软件学报 ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software,2011,22(4):676−694 [doi: 10.3724/SP.J.1001.2011.03954]

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

知识不确定性问题的粒计算模型*

王国胤, 张清华+, 马希骜, 杨青山

(重庆邮电大学 计算机科学与技术研究所 重庆 400065)

Granular Computing Models for Knowledge Uncertainty

WANG Guo-Yin, ZHANG Qing-Hua+, MA Xi-Ao, YANG Qing-Shan

(Institute of Computer Science and Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

+ Corresponding author: E-mail: zhangqh@cqupt.edu.cn

Wang GY, Zhang QH, Ma XA, Yang QS. Granular computing models for knowledge uncertainty. *Journal of Software*, 2011,22(4):676−694. http://www.jos.org.cn/1000-9825/3954.htm

Abstract: Knowledge is not only an important cornerstone that constructs the cognitive ability in human beings, but is also one of the basic issues in intelligence science. With the development of intelligence science and technology, the study of knowledge uncertainty is attracting more and more attention. Knowledge uncertainty includes the inherent uncertainty of knowledge itself and the effect of external influence on knowledge. In the view of granular computing (GrC), the knowledge uncertainties of the fuzzy set theory model, the rough set theory model, the quotient space theory model, and some other related granular computing models are studied in this paper. The state-of-the-art and key issues of knowledge uncertainty are discussed.
Key words: granular computing; knowledge; uncertainty; rough set; fuzzy set; quotient space

摘 要: 知识不仅是构成人类认知能力的重要基石,也是智能科学研究的基础问题之一.随着智能科学技术研究的发展,知识的不确定性研究受到人们的普遍关注.知识的不确定性来源于知识本身的不确定性以及受外界(客观世界)影响而导致的不确定性.从粒计算模型的角度分析了模糊集理论模型、粗糙集理论模型、商空间理论模型以及其他扩展粒计算模型中知识的不确定性问题,并对知识不确定性问题的研究工作进行了讨论和总结,对有待研究的重要问题进行了展望.
关键词: 粒计算;知识;不确定性;粗糙集;模糊集;商空间
中图法分类号: TP182　　**文献标识码**: A

信息是人类认识世界和改造世界的知识源泉,由于现实世界是多样的、复杂的和运动变化的,导致人们对事物和信息的表达往往是不精确、不确定和模糊的.人们接触到的各种各样的信息有时是确定的,但更多的时候是不确定的.信息本身是确定还是不确定无所谓好坏,问题在于我们怎样去正确认识确定性与不确定性,以及如何把握知识不确定性的本质规律.确定性是指客观事物联系和发展过程中有规律的、必然的、清晰的、精确的属性.不确定性是指客观事物联系和发展过程中无序的、偶然的、模糊的、近似的属性.确定与不确定揭示

* 基金项目: 国家自然科学基金(61073146); 重庆市自然科学基金(2008BA2017); 重庆市杰出青年科学基金(2008BA2041)
收稿时间: 2010-01-15; 定稿时间: 2010-10-11
CNKI 网络优先出版: 2010-11-26 16:35, http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2560.TP.20101126.1635.001.html

了客观事物联系和发展过程中的规律性与无序性、必然性与偶然性、清晰与模糊、精确与近似之间的关系.以牛顿、拉普拉斯和爱因斯坦等科学家为代表的确定性论者认为世界是确定的,产生不确定的原因是对初始条件的测量误差,或者人类自身认知的局限性和知识的不完备,而并非事物的本来面貌.而麦克斯韦、玻尔兹曼等科学家通过研究证明了不确定性在客观世界中是真实存在的,与人类是否无知没有关系[1].后来,人们普遍认为:确定与不确定既有本质区别,又有内在联系,两者之间的关系是辨证统一的.

随着对确定性问题研究的不断深入,人们开始转移到对不确定性问题的探讨上."不确定性"最早于 1836 年由詹姆斯·穆勒提出.在量子力学中,不确定性是指量子运动的不确定性.由于观测对某些量的干扰,使得与它关联的量(共轭量)不准确,这是不确定性的起源.进入 21 世纪以来,信息不确定性问题的研究工作受到越来越多的关注.不确定性现象在很多领域中存在,无论是在物理学、数学、化学等自然科学领域,还是在哲学、社会学、心理学、认知学等社会科学领域,不确定性现象随处可见.如,克莱因于 1980 年在《数学:确定性的丧失》一书中分析了"数学曾经被认为是精确论证的顶峰,真理的化身,是关于宇宙设计的真理"这一错误观点[2],指出数学也存在不确定性问题.虽然许多人还在从事着确定性的研究,如精确推理,但是这些关于确定性的研究工作很难解决一些实际问题,如模糊控制问题.相反地,关于不确定性的研究越来越得到学术界的普遍关注.不确定性问题具有以下特征:随机性、模糊性、不完全性和不稳定性等.其中,随机性和模糊性是不确定性的基本特征.

随机性是由于条件不能决定结果表现出来的不确定性,它反映了因果律的问题.随机性真正被人类所认识要归功于前苏联数学家柯尔莫哥洛夫,他首次提出并建立了概率论的公理化方法,使得人们可以用微积分的方法研究随机性.后来,以贝叶斯公式为基础的贝叶斯理论在人工智能研究领域中一直是处理不确定性的重要工具.Dempster 和 Shafer 又提出证据理论(DS 理论),引入信任函数和似然函数来描述命题的不确定性.虽然随机现象的每次实验我们无法得到确定的结果,但大量重复出现的随机事件表现出统计性规律.统计规律是大量随机现象的整体性规律,它支配着随机性系统的状态.一定程度上讲,统计规律是随机现象的确定性规律.

模糊性是由于概念外延边界的不清晰表现出来的不确定性,它反映了排中律的问题.模糊性是由于事物类属划分的不分明而引起的不确定性.例如,健康人与不健康人之间没有明确的划分,当判断某人是否属于"健康人"的时候,便可能没有确定的答案,这就是模糊性的一种表现.当一个概念不能用一个分明的集合来表达其外延时,便有某些对象在概念的正反两面之间处于亦此亦彼的形态,它们的类属划分便不再分明,呈现出模糊性.所以,模糊性也就是概念外延的不分明性、事物对概念归属的亦此亦彼性.模糊性不是由人的主观认识造成的,而是事物的一种客观属性.为了研究模糊问题,1965 年,美国控制论学家 Zadeh 教授提出了模糊集合论,开创了模糊系统与模糊控制理论的研究[3].模糊集的贡献在于引入了集合中元素对该集合的"隶属度",从而将经典集合论里的特征函数取值范围由二值{0,1}推广到区间[0,1],将经典二值逻辑推广至多值逻辑.后来,由 Pawlak 提出的粗糙集理论[4]、Gau 和 Buehrer 提出的 Vague 集理论[5],都是处理模糊性问题的有力工具.粗糙集通过上、下边界,Vague 集通过对模糊对象赋予真、假隶属函数来处理模糊性.模糊集的截集就是普通的康托集,是确定的集合.而模糊集的分解定理正是将模糊集转化为一系列精确集的并集,它是联系模糊和清晰的重要桥梁,体现了模糊问题和清晰问题在不同粒度层次上相互转换的过程.

从粒计算的观点来看,不确定性和确定性是信息在不同知识粒度层次上的不同表现形式,它们并非完全对立,在一定粒度层次上可以相互转化.某一层次上的不确定性问题可能是其他层次上的确定性问题,种种不确定现象中还可能隐藏着某些确定的规律.不确定性人工智能学家的任务,就是研究如何形式化地表示不确定现象中的规律性,至少是某种程度的规律性,从而使计算机能够模拟人类认知客观世界的过程.从自然现象的角度来看,人们将自然现象分为确定性现象和不确定性现象.不确定性现象是不同粒度层次上的确定性现象的综合体,主要分为随机现象和模糊现象;而确定性现象是不确定性现象在某个粒度层次上的特殊情况.从数学的角度来考虑,建立不确定性理论的数学基础显得越来越重要,尤其是建立不确定性理论的公理化方法,形成一门不确定性理论的数学分支,从而促进不确定性理论的发展.随着概率论和模糊数学理论研究的逐渐深入,不确定性现象已逐渐被人们认知并利用到实际生活中.

度量自然现象的不确定性程度称为不确定性度量,最早的度量方法是柯尔莫哥洛夫于 1933 年提出的概率

论.后来,随着通信技术的发展,香农于 1948 年提出了信息熵.人们又根据模糊集、粗糙集和云模型等提出了模糊熵、粗糙熵、超熵等概念[6].在运筹学、管理科学、信息科学、系统科学、计算机科学以及工程技术等众多领域都存在着客观的知识不确定性度量问题.近年来,随着粒计算的诞生,很多研究者开始讨论各种粒计算理论模型中知识的不确定性.从粒计算的观点来看,在人类认知过程中,人们对问题的分析及获取的知识表示都具有粒度性,这既与认知主体的主观局限有关,也与观测工具等很多客观因素影响有关.因此,粒计算理论模型中的知识粒具有不确定性,它直接决定问题求解的效率和精度.在认知粒计算模型中,认知的确定性是指认知主体在当前的知识粒度水平上是确定的,而随着新证据的增加及各方面的条件变化使得知识粒度大小也发生了变化,这时,认知表现出了不确定性,即认知过程的不确定性.粒计算方法论的关键是知识空间的粒化问题,知识空间中知识粒的不确定性直接决定了用粒计算方法解决复杂问题的效率和精确程度.因此,研究各种粒计算模型中知识的不确定性得到很多研究者的共同关注.

