

一种改进 ϵ 支配的等度规映射方法*

杨咚咚⁺, 马晶晶, 焦李成, 公茂果, 司晓云

(西安电子科技大学 智能信息处理研究所 智能感知与图像理解教育部重点实验室, 陕西 西安 710071)

Improved ϵ Dominance by Isomap

YANG Dong-Dong⁺, MA Jing-Jing, JIAO Li-Cheng, GONG Mao-Guo, SI Xiao-Yun

(Key Laboratory of Intelligent Perception and Image Understanding, Ministry of Education, Institute of Intelligent Information Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

+ Corresponding author: E-mail: ddyang@mail.xidian.edu.cn, http://www.ipiu.org.cn

Yang DD, Ma JJ, Jiao LC, Gong MG, Si XY. Improved ϵ dominance by isomap. *Journal of Software*, 2011, 22(10):2291-2304. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3933.htm>

Abstract: The study of new types of dominance mechanisms is a key point in current evolutionary multi-objective optimization community and ϵ dominance is a representative among them. However, their ability in diversity maintaining is sensitive to different shapes of Pareto fronts. This paper proposes an improved ϵ dominance mechanism by Isomap, which employs Isomap to embed the original population to low dimensional manifold space. The intrinsic geometric structure of them is discovered and ϵ dominance is adopted to select data in the embedding space. Compared with traditional ϵ dominance, the mechanism does not lose valid solutions and can maintain a set of uniform-distributed solutions. In addition, the extreme solution-check operator is proposed to enhance the ability of holding extreme solutions of ϵ dominance. The detailed experimental comparison with NSGAI, SPEA2, NNIA and ϵ MOEA shows that the two strategies in this study are beneficial to uniformity and spread maintenance, which are in the enhanced version of traditional ϵ dominance.

Key words: evolutionary algorithm, multi-objective optimization, ϵ dominance, Isomap

摘要: 新型支配机制的研究是进化多目标优化领域中的热点和难点之一,其中, ϵ 支配最具代表性.但是,它的缺点在于对于不同几何形状的 Pareto 前沿十分敏感.提出了一种改进 ϵ 支配机制的等度规映射方法,采用等度规映射把解映射到低维流形空间,发现隐藏于非支配解的几何分布,在低维流形空间进行 ϵ 支配的剪枝操作.与传统的 ϵ 支配相比,该机制不会丢失部分有效解,能够较好地保持解分布的均匀性.另外,为了克服传统 ϵ 支配丢失部分极端解的不足,设计了极端解校验算子.与 NSGAI, SPEA2, NNIA 和 ϵ MOEA 相比,所提出的 ϵ 支配和极端解校验算子能够较好地保持解分布的均匀性和宽广性,改进了传统的 ϵ 支配.

关键词: 进化计算;多目标优化; ϵ 支配;等度规映射

中图法分类号: TP301 文献标识码: A

* 基金项目: 国家自然科学基金(60703107, 61001202); 国家高技术研究发展计划(863)(2009AA12Z210); 中国博士后科学基金(20090451369); 新世纪优秀人才支持计划(NCET-08-0811); 中央高校基本科研业务费专项资金(JY10000902039); 北京市自然科学基金(7092020); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2009JQ8015); 陕西省“13115”科技创新工程重大科技专项(2008ZDKG-37)

收稿时间: 2009-12-26; 修改时间: 2010-07-06; 定稿时间: 2010-08-27

最优化问题是工程实践和科学研究中的主要问题形式之一,仅有一个目标函数的最优化问题被称为单目标优化问题,目标函数超过一个并且需要同时处理的最优化问题被称为多目标优化问题(multi-objective optimization problems,简称 MOPs).近年来,基于进化计算的多目标优化(evolutionary multi-objective optimization,简称 EMO)已经发展成为一个很热的研究方向.在进化计算的权威期刊《IEEE Transactions on Evolutionary Computation》从1997年创刊至2010年发表的文章中,被SCI引用次数最多的两篇文章均是关于EMO的研究成果^[1,2];根据进化多目标领域的著名学者Coello Coello的统计,进化多目标优化的文章逐年增加,最近5年的研究成果占总文献的55.49%.截止到2011年6月,总的文献达到了6103篇(<http://www.lania.mx/~ccoello/EMOO/EMOOstatistics.html>).

