0.414 213 55	21	0.414 213 50 <sup>(+)</sup>	0.000 000 05
13	0.414 213 55	16	0.414 213 50 <sup>(+)</sup>	0.000 000 05
14	0.414 213 55	13	0.414 213 50 <sup>(+)</sup>	0.000 000 05
15	0.384 615 37	48	0.384 615 40 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 03
16	0.377 593 53	35	0.377 593 50 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
17	0.377 370 47	52	0.377 370 50 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 03
18	0.375 361 19	39	0.375 361 10 <sup>(+)</sup>	0.000 000 09
19	0.366 370 60	55	0.366 370 40 <sup>(+)</sup>	0.000 000 20
20	0.356 814 39	63	0.356 814 40 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 01
21	0.354 438 08	52	0.354 438 10 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 02
22	0.346 546 20	768	0.346 546 20	0.000 000 00
23	0.343 633 56	678	0.343 633 30 <sup>(+)</sup>	0.000 000 26
24	0.341 081 37	962	0.341 081 10 <sup>(+)</sup>	0.000 000 27
25	0.335 608 09	1 250	0.335 607 50 <sup>(+)</sup>	0.000 000 59
26	0.333 810 32	1 965	0.333 810 20 <sup>(+)</sup>	0.000 000 12
27	0.333 333 32	1 648	0.333 333 30 <sup>(+)</sup>	0.000 000 02
28	0.320 382 00	1 039	0.320 382 00	0.000 000 00
29	0.320 377 23	3 276	0.320 377 20 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
30	0.320 377 23	2 154	0.320 377 20 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
31	0.320 377 23	7 451	0.320 377 20 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
32	0.320 377 23	6 972	0.320 377 20 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
33	0.309 210 71	9 765	0.309 210 70 <sup>(+)</sup>	0.000 000 01
34	0.304 234 18	10 890	0.304 233 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 38
35	0.303 337 04	7 269	0.303 336 90 <sup>(+)</sup>	0.000 000 14
36	0.298 618 26	2 203	0.298 617 40 <sup>(+)</sup>	0.000 000 86
37	0.298 123 25	208 962	0.298 123 20 <sup>(+)</sup>	0.000 000 05
38	0.298 077 53	396 095	0.298 077 50 <sup>(+)</sup>	0.000 000 03
39	0.295 234 75	202 857	0.295 234 70 <sup>(+)</sup>	0.000 000 05
40	0.294 117 64	78 294	0.294 117 60 <sup>(+)</sup>	0.000 000 04
41	0.289 675 75	151 185	0.289 675 10 <sup>(+)</sup>	0.000 000 65
42	0.286 089 25	10 680	0.286 085 30 <sup>(+)</sup>	0.000 003 95
43	0.283 304 22	89 652	0.283 303 20 <sup>(+)</sup>	0.000 001 02
44	0.281 721 21	92 862	0.281 720 60 <sup>(+)</sup>	0.000 000 61
45	0.281 263 86	67 590	0.281 263 90 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 04
46	0.280 493 73	154 902	0.280 493 40 <sup>(+)</sup>	0.000 000 33
47	0.279 917 68	105 276	0.279 917 70 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 02
48	0.279 917 68	90 098	0.279 917 70 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 02
49	0.272 853 49	132 768	0.272 853 40 <sup>(+)</sup>	0.000 000 09
50	0.271 908 72	102 652	0.271 907 40 <sup>(+)</sup>	0.000 001 32
51	0.270 045 92	69 398	0.270 012 90 <sup>(+)</sup>	0.000 033 02
52	0.267 640 01	128 145	0.267 639 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 21
53	0.266 461 58	53 908	0.266 460 40 <sup>(+)</sup>	0.000 001 18
54	0.263 301 23	87 365	0.263 269 90 <sup>(+)</sup>	0.000 031 33
55	0.262 146 03	201 453	0.261 769 90 <sup>(+)</sup>	0.000 376 13
56	0.261 305 05	162 703	0.261 215 80 <sup>(+)</sup>	0.000 089 25
57	0.261 203 93	185 273	0.261 203 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 13
58	0.261 203 87	170 824	0.261 203 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 07
59	0.261 203 87	240 521	0.261 203 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 07
60	0.261 203 87	136 720	0.261 203 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 07