目前,粒计算的三大基础理论包括:Zadeh 在 1965 年提出来的模糊集理论[3]、Pawlak 在 1982 年提出来的粗糙集理论[4]和张钹、张铃在 1990 年提出来的商空间理论[7].受香农信息熵的启发,Zadeh 以集合中每个成员的隶属函数作为香农(Shannon)信息熵的权重定义了一种新的模糊集的概率熵[8].香农信息熵是一种反映模糊集不确定性的概率熵,之后,Deluca 和 Termini 发现香农信息熵并不适合用来反映模糊集的模糊性,他们研究了模糊集的非概率熵,并在 1972 年从公理化角度出发提出了一种模糊度的公理化定义[9].根据模糊度的公理化定义,Kaufmann 利用模糊集与它本身的 0.5 截集之间的距离定义了一种新的模糊度,称为明科夫斯基模糊度,并给出了它的两个特例,即海明模糊度和欧几里德模糊度.对于粗糙集理论,不确定性主要来自两个方面:一个是由不可分辨关系引起的,另一个是由粗糙集的近似域引起的.当近似域中的上、下近似不相等时,其边界域不为空,即存在不确定性.目前,关于粗糙集的不确定性度量方法主要有粗糙度、粗糙熵、模糊度和模糊熵等.利用粗糙集的上、下近似,Pawlak 给出了近似精度与粗糙度的概念,用它们来刻画粗糙集的不确定性.Wierman 从公理化角度出发,提出了一种不确定性度量,称为粒度度量,它与香农信息熵和不确定性的 Hartley 度量之间有着内在的联系.后来,梁吉业等人定义了一种知识粒度的度量方法,并在此基础上提出了一种知识粒度的公理化定义[10].另外,苗夺谦等人还讨论了知识粗糙性与信息熵之间的关系,证明了知识粗糙性的单调性[11].钱宇华等人则引入了具有直观知识含量特征的组合熵和组合粒度来度量信息系统中的不确定性和粒度大小,并讨论了组合熵与组合粒度之间的关系[12].为了更好地度量粗糙集的不确定性,Chakrabarty 和 Biswas 通过对象的等价类与被近似集合之间的关系导出一个粗糙集的模糊集,给出了粗糙集的两种模糊性度量.王国胤等人从代数观和信息观两个方面研究了信息系统的不确定性,并讨论了粗糙集在不同知识粒度下的不确定性[13,14].商空间理论认为,人类智能的特点就是人们能够从极不相同的粒度上观察和分析同一问题.人们不仅能在不同粒度的世界上进行问题求解,而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界.面对复杂的、难以准确把握的问题,人们通常不是采用系统的、精确的方法去追求问题的最佳解,而是通过逐步尝试的办法达到有限而合理的目标.人类就是这样采用分层递阶、由粗到细、不断求精的多粒度层次分析法来处理问题的.问题在不同层次上体现出不同的不确定性,随着粒度层次的逐渐转化,不确定性逐渐降低.张清华等人[13]讨论了分层递阶商空间的信息熵序列随知识粒度变化的规律.

人类在认知事物的过程中,对问题的分析都是在一定粒度条件下进行的.因而在认知过程中获取的知识也是在一定粒度条件下的知识,对此进行的知识表示具有粒度性及不确定性.人的认知实质上是客观世界的一种映像,客观世界的不确定性决定了人类主观认知过程的不确定性.人类对这个世界的认知基本上都是不确定的,对同一对象,在不同的环境下会有不同的认知结果.认识的过程就是由不确定到逐步确定的过程.在粗粒度上往往是不确定的概念经过调整知识粒度,不断地对这些不确定的概念进行细化、更新,从而得到确定的概念,达到了对事物的结构化认知.这个过程充分体现出人类认知的不确定性.以粒为单位的粒计算理论与人脑处理不确定问题的认知理论有相似之处,对于粒计算模型,知识不确定性的研究显得非常重要,它将有助于粒计算理论和认知科学的进一步发展.本文主要讨论粒计算模型中知识的不确定性问题,揭示知识不确定性随知识粒度的变化关系,进一步挖掘知识不确定性与确定性之间的本质联系.

本文第 1 节介绍主要的粒计算模型.第 2 节讨论经典的粒计算模型中知识的不确定性.第 3 节讨论扩展粒计算模型中知识的不确定性.第 4 节提出知识不确定性度量中存在的问题,并对未来的研究工作进行展望.第 5 节总结论文.

1 粒计算模型

粒计算是人工智能研究领域中的一种新理念和新方法,它覆盖了所有与粒度相关的理论、方法和技术,是复杂问题求解、海量数据挖掘、不确定性信息处理的有效工具.粒计算的主要思想是,通过选择合适的粒度来寻找问题的一种较好的、近似的解决方案,从而降低问题求解的复杂度.随着粒计算研究工作的发展,粒计算模型的种类也层出不穷,如模糊集模型、粗糙集模型、商空间理论模型、基于覆盖的粒计算模型、模糊粗糙集模型和粗糙模糊集模型等,本节将分别加以简单介绍.

1.1 模糊集模型

模糊集理论是由 Zadeh[3]于 1965 年提出来的,它是一种处理模糊和不确定性知识的数学工具.模糊集模型是一种基于模糊集理论的“模糊”粒计算方法,主要讨论粒度的表示问题,认为知识的粒子可以用一个模糊子集来表示,不同程度的知识可以通过不同程度的模糊子集来刻画;然后,利用模糊逻辑进行推理和计算,根据实际需求得到近似的较优解.目前,它已被广泛应用于模糊控制、模式识别、模糊决策和模糊聚类分析等领域.

1.2 粗糙集模型

粗糙集理论是由波兰数学家 Pawlak[4]于 1982 年提出来的,它是一种处理不精确和不确定性知识的数学工具.粗糙集模型是一种基于粗糙集理论的“精确”粒计算方法,研究了在给定空间(知识基)上粒度的表示、转换和相互依存等问题.该理论认为,概念粒子可以用子集来表示,不同粒度下的粒子可以用不同大小的子集来描述,所有的粒子都通过等价关系获得划分产生.其本质思想是,针对属性值的差异,利用等价关系对离散的对象集进行划分,建立一个可以用上、下近似集来描述不确定性问题的边界.目前,它已被广泛应用到人工智能、知识获取、决策分类和故障诊断等领域.

1.3 商空间理论模型

张钹和张铃[7]依据人们在解决问题时能够从不同的粒度世界去分析和观察同一问题,并且很容易地从一个粒度世界转到另一个粒度世界,在 1990 年针对复杂问题求解时,提出了商空间理论.商空间理论模型是一种基于商空间理论的“精确”粒计算方法,研究了所有可能的商空间之间的表示、关系、合成、分解、推理等问题,主要论述了人们面临复杂问题时,通常从较“粗”的粒度层次来分析问题,再依据问题的需求,利用等价关系可以进行动态划分,从不同的商空间(从不同的角度)上观察同一问题,最终寻求到问题的近似最优解.目前,它已被广泛用于图像分割、数据挖掘、故障诊断和产品预测等领域.

1.4 其他相关粒计算模型

模糊集模型、粗糙集模型和商空间模型是 3 个主要的粒计算模型.在这 3 个模型的基础上,人们提出了很多新的模型,如基于覆盖的粒计算模型、模糊粗糙集模型、粗糙模糊集模型和基于概念格的粒计算模型等.基于覆盖的粒计算模型[15−19]是一种特殊的广义粗糙集理论模型,该模型以邻域系统为工具,通过二元关系(等价关系或非等价关系)来产生邻域,再通过 Zooming-in 和 Zooming-out 两个算子实现了不同粒层之间的粒子可以相互转化.模糊粗糙集模型[20−22]是用对象集上的一个等价关系,在模糊关系理论下,引入上、下近似后所得到的一个扩展模型.粗糙模糊集模型[20,22]是用模糊相似关系代替等价关系所得到的一个扩展模型.基于概念格的粒计算模型[23]是根据对象与属性之间的二元关系,依据知识体在内涵(属性集)和外延(对象集)上的依赖或因果关系建立的一种概念层次结构,表明了概念之间的泛化和例化关系.随着粒计算研究工作的深入,人们提出了越来越多的新的粒计算模型,如基于神经网络的粒计算模型[24,25]、自主式粒计算模型[26,27]等.

2 主要粒计算模型中的知识不确定性

2.1 模糊集的不确定性度量

模糊集理论作为经典集合理论的扩展,利用隶属函数来表示对象与集合之间的隶属关系.在模糊集理论中,对于不确定性问题的处理是通过模糊度(模糊熵的归一化形式是模糊度)来进行的,模糊度刻画了模糊概念的模糊程度.

定义 2.1[9]. 若映射 $d{:}F(U)\to[0,1]$满足条件:

(1) $d(A)=0$,当且仅当 $A\in P(U)$;

(2) $d(A)=1$,当且仅当$\forall x_i\in U$,有 $A(x_i)=\frac{1}{2}$;

(3) $\forall_{x_i\in U}\left(B(x_i)\leqslant A(x_i)\leqslant\frac{1}{2}\right)\vee\left(\frac{1}{2}\leqslant A(x_i)\leqslant B(x_i)\right)\to d(B)\leqslant d(A)$;

(4) $A\in F(U),d(A)=d(\sim A)$,其中,$\sim A$ 是 A 的补集.

称映射 d 是 $F(U)$上的一个模糊度,$d(\cdot)$是模糊集的模糊度.

明可夫斯基(Minkowski)模糊度:

$$d_p(A)=\frac{2}{n^{\frac{1}{p}}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|A(u_i)-A_{\frac{1}{2}}(u_i)^p\right|\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

不难验证,明可夫斯基模糊度满足定义 2.1 中的 4 个条件.

当 $p=1$ 时,d_1 称为海明(Haming)模糊度:

$$d_1(A)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|A(u_i)-A_{\frac{1}{2}}(u_i)\right| \tag{2.2}$$

当 $p=2$ 时,d_2 称为欧几里德(Euclid)模糊度:

$$d_2(A)=\frac{2}{n^{1/2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|A(u_i)-A_{\frac{1}{2}}(u_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

香农模糊度:

$$H(A)=\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}s(A(u_i)) \tag{2.4}$$

其中,$s(x)$为香农函数 $s(x)=\begin{cases}-x\ln x-(1-x)\ln(1-x), & x\in(0,1)\\ 0, & x=0 \text{ or } x=1\end{cases}$.

米据生等人[6]改进了模糊度的公理化定义,给出了一种新的度量方法:

$$d(A)=\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}A(x_i)(1-A(x_i)) \tag{2.5}$$

冯乃勤[28]提出了一种新的模糊度的定义

$$d_F(A)=1-\mu_A^P(u) \tag{2.6}$$

其中,$\mu_A^P(u)$ 是 U 的平均隶属度,当论域 U 为有限时,$\mu_A^P(u)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_A(u_i)$.

2.2 粗糙集的不确定性度量

为了便于清楚地讨论粗糙集的不确定性问题,本文根据信息系统的性质,从两个方面讨论粗糙集的不确定性,即基于完备信息系统的粗糙集模型和基于不完备信息系统的粗糙集模型.

2.2.1 完备信息系统的粗糙集模型的不确定性度量

在同一知识粒度的近似空间下,Chakrabarty 等人[22]较为详细地讨论了粗糙集的模糊性度量问题;王国胤等人[14,29,30]从信息观的角度分析了决策信息系统的不确定性,并讨论了代数观和信息观意义下粗糙集的不确定性的差异;梁吉业等人[31,32]从信息熵、条件熵、互信息和知识粒度的角度分析了粗糙集的不确定性,并定义了一种新的粗糙集的粗糙熵;苗夺谦等人[33−35]从粒计算和信息表示等角度研究了知识的粒度、知识的粗糙度与信息熵之间的关系.下面简单介绍几种典型的粗糙集不确定性度量方法.