Coello Coello等学者把进化多目标优化算法的发展分为两代:第一代算法以非支配排序和基于小生境的多样性保持为其主要特点;第二代算法以精英保留机制为主要特征,NSGAI^[1],SPEA2^[2]和PESAI^[3]是该时期代表性的算法.在文献[4,5]中,我们系统地总结和实验对比了当代多目标优化算法及其特点,对当前算法面临的新问题和多目标优化的进一步发展提出了自己的见解.其中,新型支配机制的研究是进化多目标优化领域中的热点和难点之一,非Pareto支配和松弛形式的Pareto支配开始被一些学者所重视. ϵ 支配就是一种有效地保持解均匀分布的松弛形式Pareto支配机制.但是,Hernández-Díaz等学者在文献[6]中指出,由于没有考虑到多目标问题的Pareto前沿的几何分布形式, ϵ 支配可能丢失许多有效解和部分极端解,这种情况出现在多目标问题的Pareto前沿分布接近垂直和水平的情况下.

根据流形学习可以发现高维观测数据中嵌入的子流形,能够找到数据的内在几何分布.本文研究了改进 ϵ 支配机制的等度规映射方法^[7],该方法首先把当前代的Pareto非支配解映射到低阶子流形空间,在该空间进行 ϵ 支配的个体剪枝操作,通过每一代种群的进化来不断更新外部个体种群.此外,为了克服传统 ϵ 支配易丢失极端解的情况,本文设计了极端解校验算子来保留丢失的极端解.通过系统地实验、分析,与NSGAI,SPEA2,NNIA和 ϵ MOEA相比,本文提出的基于等度规映射的 ϵ 支配和极端解校验算子克服了传统 ϵ 支配的不足,取得了较为理想的实验效果.

1 问题与定义

多目标优化问题又称为多标准优化问题.不失一般性,一个具有 n 个决策变量、 m 个目标变量的多目标优化问题^[8,9]可表述为

$$\min \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^T \text{ s.t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0 (i=1, 2, \dots, q), h_j(\mathbf{x}) = 0 (j=1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ 称为 n 维的决策向量, \mathbf{X} 为 n 维的决策空间; $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^m$ 称为目标向量, \mathbf{Y} 为 m 维的目标空间.目标函数 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 定义了由决策空间向目标空间的映射函数, $g(\mathbf{x})$ 定义了 q 个不等式约束, $h(\mathbf{x})$ 定义了 p 个等式约束.下面给出Pareto支配和 ϵ 支配的定义.

定义1(可行解). 对于某个 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$,如果 \mathbf{x} 满足公式(1)的约束条件 $g_i(\mathbf{x}) \leq 0 (i=1, 2, \dots, q)$ 和 $h_j(\mathbf{x}) = 0 (j=1, 2, \dots, p)$,则 \mathbf{x} 称为可行解. \mathbf{X} 中所有可行解构成可行解集合,记为 \mathbf{X}_f ,且 $\mathbf{X}_f \subset \mathbf{X}$.

定义2(极端解). 对多目标优化问题的某一可行解集 FS ,某个解 $\mathbf{x}_A \in FS$ 如果在某一维目标 $\exists i=1, 2, \dots, m$,对于该解集中任意解 $\forall \mathbf{x}_B \in FS$,满足条件 $f_i(\mathbf{x}_A) = \max(f_i(\mathbf{x}_B))$ or $\min(f_i(\mathbf{x}_B))$,则 \mathbf{x}_A 便是集合 FS 的一个极端解.所有极端解构成该解集的极端解集合,记为 E .