**Table 2** Cubes sizes for packing equal spheres (Continued)

表 2 在立方体容器中装填等球的容器尺寸(续)

$n$	A1 $r/r_0$	A1 的计算时间 (ms)	Hugo $r/r_0$	A1 $r/r_0$ -Hugo $r/r_0$
61	0.261 203 87	170 823	0.261 203 90 <sup>(-)</sup>	-0.000 000 03
62	0.261 203 87	349 036	0.261 203 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 07
63	0.261 203 87	93 687	0.261 203 80 <sup>(+)</sup>	0.000 000 07
64	0.253 486 54	292 880	0.253 480 40 <sup>(+)</sup>	0.000 006 14
65	0.252 365 17	325 343	0.252 354 60 <sup>(+)</sup>	0.000 010 57
66	0.251 479 29	58 080	0.251 469 20 <sup>(+)</sup>	0.000 010 09
67	0.248 962 16	237 343	0.248 960 00 <sup>(+)</sup>	0.000 002 16
68	0.246 867 60	692 508	0.246 757 00 <sup>(+)</sup>	0.000 110 60
69	0.246 278 01	166 423	0.245 935 00 <sup>(+)</sup>	0.000 343 01
70	0.246 075 00	920 253	0.245 882 80 <sup>(+)</sup>	0.000 192 20
71	0.246 055 15	367 200	0.245 694 90 <sup>(+)</sup>	0.000 360 25
72	0.246 055 15	1 987 465	0.245 669 20 <sup>(+)</sup>	0.000 385 95
73	0.243 574 99	917 649	—	—
74	0.242 677 20	392 350	—	—
75	0.242 642 88	992 865	—	—
80	0.234 838 79	194 068	—	—
85	0.232 567 24	2 891 000	—	—
90	0.226 513 47	1 028 976	—	—
95	0.223 470 71	1 245 818	—	—
100	0.222 764 69	408 702	—	—
105	0.220 481 20	298 456	—	—
110	0.214 700 34	929 657	—	—
115	0.210 278 62	1 286 529	—	—
120	0.209 598 41	413 578	—	—
125	0.207 107 09	18 052 085	—	—
130	0.202 974 13	2 230 484	—	—
135	0.200 055 04	994 083	—	—
140	0.199 722 84	1 768 937	—	—
145	0.196 420 72	896 581	—	—
150	0.193 399 63	1 910 682	—	—

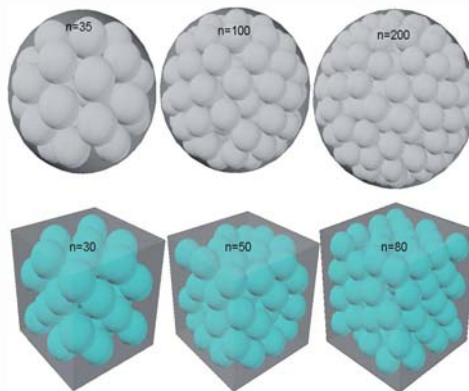


Fig.3 Six feasible configurations found by A1

图 3 A1 找到的 6 个可行布局

## 5 相关工作讨论

为处理等球 packing 问题,本文提出了伪球策略和序列对称换位策略.

伪球策略是为了保证本文能够得到精确解而非近似解.本文之所以强调伪球策略以及随之得到的精确解,是因为目前国内外均有文献提供有误差的近似解,且不明确声明所提供的是近似解.这一类近似解在实际中不可行,无法与精确解比较.

文献[5]提供的数据为近似解,有夸大其质量的显著误差.文献[6]亦提供夸大的近似解.对这一事实,本文作者与其他国内外同行通信后取得一致意见.此外,读者可自行检验文献[5,6]中  $n=1,2,3,4$  等小规模算例,可发现它们提供的容器尺寸显著小于常识指出的尺寸.

伪球策略保证本文能提供有等球球心坐标支持的精确解.本文的精确解为本文作者和其他研究者的后继研究提供了坚实的基础.