信息熵

信息熵是一个非常广泛的概念,1948 年,Shannon 信息熵的提出为信息的不确定度量奠定了理论基础.Klir 基于 Shannon 熵提出了一种度量不确定性的信息熵[6]:

$$H(F_X^B)=-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2}\mu_X^B(x_i)\log_2^{\mu_X^B(x_i)} \tag{2.7}$$

粗糙度

Pawlak 在研究粗糙集的近似精度和近似质量时提出了粗糙集的粗糙度的概念.粗糙集的粗糙度是通过集合的上、下近似来定义,它充分反映了由于集合边界域的存在所引起的不确定性,下面给出其相关定义.

定义 2.2[36]. 在一个信息系统中,$IND(B)$是 U 上的一个不可分辨关系,$[x]_B$ 表示对象 x 的等价类,对象子集 $X\subseteq U$,X 的下近似集($\underline{B}X$)、上近似集($\overline{B}X$)和边界域($BN_B(X)$)分别定义如下:

$$\underline{B}X=\{x\in U\,|\,[x]_B\subseteq X\},\ \overline{B}X=\{x\in U\,|\,[x]_B\cap X\neq\varnothing\},\ BN_B(X)=\overline{B}(X)-\underline{B}(X).$$

定义 2.3[37]. 在一个信息系统中,$IND(B)$是 U 上的一个不可分辨关系,$[x]_B$ 表示对象 x 的等价类,对象子集 $X\subseteq U$,X 的粗糙精度和粗糙度分别为:粗糙精度 $\alpha_B(X)=\frac{\underline{B}(X)}{\overline{B}(X)}$;粗糙度 $\rho_B(X)=1-\alpha_B(X)=1-\frac{\underline{B}(X)}{\overline{B}(X)}=\frac{BN_B(X)}{\overline{B}(X)}$.

粗糙熵

为了弥补粗糙度的不足,很多学者对粗糙集的粗糙熵进行了深入研究.

定义 2.4[32]. 设 $U=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$,属性子集 $B(B\subseteq A)$对论域的划分 $U/B=\{X_1,X_2,\dots,X_m\}$,$X\subseteq U$,则属性集合 B 的熵定义为 $E(B)=-\sum_{i=1}^{m}\frac{|X_i|}{|U|}\log_2^{\frac{1}{|X_i|}}$,$X$ 在划分 U/B 上的粗糙熵定义为 $E_B(X)=-\rho_B(X)E(B)$.

模糊度

由于粗糙熵的局限性,Chakrabarty 通过量化论域中对象与目标集合的隶属关系提出了粗糙集的模糊度这一概念,从而用模糊集的方法对粗糙集的不确定性进行量化分析,为粗糙集的不确定性度量提供了新的思路.

设 U 是非空对象集,对象子集 $X\subseteq U$,则对于任意 $x(x\in U)$,x 属于集合 X 的隶属函数为 $\mu_X^B(x)=\frac{|X\cap[x]_B|}{|[x]_B|}$.

模糊度是度量不确定问题的有力工具,很多研究者对粗糙集的模糊度进行了分析.Chakrabarty 等人[22]在提出了粗糙集的模糊度之后,又通过粗隶属函数导出一个模糊集,并利用模糊集与其最邻近清晰集之间的距离来度量粗糙集的模糊性.

定义 2.5[20]. 设 A 是 U 上的模糊集,与 A 有关的最邻近的清晰集记为 $\underline{A}$,其定义为

$$\underline{A}(x_i)=\begin{cases}0, & A(x_i)<0.5\\ 1, & A(x_i)>0.5.\\ 0或1, & A(x_i)=0.5\end{cases}$$

一般地,当 $A(x_i)=0.5$ 时,取 $\underline{A}(x_i)=1$.这时,$\underline{A}=A_{0.5}$.这里,$A_{0.5}$ 表示 A 的 0.5 截集.

Chakrabarty 等人[22]利用模糊集 F_X^B 与其最邻近清晰集 $\underline{F_X^B}$ 之间的距离给出了粗糙集的两种模糊性度量:

(1) 线性模糊度

$$d_{Kl}(F_X^B)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}|\mu_X^B(x_i)-\underline{\mu_X^B}(x_i)| \tag{2.8}$$

(2) 二次模糊度

$$d_{Kq}(F_X^B)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_X^B(x_i)-\underline{\mu_X^B}(x_i))^2} \tag{2.9}$$

其中, $\underline{\mu_X^B}(x_i)$ 表示 x_i 在模糊集 $\underline{F_X^B}$ 中的隶属函数.

线性模糊度和二次模糊度很好地度量了粗糙集的模糊性,但是,随着知识粒度的减小,可能存在集合的线性模糊度不变或者二次模糊度反而增加的问题.为此,王国胤等人进一步研究了粗糙集模糊度的度量方法,提出一种基于信息熵的粗糙集的模糊性度量方法[13]

$$d_Z(F_X^B)=-\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}[\mu_X^B(x_i)\ln\mu_X^B(x_i)+(1-\mu_X^B(x_i))\ln(1-\mu_X^B(x_i))] \tag{2.10}$$

并证明了这种模糊度随着知识粒度的减小而单调递减,弥补了粗糙度和粗糙熵对粗糙集不确定性度量的不足.它既刻画出集合 X 的边界域中属于 X 的那部分元素所"贡献"的不确定性,也刻画出不属于 X 的那部分元素所"贡献"的不确定性,更精确地描述了粗糙集的不确定性.

模糊熵

定义 2.6[38]. $\forall A\in F(U)$,若映射 $e:F(U)\to[0,+\infty)$满足条件:

(1) $e(A)=0$ 当且仅当 $A\in P(U)$;

(2) $e(A)$取得最大值当且仅当 $\forall_{x_i\in U}A(x_i)=\frac{1}{2}$;

(3) $\forall_{x_i\in U}\left(B(x_i)\leqslant A(x_i)\leqslant\frac{1}{2}\right)\vee\left(\frac{1}{2}\leqslant A(x_i)\leqslant B(x_i)\right)\to e(B)\leqslant e(A)$;

(4) $e(A)=e(A^c)$,这里,A^c 是 A 的补集.

那么,称映射 e 是 $F(U)$上的一个模糊熵,记为 $e(\cdot)$.

梁吉业等人[31,32]建立了粗糙集的一种模糊熵:

$$E_L(F_X^B)=\sum_{i=1}^{n}\mu_X^B(x_i)(1-\mu_X^B(x_i)) \tag{2.11}$$

并得出结论:一个精确集的模糊熵等于 0,一个粗糙集合与其补集具有相同的模糊性.

粗糙集的粗糙度、粗糙熵、模糊度和模糊熵虽然都能够度量粗糙集的不确定性,但它们之间有一定的区别和联系.粗糙性从集合的边界区域的角度来刻画粗糙集的不确定性,随着知识粒度的减小,如果集合的边界区域变小,则粗糙度会有所降低,粗糙集的不确定性有所下降,具有很好的直观性;而粗糙集的模糊性用元素属于某个集合的隶属函数的大小来刻画粗糙集的不确定性,与集合的边界区域大小和知识粒度的大小有关.它们之间的关系如图 1 所示.

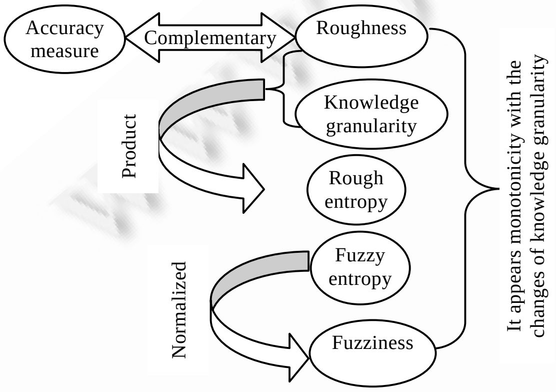


Fig.1 Relationship among rough set methods for measuring uncertainty in complete information

图 1 完备信息系统中粗糙集不确定性度量方法之间的关系 system

2.2.2 不完备信息系统的粗糙集模型的不确定性度量

接下来,我们来介绍不完备信息系统中不确定性的度量方法.

信息熵

梁吉业等人[32]给出了不完备信息系统中信息熵的形式,其形式见公式(2.12):

$$H(A)=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\log_2\frac{|S_A(u_i)|}{|U|} \tag{2.12}$$

为了区别于 Shannon 熵,梁吉业[32]又给出了信息熵的另外一种形式,即

$$E(A)=\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\left(1-\frac{|S_A(u_i)|}{|U|}\right) \tag{2.13}$$

粗糙熵

由于信息熵在度量系统不确定性中与人的直觉正好相反,Beaubouef[39]在讨论粗糙关系数据库和信息系统时将粗糙熵的概念引入到了粗糙集中.之后,梁吉业[40]又将粗糙熵的概念引进到不完备信息系统中,并给出了基于不完备信息系统的粗糙熵:

$$E_r(A)=-\sum_{i=1}^{|U|}\frac{1}{|U|}\log_2\frac{1}{|S_A(u_i)|} \tag{2.14}$$

组合熵

钱宇华等人[41]在不完备信息系统中引入了组合熵的概念,可以更加直观地反映不完备信息系统的不确定性,其形式见公式(2.15):

$$CE(A)=\frac{1}{|U|}\sum_{i=1}^{|U|}\left(\frac{C_{|U|}^2-C_{|S_A(u_i)|}^2}{C_{|U|}^2}\right) \tag{2.15}$$

1979 年,Zadeh[42]讨论了模糊信息粒的问题.特别地,在一个信息系统中,结合粒计算的一些度量方法以及它们之间的关系[32]也被加以讨论.例如,粒度度量、信息熵、粗糙熵和知识粒度.但因已存在的知识粒度还都没有一个统一的描述,从而给实际应用带来了极大的不便.因此,梁吉业等人[10]从公理化角度出发提出了知识粒度的公理化定义,并证明了已存在的粒度度量都是该公理化定义的特殊形式.该公理化定义满足下列 3 个性质:(1) (非负性)$G(P)\geq 0$;(2) (不变性)$\forall P,Q\subseteq A$,若 $P\approx Q$,有 $G(P)=G(Q)$;(3) (单调性)$\forall P,Q\subseteq A$,若 $P\prec' Q$,有 $G(P)<G(Q)$.