定义3(有效解). 对多目标优化问题的某一可行解集 FS ,除去极端解得到剩余解的集合即是该解集的有效解,记为 $V = FS - E$.

定义4(Pareto支配). 假设 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in \mathbf{X}_f$ 是公式(1)的两个可行解,称 \mathbf{x}_A Pareto支配 \mathbf{x}_B ,当且仅当

$$\forall i=1, 2, \dots, m f_i(\mathbf{x}_A) \leq f_i(\mathbf{x}_B) \wedge \exists j=1, 2, \dots, m f_j(\mathbf{x}_A) < f_j(\mathbf{x}_B) \quad (2)$$

记作 $\mathbf{x}_A \succ \mathbf{x}_B$,也叫做 \mathbf{x}_A 支配 \mathbf{x}_B .

定义5(Pareto最优解集). Pareto最优解集是所有Pareto最优解的集合,定义如下:

$$P^* \triangleq \{ \mathbf{x}^* \mid \neg \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X}_f : \mathbf{x} \succ \mathbf{x}^* \} \quad (3)$$

定理 1. 任何连续多目标优化问题的最优 Pareto 前沿端由无穷多个不可数的解组成^[10].

该定理说明,多目标最优解集的势是无穷大的.不同的算法由于初始条件的不同、迭代次数的不同以及进化的随机性,每次只能得到该集合的一个不同的子集,这对于决策者来说,可能运行多次还无法得到包含满足要求解的子集.为了能够得到一组可控制地逼近 Pareto 最优解的集合, ϵ 支配被提了出来,其定义如下:

定义 6(ϵ 支配). 假设 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in X_f$ 是公式(1)所示多目标优化问题的两个可行解, \mathbf{x}_A 是 ϵ 支配 \mathbf{x}_B , 记作 $\mathbf{x}_A \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_B$, 当且仅当

$$\forall i=1,2,\dots,m f_i(\mathbf{x}_A) - \epsilon_i \leq f_i(\mathbf{x}_B) \wedge \exists j=1,2,\dots,m f_j(\mathbf{x}_A) - \epsilon_j < f_j(\mathbf{x}_B) \quad (4)$$

定义 7(ϵ 最优解集). 所有 ϵ 最优解的集合构成 ϵ 最优解集,定义如下:

$$EP^* \triangleq \{ \mathbf{x}^* \mid \neg \exists \mathbf{x} \in X_f : \mathbf{x} \succ_{\epsilon} \mathbf{x}^* \} \quad (5)$$

ϵ 支配把目标函数空间划分为不同的区域,不同的区域内只允许一个解存在.这样,决策者可以控制区域的大小和解在区域的存在规则来获得不同的解.一般规定,根据距离超格左边界、右边界或超格坐标点的远近来删除超格中的解.下面研究 Pareto 支配和 ϵ 支配的关系.

定理 2. 假设 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in X_f$ 且 $\mathbf{x}_A \succ \mathbf{x}_B$, 则 $\mathbf{x}_A \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_B$ ^[11].

定理 3. 假设 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B \in X_f$ 且 $\mathbf{x}_A \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_B$, 则 $\mathbf{x}_A \succ \mathbf{x}_B$ 未必成立.

证明:为了证明该命题成立,不妨取一个反例证明之.令 $f_i(\mathbf{x}_A) = 0.5\epsilon_i + f_i(\mathbf{x}_B), i=1,2,\dots,m$. 根据等式(4)对 ϵ 支配机制的定义,满足 $\mathbf{x}_A \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_B$. 但是对于任意的 $\epsilon_i > 0, i=1,2,\dots,m$, 等式(2)无法满足,即 $\mathbf{x}_A \succ \mathbf{x}_B$ 不能够成立.证毕. \square

定理 4. 假设 $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_C \in X_f$ 且 $\mathbf{x}_A \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_B \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_C$, 则 $\mathbf{x}_A \succ_{\epsilon} \mathbf{x}_C$ ^[11].