序列对称换位策略是本文提出的核心策略,保证了算法 A1 可以有效地从随机布局出发而最终达到紧凑的可行布局.从本文第 4 节的表 1 和表 2 可见,A1 在球形容器和立方体容器中找到的精确解在算例数量上和容器尺寸质量上都大幅超过目前已知的最好精确解.由于文献[5,6]所提供的是近似解,本文未将其列入表 1 和表 2.然而,本文中的算例数量不仅远多于文献[5,6],且本文有大量算例的精确容器尺寸比文献[5,6]有误差的容器尺寸还要优(小).举两个极端的例子,本文装填 100 个半径为 1 的等球的立方体容器边长为 8.978 083 555 3,小于文献[5]装填 95 个半径为 1 的等球的立方体容器边长 9.018 467 870 3;本文装填 96 个半径为 1 的等球的球形容器半径为 5.568 956 630 9,小于文献[5]装填 95 个半径为 1 的等球的球形容器半径 5.571 617 249 6.

故,本文精确解的质量充分说明了序列对称换位策略的有效性.

本文作者将发展本文的技术和思路,进一步研究等球在不同形状容器中的装填问题,力争找到处理等球 packing 问题的高效通用算法.

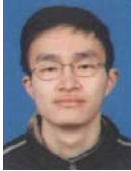
**致谢** 在此,我们感谢华中科技大学计算机科学与技术学院各位同仁的有益讨论,同时也感谢 Hugo Pfoertner 为收集目前等球 packing 问题最好的精确解所做的努力.

#### References:

- [1] Hales TC. Cannonballs and honeycombs. *Notices of the American Mathematical Society*, 2000,47(4):440–449.
- [2] Bezdek K. Sphere packings revisited. *European Journal of Combinatorics*, 2006,27(6):864–883. [doi: 10.1016/j.ejc.2005.05.001]
- [3] Gensane T. Dense packings of equal spheres in a cube. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2004,11:1–17.
- [4] Lubachevsky BD. How to simulate billiards and similar systems. *Journal of Computational Physics*, 1991,94(2):255–283. [doi: 10.1016/0021-9991(91)90222-7]
- [5] Birgin EG, Sobral FNC. Minimizing the object dimensions in circle and sphere packing problems. *Computers & Operations Research*, 2008,35(7):2357–2375. [doi: 10.1016/j.cor.2006.11.002]
- [6] Liu JF, Zhou GC, Pan JJ. Heuristic algorithm based on taboo search for sphere Packing problem. *Application Research of Computers*, 2011,28(3):892–894 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2011.03.027]
- [7] Huang WQ, Zhan SH. A method to solve the packing problem by analogizing objects and their moving. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1979,2(2):176–180 (in Chinese with English abstract).
- [8] Wang HQ, Huang WQ, Zhang Q, Xu DM. An improved algorithm for the packing of unequal circles within a larger containing circle. *European Journal of Operational Research*, 2002,141(2):440–453. [doi: 10.1016/S0377-2217(01)00241-7]
- [9] Huang WQ, Xu RC. Two personification strategy for the circle packing problem. *Science in China (Series E)*, 1999,29(4):347–353 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1007/BF02916995]
- [10] Liu DC, Nocedal J. On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Mathematical Programming*, 1989,45: 503–528. [doi: 10.1007/BF01589116]
- [11] <http://oeis.org/A084828>, 2011.
- [12] <http://www.randomwalk.de/sphere/insphr/sequences.txt>, 2008.
- [13] <http://www.randomwalk.de/sphere/insphr/spisbest.txt>, 2008.
- [14] <http://home.comcast.net/~davejanelle/packing.html>, 2010.
- [15] <http://www.randomwalk.de/sphere/incube/spicbest.txt>, 2005.

## 附中文参考文献:

- [6] 刘景发,周国城,潘锦基.基于禁忌搜索的启发式算法求解球体 Packing 问题.计算机应用研究,2011,28(3):892-894. [doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2011.03.027]
- [7] 黄文奇,詹叔浩.求解 Packing 问题的拟物方法.应用数学学报,1979,2(2):176-180.
- [9] 黄文奇,许如初.支持求解圆形 packing 问题的两个拟人策略.中国科学(E 辑),1999,29(4):347-353. [doi: 10.1007/BF02916995]



余亮(1980—),男,湖北武汉人,博士生,主要研究领域为处理 NP 难度问题的高性能算法.



黄文奇(1938—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为处理 NP 难度问题的高性能算法.

www.jos.org.cn

www.jos.org.cn