知识粒度

知识粒度是论域中知识粒的一种平均度量,它代表了一种分类能力.事实上,知识粒度给出了论域划分的一种简单的、可理解的描述.梁吉业等人[43]在提出了知识粒度的公理化定义之后,又进一步提出了不完备信息系统中知识粒度的定义,其形式见公式(2.16):

$$GK(A)=\frac{1}{|U|^2}\sum_{i=1}^{|U|}|S_A(u_i)| \tag{2.16}$$

组合粒度

为了对不完备信息系统的知识粒度有一个更加直观的理解,钱宇华等人[41]提出了不完备信息系统中组合粒度的概念,该组合粒度定义见公式(2.17):

$$CG(A)=\frac{1}{|U|}\sum_{i=1}^{|U|}\frac{C_{|S_A(u_i)|}^2}{C_{|U|}^2} \tag{2.17}$$

熵与知识粒度的关系

为了更好地理解不确定性度量的本质,梁吉业等人[44]建立了信息熵、粗糙熵、组合熵、知识粒度和组合粒度之间的如下关系:$E(A)+GK(A)=1$,$H(A)+E_r(A)=\log_2|U|$和 $CE(A)+CG(A)=1$.

从中可以看出,信息熵 $E(A)$和知识粒度 $GK(A)$在描述信息系统不确定性上具有相同的能力,并且熵和知识粒度之间存在某种意义上的互补关系.也就是说,熵越大,知识粒度越小;熵越小,知识粒度越大.它们之间的关系如图 2 所示.

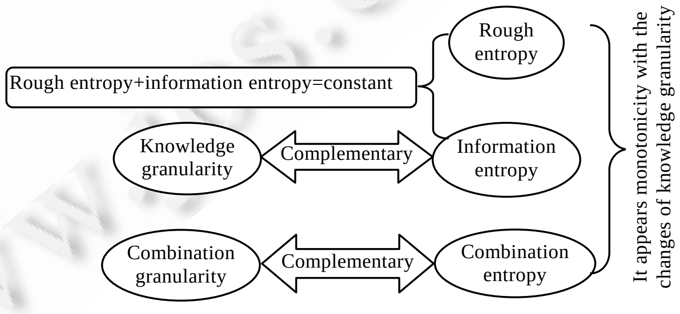


Fig.2 Relationship among rough set methods for measuring uncertainty in incomplete information system
图 2 不完备信息系统中粗糙集不确定性度量方法之间的关系

2.2.3 完备信息系统与不完备信息系统不确定性之间的联系

由完备信息系统与不完备信息系统的定义可以看出,完备信息系统是不完备信息系统的特殊情况,而不完备信息系统是完备信息系统的推广.因此,不完备信息系统中的不确定性度量在完备信息系统中都有其特殊形式.即当信息系统由不完备变为完备时,其不确定性度量也会退化为相应的形式.表 1 总结了粗糙集的各种不确定性度量方法.

Table 1 Rough set method for measuring uncertainty

表 1 粗糙集的不确定性度量方法

Measure method	Author Year	Uncertainty measurement	Advantage	Disadvantage	Property
Information entropy	Klir 1998	$H(F_X^B)=-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{2}\mu_X^B(x_i)\log_2\mu_X^B(x_i)$	Information gain. Function has logarithmic property	It is contrary to some intuition of people, i.e., the more uncertainty degree the system has, the larger roughness of system will be. But according to the information entropy, a contrary conclusion will be resulted	With the decrease of knowledge granularity, it is increasing monotonically
	Liang JY 2004	$H(A)=-\sum_{i=1}^{\lvert U\rvert}\frac{1}{\lvert U\rvert}\log_2\frac{\lvert S_A(u_i)\rvert}{\lvert U\rvert}$			
	Liang JY 2002	$E(A)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lvert X_i\rvert}{\lvert U\rvert}\left(1-\frac{\lvert X_i\rvert}{\lvert U\rvert}\right)$	Information gain. Function has property of complement		
	Liang JY 2004	$E(A)=-\sum_{i=1}^{\lvert U\rvert}\frac{1}{\lvert U\rvert}\left(1-\frac{\lvert S_A(u_i)\rvert}{\lvert U\rvert}\right)$			
Roughness	Pawlak 1982	$\rho_B(X)=1-\frac{\underline{R}(X)}{\overline{R}(X)}=\frac{BN_B(X)}{\overline{R}(X)}$	Simple, easy for calculation	It can only describe the changes of the boundary region, but cannot perfectly reflect the changes of the knowledge granularity	It is inversely proportional to the lower approximation, and proportional to the upper approximation
Rough entropy	Liang JY 2004	$E_B(X)=\rho_B(X)\sum_{i=1}^{m}\frac{\lvert X_i\rvert}{\lvert U\rvert}\log_2\frac{1}{\lvert X_i\rvert}$	It can synchronously describe the changes of the boundary region and the knowledge granularity	It cannot correctly depict the changes of the knowledge granularity in positive domain and negative domain	With the decrease of knowledge granularity, it is decreasing monotonically
	Liang JY 2006	$E_r(A)=-\sum_{i=1}^{\lvert U\rvert}\frac{1}{\lvert U\rvert}\log_2\frac{1}{\lvert S_A(u_i)\rvert}$	Simple, easy for calculation	When the tolerance classes of two incomplete information systems are the same, it cannot depict the uncertainty caused by different degrees of missing attribute value well	
Fuzziness	Chakrabarty 2000	$d_{Kl}(F_X^B)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert\mu_X^B(x_i)-\underline{\mu_X^B}(x_i)\rvert$	Simple, easy for calculation	As the knowledge granularity decreases, linear fuzziness may be constant	It is proportional to the distance between fuzzy set and its nearest neighbor crisp set
		$d_{Kq}(F_X^B)=\frac{2}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_X^B(x_i)-\underline{\mu_X^B}(x_i))^2}$	It is more accurate than linear fuzziness	As the knowledge granularity decreases, quadratic fuzziness may increase	
	Wang GY 2008	$d_Z(F_X^B)=-\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}[\mu_X^B(x_i)\ln\mu_X^B(x_i)+(1-\mu_X^B(x_i))\ln(1-\mu_X^B(x_i))]$	It can depict the uncertainty, which is caused by elements in the boundary region	The formula is complex	With the decrease of knowledge granularity, it is decreasing monotonically

(Continue)

Table 1 Rough set method for measuring uncertainty (continue)

表 1 粗糙集的不确定性度量方法(续)

Measure method	Author Year	Uncertainty measurement	Advantage	Disadvantage	Property
Fuzzy entropy	Liang JY 2002	$E_L(F_X^B)=\sum_{i=1}^{n}\mu_X^B(x_i)(1-\mu_X^B(x_i))$	Information gain. Function has property of complement. According to this formula, we can define corresponding conditional entropy and mutual information	It is not normalized, the maximum value is indefinite	With the decrease of knowledge granularity, it is increasing monotonically
Combination entropy	Qian YH 2007	$CE(A)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lvert X_i\rvert}{\lvert U\rvert}\frac{C_{\lvert U\rvert}^2-C_{\lvert X_i\rvert}^2}{C_{\lvert U\rvert}^2}$	Information gain. Function has visual information contents, so it is easier for comprehension	It cannot distinguish two types of knowledge-based, which possess the same knowledge granularity and different knowledge structure	With the decrease of knowledge granularity, it is increasing monotonically
	Qian YH 2006	$CE(A)=\frac{1}{\lvert U\rvert}\sum_{i=1}^{\lvert U\rvert}\left(\frac{C_{\lvert U\rvert}^2-C_{\lvert S_A(u_i)\rvert}^2}{C_{\lvert U\rvert}^2}\right)$		It cannot accurately depict the ratio of elements, which can be distinguished from each other in incomplete information systems	
Knowledge granularity	Liang JY 2004	$GK(A)=\frac{1}{\lvert U\rvert^2}\sum_{i=1}^{m}\lvert X_i\rvert^2$	It conforms to characteristics of granular computing, i.e., it can refine knowledge and information from different hierarchies	It cannot distinguish two types of knowledge-based, which possess the same knowledge granularity and different knowledge structure	With refinement of equivalence class, it is decreasing monotonically
	Liang JY 2006	$GK(A)=\frac{1}{\lvert U\rvert^2}\sum_{i=1}^{\lvert U\rvert}\lvert S_A(u_i)\rvert$			With refinement of tolerance class, it is decreasing monotonically
Combination granularity	Qian YH 2007	$CG(A)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lvert X_i\rvert}{\lvert U\rvert}\frac{C_{\lvert X_i\rvert}^2}{C_{\lvert U\rvert}^2}$	Information gain. Function has visual information contents, so it is easier for comprehension	It cannot distinguish two types of knowledge-based, which possess the same knowledge granularity and different knowledge structure	With the refinement of equivalence class, it is decreasing monotonically
	Qian YH 2006	$CG(A)=\frac{1}{\lvert U\rvert}\sum_{i=1}^{\lvert U\rvert}\frac{C_{\lvert S_A(u_i)\rvert}^2}{C_{\lvert U\rvert}^2}$		It cannot accurately depict the ratio of elements, which cannot be distinguished from each other in incomplete information systems	With refinement of tolerance class, it is decreasing monotonically

2.3 分层递阶商空间结构的不确定性度量

分层递阶这一概念早已被用到信息、控制以及管理等科学中.近年来,人工智能领域中也开始广泛使用,如分层递阶规划、分层递阶学习和分层递阶控制等.为了模拟人脑处理复杂问题求解的过程,张钹、张铃提出了分层递阶的商空间理论.之后,张铃等人对模糊集的结构进行了详细的分析[45],得到模糊集分层递阶的结构描述,并指出,用结构来描述模糊问题比用模糊集来描述模糊问题更能反映出问题的本质.模糊问题的结构化描述更能清晰地刻画事物模糊性的本质特征,具有鲁棒性.分层递阶结构在一定程度上刻画了分类的本质特征,从不同粒度层次上描述了分类的结果,进而刻画了分类的模糊性.张铃等人[45,46]研究了不同的模糊等价关系可能得到相同的分层递阶结构,即同构的模糊等价关系在本质上具有相同的分类能力,并进一步研究了具有ε-相似的模糊等价关系对应的分层递阶结构之间的关系.唐旭清等人[47]讨论了模糊相似关系同构的充分条件,以及模糊

相似关系之间的同构与其诱导的模糊等价关系之间同构的关系,进一步揭示了模糊相似关系与模糊等价关系之间的联系.