由以上定理可知, ϵ 支配是 Pareto 支配的松弛形式,松弛的裕量是 $\epsilon_i > 0, i=1,2,\dots,m$. 结合这两种支配机制,在 Pareto 支配的前提下再进行 ϵ 支配,就是给解的目标向量一个松弛裕量.松弛裕量构成了解的目标生存空间,该解所有目标的松弛裕量构成一个空间超格.若空间超格的划分是均匀的,则最终解的分布就会是均匀的.但是空间超格的均匀划分往往较难保证,它对 Pareto 前沿的形状十分敏感.

2 改进 ϵ 支配机制的等度规映射方法

2.1 传统 ϵ 支配的不足

在传统的 ϵ 支配中,如果两个或多个解的某个目标函数差值小于相应的 ϵ 取值,则这些解只能被保留一个.因为如果这些解的在某个目标上的差值小于相应的 ϵ 值,对决策者来说,那么这些解是无区别的.当然,决策者可以根据自己的需要设定相应大小的 ϵ 取值, ϵ 的取值决定着空间超格的粒度. Hernández-Díaz 等学者在文献[6]中指出,由于没有考虑到实际问题的 Pareto 前沿的几何分布,当 Pareto 前沿分布接近水平或垂直时, ϵ 支配机制将不能较好地保持非支配解的均匀性.如图 1 所示,对于两目标优化问题,其极端解只有两个(如图中的箭头所示, extreme point),而除去极端解剩余的所有以空心圆圈标识的解全是有效解.可以看出,极端解对应解的极值,有利于解的综合评价和选择,有效解的存在有利于解的均匀性保持.对于文献[6]所指出的传统的 ϵ 支配的缺点,通过分析,其原因在于,传统的 ϵ 支配在 Pareto 前沿分布接近水平或垂直的区域内不能有效地保持有效解和极端解,造成了它们的大量丢失.为验证上述结论,考虑下列多目标优化问题, $n=30, x_i \in [0,1], i=1,2,\dots,n$:

$$g(\mathbf{x}) = 1 + 9 \left(\left(\sum_{i=2}^n x_i \right) / (n-1) \right)^{0.25} \quad (6)$$

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1, f_2(\mathbf{x}) = \{g(\mathbf{x})[1 - (x_1/g(\mathbf{x}))^p]\}^{1/p}$$

该问题的 Pareto 最优前沿满足 $\{x^p + y^p = 1: 0 \leq x, y \leq 1, 0 < p < \infty\}$, 当 p 分别取 3/4, 1/2 和 1/3 时,对应 Pareto 前沿的曲率变化逐渐加剧.为了测试传统 ϵ 支配的性能,本文采用 Deb 等学者提出的基于 ϵ 支配的多目标进化算法: ϵ MOEA^[12]. 图 1 给出了等式(6)定义的 3 个问题的最优 Pareto 前沿和 ϵ MOEA 得到的最终结果.从图中可以看出,当问题的 Pareto 前沿的分布接近水平或垂直时,基于 ϵ 支配机制的多目标算法会丢失许多有效解和极端解,从而不能获得较好的均匀性.并且 p 值越小,在这些区域丢失的解就越多.

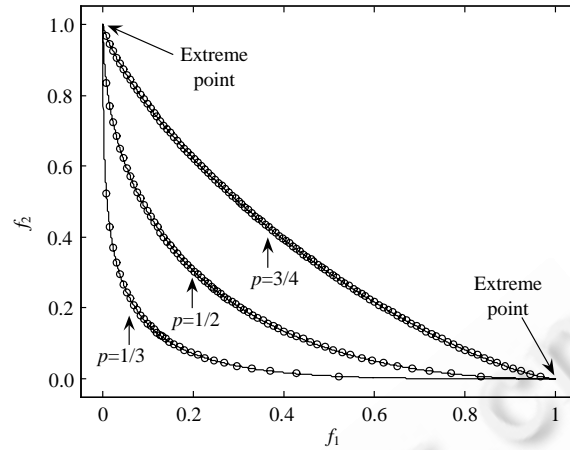


Fig.1 True Pareto fronts of equation (6) (denoted by real line) and the distributions of nondominated solutions by ϵ MOEA (denoted by hollow circles) are presented when p is $3/4$, $1/2$ and $1/3$ respectively

图1 当 p 分别取 $3/4$, $1/2$ 和 $1/3$ 时, 等式(6)代表问题的 Pareto 最优前沿分布情况(图中的实曲线) 以及 ϵ MOEA 得到的非支配解的分布情况(图中的空心圆圈)

2.2 改进 ϵ 支配机制的等度规映射方法

2.2.1 等度规映射(Isomap)

由传统 ϵ 支配的不足可知, 如果多目标优化问题的 Pareto 最优前沿是直线或平面, 那么基于 ϵ 支配的多目标算法就能够得到均匀分布的解. 但是现实中的问题往往是复杂多变的, 它们的 Pareto 最优前沿的分布形式是多种多样的. 本文受流形学习能够把曲线或曲面伸展的启发, 首先把它们伸展到低维流形空间, 然后在伸展的对象上进行基于 ϵ 支配的选择操作.

流形定义为满足 Hausdorff 公理的拓扑空间, 每个点的局部都同胚于高维欧式空间. 流形学习主要研究数据的降维, 流形学习能够发掘高维数据的几何结构和相关性, 揭示其流形分布. 数据降维的方法包括线性和非线性降维方法, 其中, 后者更具有普遍性. 当今, 流形学习研究的焦点也集中在非线性降维. 其中, 等度规映射(isometric mapping, 简称 Isomap)^[7] 是一种具有代表性的、十分有效的非线性数据降维方法. 该算法参数设定简单、能够保证得到全局最优、可以计算出低维嵌入的维数, 且计算速度较快. 图 2 是用 Isomap 解决瑞士卷问题的图例. 算法 1 是等度规映射的算法流程.

算法 1. 等度规映射.

输入: $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_e)$ 是原始流形空间的样本集合, e 是样本个数; K 是预先设定的近邻的个数; d 是低维嵌入的本征维数;

输出: $\mathbf{Y}=(y_1, y_2, \dots, y_e)$ 是流形伸展后得到的结果.

步骤 1. 构建近邻图 G . 对于 \mathbf{X} 中的每个点, 计算距离其最近的 K 个近邻点, 连接这 K 个近邻点与该点, 连接权值定义为该点与这些近邻点的欧式距离 $d(x_i, x_j)$.

步骤 2. 计算图 G 中点的测地线距离. 对于近邻图 G 中的两点 $x_i, x_j, d_G(x_i, x_j)=d(x_i, x_j)$. 如果 x_i, x_j 不属于各自的 K 近邻点, 则 $d_G(x_i, x_j)=\infty$. 然后, 对于 $k=1, 2, \dots, e, d_G(x_i, x_j)=\min\{d_G(x_i, x_j), d_G(x_i, x_k)+d_G(x_k, x_j)\}$. 所有点之间的最短路径值构成最短路径矩阵 $D_G=\{d_G(x_i, x_j)\}, i, j=1, 2, \dots, e$.

步骤 3. 计算低维流形嵌入. 应用多维尺度变换, 获得最短路径矩阵 D_G 的特征值和特征向量, 前 d 个大的特征值记为 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, d$, 对应的特征向量记为 $v_i, i=1, 2, \dots, d$. 那么, 嵌入在高维空间的低维流形坐标表示为 $\sqrt{\lambda_i} v_i, i=1, 2, \dots, d$. 这 d 个特征向量构成矩阵 \mathbf{Y} .

Isomap 是一种保持数据点成对测地距离的方法. 测地距离是流形上的两点沿流形曲线或曲面的最短距离.

本文采用带标记(landmark)的 Isomap 算法,该算法选取 $h(h \ll e)$ 个标记点来估计它们的最短路径矩阵.测地线距离的计算采用 Dijkstra 算法,它的时间复杂度是 $O(Kh \log e)$,多维尺度变换的时间复杂度是 $O(h^2 e)$,Isomap 算法的时间复杂度是 $O(h^2 e)$ (参看文献[7]中的第 3 部分).