不同的人根据各自的主观意识和评价标准,会得到不同的模糊相似关系,从而得到各自的模糊等价关系和分层递阶结构,由此得到各自的分类结果.这些分类结果可能相同,也可能不同,是什么原因导致它们相同(或不同)?这个分类结果(分层递阶结构)分类质量的好坏、知识的含量以及不确定性又如何?不同的分层递阶结构对分类的影响是否不同?为此,张清华等人[48]从一般的模糊关系入手,提出了分层递阶结构的信息熵序列,讨论了模糊相似关系、模糊等价关系、分层递阶结构和分层递阶结构的熵序列之间的关系,利用信息熵序列刻画了分层递阶结构的不确定性.从分类(聚类)分析的观点来看,同构的分层递阶结构具有相同的分类能力;从信息熵来看,同构的分层递阶结构具有相同的信息熵.这些结论揭示了分层递阶结构的本质特征.信息熵序列、分层递阶结构、模糊关系之间的联系见表 2.

Table 2 Relationship among information entropy sequence, hierarchical structure, and fuzzy relation[48]

表 2 信息熵序列、分层递阶结构、模糊关系的联系[48]

<table>
<tr><th>Fuzzy similarity relation $\tilde{R}_1$ and $\tilde{R}_2$</th><th>Fuzzy equivalence relation R_1 and R_2</th><th>Hierarchical quotient space structure $\pi_X(R_1)$ and $\pi_X(R_2)$</th><th>Information entropy sequence $H(\pi_X(R_1))$ and $H(\pi_X(R_2))$</th></tr>
<tr><td>Isogeny but not similarity</td><td>Similarity</td><td>Isomorphism</td><td rowspan="4">Same</td></tr>
<tr><td>Similarity but not isomorphism</td><td>Isomorphism</td><td rowspan="3">Same</td></tr>
<tr><td>Isomorphism but not same</td><td rowspan="2">Same</td></tr>
<tr><td>Same</td></tr>
</table>

Note: $R_i(i=1,2)$ is fuzzy equivalence relation, induced by fuzzy similarity relation $\tilde{R}_i(i=1,2)$ here.

表 2 表明,对相同的论域进行分类,不同的人可能有不同的标准,他们可能根据自己的评判指标得到对象之间的不同相似度,从而建立论域上的模糊相似关系.如果这些相似关系是同源但不相似的,则它们能够转化为相似的模糊等价关系,得到同构的分层递阶商空间,从而得到相同的信息熵序列;如果这些模糊相似关系是相似但不同构的,则它们能够转化为同构的模糊等价关系,从而得到相同的分层递阶商空间和相同的信息熵序列;如果这些模糊相似关系是同构的,则它们能够转化为相同的模糊等价关系,得到相同的分层递阶商空间和相同的信息熵序列.因此,虽然人们对同一事物可能有不同的评价标准,但只要得到论域上的模糊相似关系是同源的,就能够得到具有相同信息熵序列的分层递阶结构,从而使这些模糊相似关系对应相同的分类能力.由此看来,信息熵序列是刻画分层递阶商空间不确定性的有力工具,它能更好地从本质上反映出分层递阶商空间对论域的分类效果.人类对客观世界的过程中的“模糊与清晰”、“不确定与确定”是相对的,在一定程度上可以相互转化.分层递阶结构是“模糊问题”和“清晰问题”之间的一座桥梁,对其不确定性度量的研究将进一步促进粒计算理论的发展和完善.

3 扩展粒计算模型的不确定性度量

模糊集模型、粗糙集模型和商空间理论模型是 3 个主要的粒计算模型.然而在处理不确定性和不精确性问题时,这 3 种粒计算模型都表现出一定的优势和不足.因此,人们对这 3 个模型进行了一定的扩展和补充,提出了很多新的粒计算模型,如基于覆盖的粒计算模型、粗糙模糊集模型、模糊粗糙集模型和基于概念格的粒计算模型等.本节将分别介绍模糊粗糙集、粗糙模糊集[49−52]、覆盖的粒计算模型[53−61]以及基于概念格的粒计算模型[62]的不确定性度量.

3.1 模糊粗糙集的不确定性度量

模糊粗糙集是对粗糙集理论和模糊集理论的推广.当等价类的元素所属的类别不明确时,等价类便表示为模糊集的形式 $F=\{F_1,F_2,\ldots,F_H\}$,F_i(其中,$i\in\{1,2,\ldots,H\}$)是模糊集.给定 X 上的一个模糊划分 R,利用上近似 $\overline{R}$ 和下近似 $\underline{R}$ 的形式表达任意一个模糊集合 F,称($\overline{R}(F),\underline{R}(F)$)为模糊粗糙集.模糊上、下近似[49]如公式(3.1)和公式(3.2)所示:

$$\forall x\in X,\ \mu_{\overline{R}}(F_i)=\sup_{x}\min\{\mu_{F_j}(x),\mu_F(x)\} \tag{3.1}$$

$$\forall x \in X,\ \mu_{\underline{R}}(F_i) = \inf_x \max\{1-\mu_{F_j}(x), \mu_F(x)\} \tag{3.2}$$

在给定的一个有限知识库 $K=(U,R)$上,对于每个子集 $X\subseteq U$ 和一个等价关系 $R\in ind(K)$,粗糙集的隶属度定义:

$$\mu_X(u) = \frac{|X \cap [u]_R|}{|[u]_R|} \tag{3.3}$$

其中,$u\in U$,$[u]_R$ 表示在 U 中的 R 等价类.

引入 U 中模糊集 F_X^R,得到公式(3.4):

$$F_X^R = \left\{(u, \mu_{F_X^R}(u)) : u \in U, \mu_{F_X^R}(u) = \frac{|X \cap [u]_R|}{|[u]_R|}\right\} \tag{3.4}$$

Banerjee 和 Pal[21]提出了在某一近似空间的模糊集的粗糙度这一概念.考虑参数$\alpha,\beta(0<\alpha\leqslant\beta\leqslant 1)$,则相应的模糊集 F_*和 F^*的α-截集$(F_*)_\alpha$和β-截集$(F_*)_\beta$,分别称为(U,R)上模糊集 F 的α-下近似和β-上近似.那么,(U,R)上模糊集 F 的粗糙度的定义可见公式(3.5):

$$\rho_R^{\alpha,\beta}(F) = 1 - \frac{|(F_*)_\alpha|}{|(F_*)_\beta|} \tag{3.5}$$

3.2 粗糙模糊集的不确定性度量

设集合 $X\subseteq U$ 和一个等价关系 R,F 为定义在 X 上的模糊集合,粗糙集 X 的 R 下近似为 $\underline{R}X$, R 上近似为 $\overline{R}X$.若 $U/R=\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$,则可定义模糊隶属函数如公式(3.6)和公式(3.7)[49]所示:

$$\mu_{\overline{R}(F)}(X_i) = \sup\{(\mu_F(x) \mid \omega(X_i) = [x]_R\} \tag{3.6}$$

$$\mu_{\underline{R}(F)}(X_i) = \inf\{(\mu_F(x) \mid \omega(X_i) = [x]_R\} \tag{3.7}$$

设(U,R)为 Pawlak 粗糙集空间,$U=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$,A 为 U 上的一个模糊集合,则粗糙模糊集 $(\underline{R}(F),\overline{R}(F))$ 的模糊性度量 $FR(A)$定义[63]如公式(3.8)所示:

$$FR(A) = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} R(A)(x)(1-R(A)(x)) \tag{3.8}$$

其中, $R(A)(x) = \dfrac{\sum_{y\in[x]_R} A(y)}{|[x]_R|}$.

3.3 覆盖粒计算模型的不确定性度量

3.3.1 覆盖近似空间中粗糙集的粗糙度

粗糙度是一种最简单的不确定性度量方法,它的概念最初是由Pawlak教授提出来的;并且,粗糙度是基于近似精度而定义的,它在数量上表现为 1 与近似精度的差.之后,黄兵等人[64]将粗糙度的概念引入到了覆盖近似空间中,用来度量覆盖近似空间中粗糙集的不确定性.该粗糙度的定义见公式(3.9):

$$\rho_C(X) = 1 - \frac{|\underline{C}(X)|}{|\overline{C}(X)|} \tag{3.9}$$

3.3.2 覆盖近似空间中粗糙集的粗糙熵

由于粗糙度所存在的缺点,梁吉业认为,在具有严格偏序关系的两个近似空间中,粗糙集的不确认性度量也应该具有严格的大小关系.因此,他将粗糙集的粗糙熵定义为知识粗糙熵与粗糙度的乘积[31].之后,黄兵等人[64]又将粗糙熵的概念引入到了覆盖近似空间中,用来度量覆盖近似空间中粗糙集的不确定性,它能够更好地度量覆盖近似空间中粗糙集的不确定性,该粗糙熵定义见公式(3.10):

$$E_C(X)=\rho_C(X)E(C) \tag{3.10}$$

其中, $E(C) = \sum_{i=1}^{m}\frac{|C_i|}{m}\log_2|C_i|$.粗糙熵在一定程度上要精确于粗糙度,但王国胤等人[13]指出,粗糙集的不确定性在正域或负域的知识粒度进行细分时,其值应该不变,而公式(3.10)定义的粗糙熵却严格地递减.

3.3.3 覆盖近似空间中粗糙集的模糊度

虽然粗糙熵能够较为准确地度量覆盖近似空间中粗糙集的不确定性,但根据王国胤等人[13]的研究结论,粗

糙集的不确定性在正域或负域的知识粒子进行细分时,其值应该不变.因此,如何更加准确地度量覆盖近似空间中粗糙集的不确定性已经越来越受到人们的重视.如,徐伟华等人[60]利用 x 在近似空间上的最小描述集与集合 X 的交集再与最小描述集的比值来确定模糊集的隶属函数,其定义见公式(3.11):

$$\mu_{(F_X^C)_1}(u)=\frac{|(\cup Md(u))\cap X|}{|\cup Md(u)|} \tag{3.11}$$

魏荣等人[61]利用覆盖上的一个约简集中的元素与集合 X 的交集再与约简集中的元素之比来确定模糊集的隶属函数,其定义见公式(3.12):

$$\mu_{(F_X^C)_2}(x)=\max\left\{\frac{|K_i\cap X|}{|K_i|}\,|\,x\in K_i\right\} \tag{3.12}$$

有了隶属函数的定义之后,就可以用模糊度的公式来计算覆盖近似空间中的粗糙集的不确定性,其主要方法[65]见公式(3.13):

$$v_p(A)=(2/n^p)\cdot d(A,N(A)) \tag{3.13}$$

胡军等人[66]提出了一种新的覆盖粗糙集的模糊度这一概念,该模糊度将隶属函数分为 4 种情况,根据这 4 种情况可以得到一个隶属函数,其定义见公式(3.14):

$$D(x,X)=\begin{cases}\max\left\{\dfrac{|K\cap X|}{|K|}\middle| K\in Ad(x)\right\}, & x\in X\\ \max\left\{\dfrac{|K\cap X|}{|K|}\middle| K\in Md(x')\cap Ad(x), x'\in X_2\right\}, & x\in U-X\end{cases} \tag{3.14}$$

然后,再利用如下模糊度公式就可以计算覆盖近似空间中的粗糙集的不确定性:

$$\delta(F_X^C)=\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_{F_X^C}(x_i)(1-\mu_{F_X^C}(x_i)) \tag{3.15}$$

$$\xi(F_X^C)=-\frac{1}{n\ln 2}\sum_{i=1}^{n}[\mu_{F_X^C}(x_i)\ln\mu_{F_X^C}(x_i)+(1-\mu_{F_X^C}(x_i))\ln(1-\mu_{F_X^C}(x_i))] \tag{3.16}$$

3.4 基于概念格的粒计算模型的不确定性度量

张文修等人[67]认为,对于不确定性知识,利用外延内涵算子和内涵外延算子可以将知识进行泛化和例化,结合包含度理论,在不同的泛化和例化知识系统上发现知识,这种方法与粒计算的思路完全一致.曲开社等人在概念信息粒格上建立了 3 个偏序集:*G* 偏序集、*M* 偏序集和 *GM* 偏序集[68],并将包含度的概念引入到这 3 个偏序集中,证实了概念信息系统中的内涵、外延和蕴涵规则均可以归结为偏序集上的序表示及包含度表示.