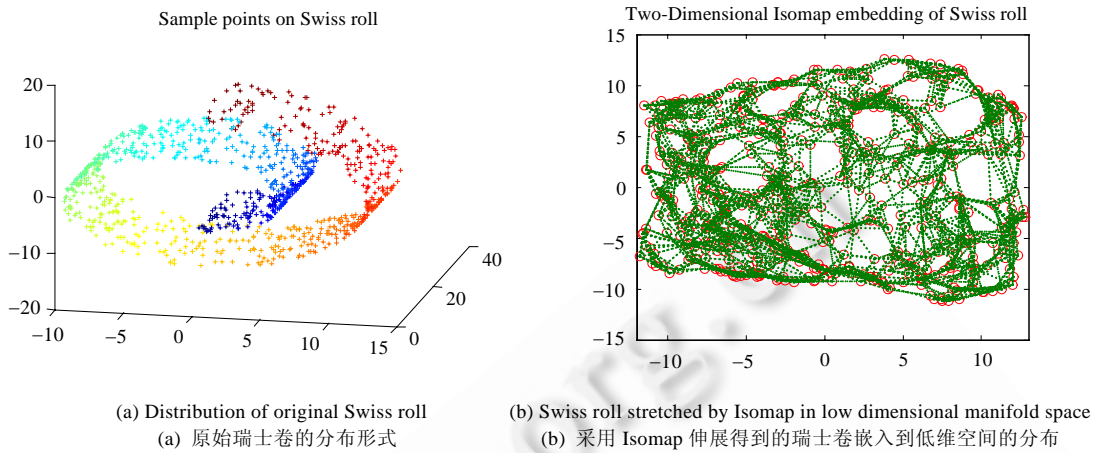


Fig.2
图 2

2.2.2 改进 ε 支配机制的等度规映射方法

改进 ε 支配的等度规映射方法考虑到原始数据的流形几何分布,在流形嵌入空间进行解的 ε 支配操作.流形嵌入空间内的样本分布已经伸展开,不会丢失相应的有效解.从理论上分析,改进 ε 支配的等度规映射方法能够克服传统 ε 支配的缺点.

假设当前代外部种群的非支配解集为 $A=(a_1, a_2, \dots, a_c)$, c 是当前代外部种群中非支配解的数目.算法 2 是本文提出的改进 ε 支配的等度规映射方法(Isomap based ε -dominance, 简称 IED).本文采用文献[12]中为解分配辨识向量的 ε 支配计算方法.为每一个解分配一个辨识向量,也就是给该解分配了一个空间超格或生存区域,这种划分超格的机制可以根据解本身的取值来自适应地分配.

算法 2. 改进 ε 支配机制的等度规映射(IED).

输入: $A=(a_1, a_2, \dots, a_c)$ 是当前代种群的非支配解, c 是解的个数; K 是预先设定的近邻个数; d 是低维嵌入的本征维数; ε 的取值;

输出: $A'=(a_1, a_2, \dots, a_{c'})$ 是经过 IED 的选择后得到的解.

步骤 1.等度规映射.令 $X=A, e=c$,调用算法 1,得到映射到低维空间 R^{m-1} (m 是目标空间的维数)的坐标表示:

$$Y=(y_1, y_2, \dots, y_c).$$

步骤 2.分配辨识向量.根据 $Y=(y_1, y_2, \dots, y_c)$,给 $y_i, i=1, 2, \dots, c$ 分配辨识向量 $B_i=(b_1, b_2, \dots, b_{m-1})$,其定义为

$$b_j = \left\lfloor \frac{y_i^j}{\varepsilon_j} \right\rfloor, j = 1, 2, \dots, m-1.$$

步骤 3.超格内的个体选择.根据 Y 中每个元素的辨识向量,找到辨识向量相同的元素.辨识向量相同的元素表明这些元素位于同一超格内.对于每一组辨识向量相同的元素,计算它们的嵌入向量距离共同的辨识向量的欧式距离,欧式距离小的元素被作标记.这些被作标记的元素对应的原始高维空间的解被保留下来,未作标记的解被删除.保留下来的解构成集合 $A'=(a_1, a_2, \dots, a_{c'})$.