定义 3.1[69]. 设 U 是一个论域,集合 A,B 是 U 中的两个子集,集合 A 包含于集合 B 的程度 $D(B/A)$称为包含度.它满足以下 4 个条件:(1) $0\leqslant D(B/A)\leqslant 1$;(2) 若 $A\subset B$,则 $D(B/A)=1$;(3) 若 $A\subset B\subset C$,则 $D(A/C)\leqslant D(A/B)$;(4) 若 $A\subset B$,对$\forall C\in U$ 有 $D(A/C)\leqslant D(B/C)$.

在定义 3.1 中:条件(1)是对包含度的规范化,包含度在[0,1]中取值;条件(2)表示包含度与经典包含的协调性,经典包含关系是包含度为 1 的特殊情况;条件(3)与条件(4)是包含度的单调性.在使用包含度时,有时可仅利用条件(3)或条件(4)之一即可.包含度理论是一种描述不确定性关系的有效的度量方法[69],概率推理方法、证据推理方法、模糊推理方法以及信息推理方法等不确定性推理方法都可以归结为包含度,其方法可参见文献[70].包含度理论作为一种描述不确定性关系的有效度量方法,概括了概率推理方法、证据推理方法、模糊推理方法以及信息推理方法等已有的不确定性推理方法,为不确定性推理提供了一个一般性原理,在人工智能、专家系统和模糊集理论等领域[70−73]有着重要的应用.

4 待解决的问题及其展望

在粒计算模型中,知识的不确定性度量的研究工作引起了很多研究者的关注,在模糊集理论、粗糙集理论

和商空间理论的逐渐发展和完善过程中,虽然知识的不确定性理论已逐渐形成,并取得了一定的研究成果和一些重要结论,但是,随着粒计算理论的发展,在不同层次的信息粒空间中,知识不确定性度量、知识本身的不确定性以及知识不确定性随粒度的变化关系等内容还有待进一步的研究.当前主要的研究现状可见表 3.

由表 3 可以看出,知识的粒度、粗糙度和粗糙熵、模糊度和模糊熵是人们研究的热点问题,模糊集模型的不确定性研究主要是模糊度;粗糙集模型的不确定性主要反映在粗糙度、粗糙熵、模糊度、模糊熵以及知识的粒度方面,粗糙集的模糊度和模糊熵主要是将粗糙集转化为一个模糊集后,对模糊集的不确定性进行度量;商空间模型的不确定性主要探讨它的粒度和信息熵;而扩展粒计算模型的不确定性主要讨论当知识空间由划分近似空间转化为覆盖近似空间后所带来的不确定性的变化,这些方面的结论还不够完善.根据表 3 提供的研究状态,还有很多具体的问题值得进一步的探讨,本节将对这些问题加以探讨.

Table 3 Research status of uncertainty measurement of granular computing model

表 3 粒计算理论模型的不确定性度量的研究状态

Research issue	Uncertainty classification		Research method	Relevant granular computing model
Uncertainty measurement of granular computing model	Uncertainty of knowledge or knowledge space		Information entropy theory	Rough set model, cloud model
			Probability theory	Rough set model
			Granularity	Quotient space model, rough set model
	Uncertainty caused by concepts change in knowledge space	Partitioning approximation space	Roughness	Rough set model
			Rough entropy	Rough set model
			Fuzziness	Fuzzy set model, rough set model
			Fuzzy entropy	Fuzzy set model, rough set model
		Covering approximation space	Roughness	Rough set model, fuzzy rough set model
			Rough entropy	Rough set model, fuzzy rough set model
			Fuzziness	Rough set model, rough fuzzy set model
			Fuzzy entropy	Rough set model

4.1 确定性和不确定性在不同粒层的转化

人类智能可以从极不相同的粒度或者尺度上观察和分析同一问题,而且还能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界,往返自如,这也是人类不确定性智能的魅力所在[7].在知识不确定性问题的研究中,知识的不确定性和确定性并非完全对立,在一定程度上可以相互转化,不同粒层次之间的转换是粒计算的一个主要问题.在不同粒度上的概念反映了确定性和不确定性之间的转换关系,知识的不确定性实质上是其所含信息的多少的更深层次的刻画.某一粒度层次的不确定性可能是更高层次上的确定性,种种不确定性中还可能隐藏着某些确定的规律等.如何在不同粒层之间寻找能够形式化地表示不确定性现象的规律性,至少是某种程度的规律性,从而使粒计算理论能够模拟人类认识客观世界,认识人类本身的认知过程.如何结合模糊集的方法,描述知识在不同粒度层次上不确定的程度,以便人们寻找合适的粒化空间等.这些都是值得深入研究的课题.

4.2 不确定性问题的确定性度量

精确数学是描述确定性规律的,对于不确定性现象,人们也获得一些描述方法.如概率论是揭示随机现象的统计规律性,模糊集和粗糙集是揭示模糊现象的亦此亦彼的规律性,它们是对精确数学的突破和发展.在概率论中概率为 1 的事件称为必然事件,是确定发生的;在模糊集理论中,隶属函数为 1 的对象必然属于某个集合;在粗糙集理论中,下近似集中的元素是确定的元素.因此,不确定性现象中都蕴涵着确定的规律,如概率论的统计规律(如大数定律和中心极限定理等),这种确定的规律有助于人们更好地把握随机现象.但是,模糊现象和其他不确定性现象中是否蕴涵着确定的规律?如果这种规律存在,如何用精确的数学刻画出来?换句话说,就是如何用精确的数学揭示不确定形象蕴涵的确定性规律,以便于人们更好地把握不确定性现象,这是不确定性问题研究的重要任务之一.

4.3 认知粒计算模型的不确定性度量

人类认识事物的过程是一个极其复杂的过程,擅长通过联想的、直觉的、创造的形象思维来认知新的事物,很少像计算机一样作精确的数学运算或者逻辑推理,但是这并不妨碍人类具有发达的、灵活的智能和模式识别

能力.在人脑感知和认识世界的过程中,信息被自顶向下进行粒化和分层次表示,从不同层次或不同侧面来把握事物的信息特征,而不是机械地记住事物的每个信息特征.但是必要的局部信息特征是需要的,这个过程正是认知的粒计算模型.自从粒计算研究受到人们关注以来,认知的粒计算模型或方法吸引了研究者的目光.在某个粒度层次上,人脑获得的信息有可能不够全面,从而导致人脑对事物的认知具有一定的不确定性.这种不确定性如何度量?随着粒度层次的变化,这种不确定性如何变化?它对信息的粒化程度如何提供判断依据?这些问题还未很好地解决,但对它们的解决将有利于促进认知粒计算理论的发展,为认知的不确定性研究提供理论依据.

4.4 自主式粒计算模型中的不确定性度量

在没有领域先验知识条件下的不确定知识主动式学习,是机器学习领域中新兴的热点问题.对于不确定性问题的研究,还缺乏摆脱先验知识、完全由原始数据自主决策的理论方法.如果能够摆脱学习过程中对先验知识的依赖,由数据自主地完成知识的获取过程,无疑将对机器学习理论的发展和应用起到重要的推动作用.近年来,王国胤提出的面向领域的数据驱动的数据挖掘方法(domain-oriented data-driven data mining,简称3DM)[27,74−76]正是研究如何面向用户从数据信息中提取有用的知识.这种方法摆脱了传统方法必须依赖先验知识的束缚,知识可以视为数据信息针对不同的用户形成的不同的表达形式.因此,数据信息的不确定性不会随着知识表现形式的不同而发生变化,应该保持不变.当前,不同知识的不确定性度量方法各异,如何针对由相同数据信息产生的不同形式的知识进行不确定性度量,使得它们的不确定性保持不变(或者在一定程度上的不变)是自主式知识获取或机器学习的重要课题,该课题的研究有助于不确定性度量方法的统一.

4.5 云模型及其不确定性度量

自然语言是不确定性知识的最好表示方式.自然语言中的不确定性,本质上来源于人脑思维的不确定性.人脑的思维过程从来不是纯数学的、纯定量的,这种不确定性使得人们通过语言交互有了更丰富的理解空间和认知能力.云是用自然语言值表示的某个定性概念与其定量表示之间的不确定性转换模型.以云模型表示自然语言中的基元——语言值,用云的数字特征——期望(Ex)、熵(En)和超熵(He)表示语言值的数学性质.云模型通过每个数字特征的双重性,统一刻画了语言值中大量存在的随机性、模糊性以及两者之间的关联性,实现定性语言值与定量数值之间的自然转换.以信息粒为单位的粒计算与人类的不确定推理有相似之处,是研究知识不确定性的又一种重要方法.基于云模型来构建信息粒,所构建的信息粒度可以灵活变化,一个定性概念反映出来的信息粒度可以用这个概念的云的数字特征来度量.不同信息粒度之间的概念在概念空间会形成层次的结构,在不同的抽象层次可以构成不同的由云模型表示的概念集.结合云模型和粒计算模型研究自然语言基元的定性定量转换模型,给出不确定性转换模型的形式化方法,这将是粒计算的一个重要研究方向.

4.6 构建粒计算理论的不确定性度量的公理

粒计算模型的不确定性度量研究根据不同的方法有不同的度量原理,但是随着不确定性研究的不断深入,人们不得不面对不确定性度量的公理化问题.不同的研究者从不同的角度提出了不同的不确定性度量的标准,这些标准有的相同,有的不同,虽然都是根据自己提出的度量公式给出的特殊标准,但还没有形成不确定性度量的公理.因此,粒计算理论模型不确定性度量的公理化问题是一个亟需解决的问题.如果能够构建类似于概率论公理化的定义,将有助于不确定性度量的标准化和规范化,以进一步促进粒计算理论框架的统一.

5 结束语

近年来,知识的确定性与不确定性研究受到越来越多的关注,对确定性的追求是人们的一种期待与理想,拉普拉斯关于“计算宇宙未来”的论断是确定性追求的大胆设想.但是,人类在对确定性的追求过程中已认识到不确定性的作用.随着量子力学、爱因斯坦相对论和混沌等理论的发展,人们认识到知识是随着认知空间和认知环境在发生变化的,表现出一定程度的不确定性.这充分体现出人类认知的不确定性.人们在模拟人类的确定性智能方面已经取得诸多成就,但是对人类的不确定性智能的研究仍然处于探索阶段.知识的不确定性研究是未来可能取得重大突破的研究方向.粒计算是模拟人类认知复杂问题求解过程而提出来的新的方法论,主要包括模糊集理论、粗糙集理论和商空间理论等计算模型.通过研究粒计算模型中知识的不确定性,从而使机器模拟

人脑具备处理知识不确定性的智能,还有很长的路要走,还期待脑科学、认知科学的突破.本文基于粒计算模型研究了知识的不确定性问题,对粒计算模型中知识不确定性问题的研究进行了总结和展望.希望这些探讨能够对促进粒计算理论、不确定性人工智能和认知科学等相关研究的发展提供帮助并能有所借鉴.

References:

[1] Li DY, Liu CY, Du Y, Han X. Artificial intelligence with uncertainty. Journal of Software, 2004,15(11):1583−1594 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1583.htm

[2] Kline M, Wrote; Li HK, Trans. Mathematics: The Loss of Certainty. Changsha: Hu'nan Science and Technology Press, 2007 (in Chinese).

[3] Zadeh LA. Fuzzy sets. Information and Control, 1965,8(3):338−353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]

[4] Pawlak Z. Rough sets. Int'l Journal of Computer and Information Sciences, 1982,11(5):341−356. [doi: 10.1007/BF01001956]

[5] Gau WL, Buehrer DJ. Vague sets. IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 1993,23(2):610−614. [doi: 10.1109/21.229476]

[6] Zhang WX, Yao YY, Liang Y. Rough Set and Concept Lattice. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2006. 136−157 (in Chinese).

[7] Zhang B, Zhang L. The Theory and Applications of Problem Solving. Beijing: Tsinghua University Press, 1990 (in Chinese).

[8] Zadeh LA. Probability measures of fuzzy events. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968,23(2):421−427.

[9] Pal NR, Bezdek JC. Measuring fuzzy uncertainty. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 1994,2(2):107−118. [doi: 10.1109/91.277960]

[10] Liang JY, Qian YH. Axiomatic approach of knowledge granulation in information system. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2006,4304:1074−1078. [doi: 10.1007/11941439_125]

[11] Miao DQ, Wang J. On the relationships between information entropy and roughness of knowledge in rough set theory. PR & AI, 1998,11(1):34−40 (in Chinese with English abstract).

[12] Qian YH, Liang JY. Combination entropy & combination granulation in rough set theory. Int'l Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008,16(2):179−193. [doi: 10.1142/S0218488508005121]

[13] Wang GY, Zhang QH. Uncertainty of rough sets in different knowledge granularities. Chinese Journal of Computers, 2008,31(9): 1588−1598 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.3724/SP.J.1016.2008.01588]

[14] Wang GY, Yu H, Yang DC. Decision table reduction based on conditional information entropy. Chinese Journal of Computers, 2002,25(7): 1−8 (in Chinese with English abstract).

[15] Lin TY. Neighborhood systems and relational database. In: Proc. of the CSC'88. New York, 1988. 725−726. http://portal.acm.org/citation.cfm?id=322609.323183

[16] Lin TY. Granular computing on binary relations I: Data mining and neighborhood systems, II: Rough set representations and belief functions. Skowron A, Polkowski L, eds. Rough Sets in Knowledge Discovery. Physica-Verlag, 1998. 107−140. http://xanadu.cs.sjsu.edu/~tylin/classes/cs267_old/final/id2/267_2_116_add.pdf

[17] Lin TY. Granular computing: Fuzzy logic and rough sets. In: Zadeh LA, *et al*., eds. Proc. of the Information/Intelligent Systems. Physica-Verlag, 1999. 183−200.

[18] Lin TY. Data mining and machine oriented modeling: A granular computing approach. Journal of Applied Intelligence, 2000,13(2): 113−124. [doi: 10.1023/A:1008384328214]

[19] Lin TY. Granular computing: A problem solving paradigm. In: Proc. of the 2005 IEEE Int'l Conf. on Fuzzy Systems. Atlantis Casino Resort Reno, 2005. 132−137. http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=01452381

[20] Dubois D, Prade H. Putting rough sets and fuzzy sets together. In: Slowingski R, ed. Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1992. 203−232.

[21] Banerjee M, Pal SK. Roughness of fuzzy set. Information Sciences, 1996,93:235−246. [doi: 10.1016/0020-0255(96)00081-3]

[22] Chakrabarty K, Biswas R, Nanda S. Fuzziness in rough sets. Fuzzy Sets and Systems, 2000,110(2):247−251. [doi: 10.1016/S0165-0114(97)00414-4]

[23] Wille R. Restructuring Lattice Theory: An Approach Based on Hierarchies of Concepts. Reidel: Dor-drecht-Boston, 1982.

[24] Zhang YQ, Fraser MD, Gagliano RA. Granular neural networks for numerical-linguistic data fusion and knowledge discovery. IEEE Trans. on Neural Networks, 2000,11(3):658−667. [doi: 10.1109/72.846737]

[25] Zhang YQ. Constructive granular systems with universal approximation and fast knowledge discovery. IEEE Trans. on Fuzzy Systems, 2005,13(1):48−57. [doi: 10.1109/TFUZZ.2004.839657]

[26] Wang GY, He X. A self-learning model under uncertain condition. Journal of Software, 2003,14(6):1096−1102 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1096.htm

[27] Wang GY. Domain-Oriented data-driven data mining based on rough set. Journal of Nanchang Institute of Technology, 2006,25(2): 46.

[28] Feng NQ. Research on fuzzy measure of fuzzy concept. PR & AI, 2002,15(3):290−294 (in Chinese with English abstract).

[29] Wang GY, Zhao J, An JJ, Wu Y. A comparative study of algebra viewpoint and information viewpoint in attribute reduction. Fundamenta Informaticae, 2005,68(3):289−301.

[30] Zhao J, Wang GY. Research on system uncertainty measures based on rough set theory. In: Wang GY, *et al*., eds. Proc. of the RSKT 2006. LNAI 4062, 2006. 227−232. http://www.springerlink.com/content/qw68621788l76x17/ [doi: 10.1007/11795131_33]

[31] Liang JY, Chin KS, Dang CY. A new method for measuring uncertainty and fuzziness in rough set theory. Int'l Journal of General Systems, 2002,31(4):331−342. [doi: 10.1080/0308107021000013635]

[32] Liang JY, Shi ZZ. The information entropy, rough entropy and knowledge granulation in rough set theory. Int'l Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2004,12(1):37−46. [doi: 10.1142/S0218488504002631]

[33] Miao DQ, Fan SD. The calculation of knowledge granulation and its application. Systems Engineering-Theory & Practice, 2002, 22(1):48−56 (in Chinese with English abstract).

[34] Miao DQ, Wang J. An information representation of the concepts and operations in rough set theory. Journal of Software, 1999, 10(2):113−116 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=19990201&journal_id=jos

[35] Miao DQ, Wang GY, Liu Q, Lin ZY, Yao YY. Granular Computing: Past, Present and Future Prospects. Beijing: Science Press, 2007 (in Chinese).

[36] Wang GY. Rough Set Theory and Knowledge Discovery. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001 (in Chinese).

[37] Zhang WX, Wu WZ, Liang JY, Li DY. Theory and Methods of Rough Sets. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese).

[38] Liu XC. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. Fuzzy Sets Systems, 1992,52(3): 305−318. [doi: 10.1016/0165-0114(92)90239-Z]

[39] Beaubouef T, Petry FE, Arora G. Information-Theoretic measures of uncertainty for rough sets and rough relational databases. Information Sciences, 1998,109(1-4):185−195. [doi: 10.1016/S0020-0255(98)00002-4]

[40] Qian YH, Liang JY. Combination entropy & combination granulation in rough set theory. Int'l Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008,16(2):179−193. [doi: 10.1142/S0218488508005121]

[41] Qian YH, Liang JY. Combination entropy and combination granulation in incomplete information system. Lecture Notes in Artificial Intelligence, 2006,4062:184−190.

[42] Zadeh L. Fuzzy sets and information granularity. In: Gupta N, Ragade R, Yager R, eds. Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1979. 3−18.

[43] Wang JH, Liang JY, Qian YH, Dang CY. Uncertainty measure of rough sets based on a knowledge granulation for incomplete information systems. Int'l Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2008,16(2):233−244. [doi: 10.1142/S0218488508005157]

[44] Liang JY, Shi ZZ, Li DY, Wireman MJ. Information entropy, rough entropy and knowledge granulation in incomplete information systems. Int'l Journal of General Systems, 2006,34(1):641−654. [doi: 10.1080/03081070600687668]

[45] Zhang L, Zhang B. The Theory and Applications of Problem Solving-Quotient Space Based Granular Computing. 2nd ed., Beijing: Tsinghua University Press, 2007 (in Chinese).

[46] Zhang L, Zhang B. The structural analysis of fuzzy sets. Journal of Approximate Reasoning, 2005,40(1-2):92−108. [doi: 10.1016/j.ijar.2004.11.010]

[47] Tang XQ, Zhu P, Cheng JX. Cluster analysis based on fuzzy quotient space. Journal of Software, 2008,19(4):861−868 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/861.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2008.00861]

[48] Zhang QH, Wang GY, Ma XA, He XX. The information entropy sequence of hierarchical structure. In: Proc. of the ISKE 2009. 2009. 82−87. [doi: 10.1142/9789814295062_ 0013]

[49] Dubios D, Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. Int'l Journal of General Systems, 1990,17:191−208. [doi: 10.1080/03081079008935107]

[50] Miao DQ, Wang J. Information-Based algorithm for reduction of knowledge. In: Proc. of the IEEE ICIPS'97. 1997. 1155−1158. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=669168&tag=1 [doi: 10.1109/ICIPS.1997.669168]

[51] Yao YY. A comparative study of fuzzy sets and rough sets. Information Sciences, 1998,109(1-4):227−242. [doi: 10.1016/S0020-0255(98)10023-3]

[52] Wu WZ, Mi JS, Zhang WX. Generalized fuzzy rough sets. Information Sciences, 2003,151:263−282. [doi: 10.1016/S0020-0255(02)00379-1]

[53] Zhu W, Wang FY. Reduction and axiomization of covering generalized rough sets. Information Science, 2003,152:217−230. [doi: 10.1016/S0020-0255(03)00056-2]

[54] Zhu W, Wang FY. Covering based granular computing for conflict analysis. In: Proc. of the IEEE ISI 2006. LNCS 3975, 2006. 566−571. http://www.springerlink.com/content/n422l75737406302/ [doi: 10.1007/11760146_58]

[55] Wei L, Miao DQ, Xu FF. Research on a covering rough fuzzy set model. Journal of Computer Research and Development, 2006, 43(10):1719−1723 (in Chinese with English abstract). [doi: 10.1360/crad20061007]

[56] Xu ZY, Liao JQ. On the covering fuzzy rough sets model. Fuzzy System and Mathematics, 2006,20(3):141−144 (in Chinese with English abstract).

[57] Hu J, Wang GY, Zhang QH. Uncertainty measure of covering generated rough set. In: Proc. of the 2006 IEEE/WIC/ACM Int'l Conf. on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology (WI-IAT 2006 Workshops) (WI-IATW 2006). Hong Kong, 2006. 498−504. [doi: 10.1109/WI-IATW.2006.139]

[58] Hu J, Wang GY, Fu A. Knowledge reduction of covering approximation space. In: Proc. of the 6th IEEE Int'l Conf. on Cognitive Informatics (ICCI 2007). 2007. 140−144. [doi: 10.1109/COGINF.2007.4341884]

[59] Xu FF, Miao DQ, Li DG, Wei R. Rough entropy of rough fuzzy sets based on covering. Computer Science, 2006,33(10):179−181 (in Chinese with English abstract).

[60] Xu WH, Zhang WX. Fuzziness of covering generalize rough sets. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006,20(6):115−121 (in Chinese with English abstract).

[61] Wei R, Liu BC, Shi KQ. Fuzziness based on covering generalized rough sets. Computer Science, 2007,34(1):153−155 (in Chinese with English abstract).

[62] Hu KY, Lu YC, Shi CY. Advances in concept lattice and its application. Journal of Tsinghua University, 2000,40(9):77−81 (in Chinese with English abstract).

[63] Guo ZX, Mi JS. An uncertainty measure in rough fuzzy sets. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005,19(4):135−140 (in Chinese with English abstract).

[64] Huang B, He X, Zhou XZ. Rough entropy based on generalized rough sets covering reduction. Journal of Software, 2004,15(2): 215−220 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/215.htm

[65] Yang LB, Gao YY. Fuzzy Mathematics: Theory and Application. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2004 (in Chinese).

[66] Hu J, Wang GY. Fuzziness of covering base generalized rough sets. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications, 2009,21(4):490−493 (in Chinese with English abstract).

[67] Zhang WX, Qiu GF. Uncertain Decision Making Based on Rough Sets. Beijing: Tsinghua University Press, 2005 (in Chinese).

[68] Qu KS, Zhai YH. Posets, inclusion degree theory and FCA. Chinese Journal of Computers, 2006,29(2):219−226 (in Chinese with English abstract).

[69] Zhang WX, Xu ZB, Liang Y, Liang GX. Inclusion degree theory. Fuzzy Systems and Mathematics, 1996,10(4):1−9 (in Chinese with English abstract).

[70] Zhang WX, Liang GX, Liang Y. Including degree and its applications to artificial intelligence. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1995,29(8):111−116 (in Chinese with English abstract).

[71] Liang Y, Zhang WX. The degree of the consistency on fuzzy rules and the method to delete rules. Chinese Journal of Computers, 1997,20(10):947−952 (in Chinese with English abstract).

[72] Liang JY, Xu ZB, Li YX. Inclusion degree and measures of rough set data analysis. Chinese Journal of Computers, 2001,24(5): 544−547 (in Chinese with English abstract).

[73] Liang GX, Zhang WX. Including degree and its application to expert system. Journal of Engineering Mathematics, 1994,11(4): 13−24 (in Chinese with English abstract).

[74] Wang GY, Wang Y. 3DM: Domain-Oriented data-driven data mining. Fundamenta Informaticae, 2009,90(4):395−426. [doi: 10.3233/FI-2009-0026]

[75] Wang GY, Hu J, Zhang QH, Liu XQ, Zhou JQ. Granular computing based data mining in the views of rough set and fuzzy set. In: Proc. of the 2008 IEEE Int'l Conf. on Granular Computing (IEEE GrC 2008). Hangzhou, 2008. 67. http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=4664791 [doi: 10.1109/GRC.2008.4664791]

[76] Wang GY. Domain-Oriented data-driven data mining (3DM): Simulation of human knowledge understanding. In: Zhong N, Liu J, Yao Y, Wu J, Lu S, Li K, eds. Proc. of the WImBI 2006. LNCS 4845, 2007. 278−290. http://www.springerlink.com/content/c30617tw884632mr/ [doi: 10.1007/978-3-540-77028-2_16]

附中文参考文献:

[1] 李德毅,刘常昱,杜鹢,韩旭.不确定性人工智能.软件学报,2004,15(11):1583−1594. http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/1583.htm

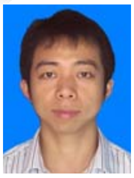
[2] Kline M,著;李宏魁,译.数学:确定性的丧失.长沙:湖南科技出版社,2007.

[6] 张文修,姚一豫,梁怡.粗糙集与概念格.西安:西安交通大学出版社,2006.136–157.
[7] 张钹,张铃.问题求解理论及应用.北京:清华大学出版社,1990.
[11] 苗夺谦,王玨.粗糙集理论中知识粗糙性与信息熵关系的讨论.模式识别与人工智能,1998,11(1):34–40.
[13] 王国胤,张清华.不同知识粒度下粗糙集的不确定性研究.计算机学报,2008,31(9):1588–1598. [doi: 10.3724/SP.J.1016.2008.01588]
[14] 王国胤,于洪,杨大春.基于条件信息熵的决策表约简.计算机学报,2002,25(7):759–766.
[26] 王国胤,何晓.一种不确定性条件下的自主式知识学习模型.软件学报,2003,14(6):1096–1102. http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/1096.htm
[28] 冯乃勤.模糊概念的模糊度研究.模式识别与人工智能,2002,15(3):290–294.
[33] 苗夺谦,范世栋.知识的粒度计算及其应用.系统工程理论与实践,2002,22(1):48–56.
[34] 苗夺谦,王玨.粗糙集理论中概念与运算的信息表示.软件学报,1999,10(2):113–116. http://www.jos.org.cn/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=19990201&journal_id=jos
[35] 苗夺谦,王国胤,刘清,林早阳,姚一豫.粒计算:过去、现在与展望.北京:科学出版社,2007.
[36] 王国胤.Rough 集理论与知识获取.西安:西安交通大学出版社,2001.
[37] 张文修,吴伟志,梁吉业,李德玉.粗糙集理论与方法.北京:科学出版社,2001.
[45] 张铃,张钹.问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及其应用.第 2 版,北京:清华大学出版社,2007.
[47] 唐旭清,朱平,程家兴.基于模糊商空间的聚类分析方法.软件学报,2008,19(4):861-868. http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/861.htm [doi: 10.3724/SP.J.1001.2008.00861]
[55] 魏莱,苗夺谦,徐菲菲.基于覆盖的粗糙模糊集模型研究.计算机研究与发展,2006,43(10):1719–1723. [doi: 10.1360/crad20061007]
[56] 徐忠印,廖家奇.基于覆盖的模糊粗糙集模型.模糊系统与数学,2006,20(3):141–144.
[59] 徐菲菲,苗夺谦,李道国,魏荣.基于覆盖的粗糙模糊集的粗糙熵.计算机科学,2006,33(10):179–181.
[60] 徐伟华,张文修.覆盖广义粗糙集的模糊性.模糊系统与数学,2006,20(6):115–121.
[61] 魏荣,刘保仓,史开泉.基于覆盖广义粗集的模糊性.计算机科学,2007,34(1):153–155.
[62] 胡可云,陆玉昌,石纯一.概念格及其应用进展.清华大学学报,2000,40(9):77–81.
[63] 郭增晓,米据生.粗糙模糊集的模糊性度量.模糊系统与数学,2005,19(4):135–140.
[64] 黄兵,何新,周献中.基于广义粗集覆盖约简的粗糙熵.软件学报,2004,15(2):215–220. http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/215.htm
[65] 杨纶标,高英仪.模糊数学原理及应用.广州:华南理工大学出版社,2004.
[66] 胡军,王国胤.覆盖粗糙集的模糊度.重庆邮电大学学报,2009,21(4):490–493.
[67] 张文修,仇国芳.基于粗糙集的不确定性决策.北京:清华大学出版社,2005.
[68] 曲开社,翟岩慧.偏序集、包含度与形式概念分析.计算机学报,2006,29(2):219–226.
[69] 张文修,徐宗本,梁怡,梁广锡.包含度理论.模糊系统与数学,1996,10(4):1–9.
[70] 张文修,梁广锡,梁怡.包含度及其在人工智能中的应用.西安交通大学学报,1995,29(8):111–116.
[71] 梁怡,张文修.模糊规则的谐调度与矛盾规则的排除方法.计算机学报,1997,20(10):947–952.
[72] 梁吉业,徐宗本,李月香.包含度与粗糙集数据分析中的度量.计算机学报,2001,24(5):544–547.
[73] 梁广锡,张文修.包含度及其在专家系统中的应用.工程数学学报,1994,11(4):13–24.

王国胤(1970－),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为粗糙集,粒计算,认知计算,智能信息处理,数据挖掘,智能信息安全.

马希骜(1985－),男,博士生,主要研究领域为智能信息处理.

张清华(1974－),男,博士,副教授,主要研究领域为智能信息处理,粒计算.



杨青山(1984－),男,硕士生,主要研究领域为粒计算理论及其应用.