2.2.3 极端解校验算子

图 1 中, ϵ MOEA 会丧失部分极端解, 这是因为现有的基于 ϵ 支配的多目标算法大多采用如下策略: 距离共同的辨识向量较近的个体被保留, 较远的个体被删除. 如图 3 所示, 个体 '1', '2' 和 '3' 位于同一个超格内, 个体 '1' 距离它们共同的辨识向量 'B' 较近, 所以被保留; 而 '3' 和极端解 '2' 被删除. 而极端解对应着某一目标函数的极值, 对于整个解集的分布和最终决策的选择具有重要意义, 极端解不应该被删除. 为了解决这个问题, 本文提出了极端解校验算子. 如下所示:

算法 3. 极端解校验算子.

输入: $A=(a_1, a_2, \dots, a_c)$ 是当前代种群的非支配解集, c 是解的个数; $A'=(a_1, a_2, \dots, a_{c'})$ 是经过 IED 的选择后得到的解集.

输出: $A''=(a_1, a_2, \dots, a_{c''})$ 是极端解校验之后得到的解集.

步骤 1: 找到 $A=(a_1, a_2, \dots, a_c)$ 所有的极端解. 对于等式(1)定义的多目标优化问题, m 个目标函数就对应着 m 个极端解. 如果某个解的某一维函数值是所有解中的相应维的目标函数值的最大值或最小值, 那么该解一定是一个极端解.

步骤 2: 检验 A' 中是否存在这些极端解, 如果不存在, 就加进 A' 中. 操作完毕之后的集合 A' 定义为

$$A''=(a_1, a_2, \dots, a_{c''}).$$

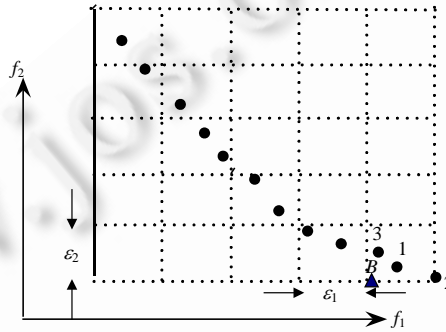


Fig.3 Analysis of extreme solutions in ϵ dominance

图 3 ϵ 支配机制中极端解的分析图例

注意, 本文设计的极端解校验算子对均匀性保持有一定程度的削弱. 因为每个超格内部只允许存在一个解, 而极端解所在的超格可能存在两个解. 但是, 由于极端解的重要性, 付出这种代价是值得的. 此外, 这种情况只发生在极端解所在的超格, 并且极端解的个数与目标函数值是相等的, 所以这种削弱较为微弱.

2.3 改进 ϵ 支配的等度规映射算法分析

由于本文提出的是一种解的均匀性保持机制、一个外部种群的更新策略, 不是一种新的多目标进化算法, 所以需要与其他多目标算法相结合来研究基于等度规映射的 ϵ 支配机制 (IED) 的有效性. 为此, 本文采用 Gong 等学者^[13]提出的 NNIA 作为 IED 的算法载体, 采用 NSGAI^[1], SPEA2^[2], ϵ MOEA^[12], NNIA^[13] 作为比较算法. NNIA 受免疫响应中多样性抗体共生、少数抗体激活的启发, 采用了一种基于非支配邻域的个体选择方法, 只选择少数相对孤立的非支配个体作为活性抗体, 根据活性抗体的拥挤程度进行比例克隆复制, 对克隆后的抗体群采用了有别于 GA 的重组操作和变异操作, 以此加强对当前 Pareto 前沿面中较稀疏区域的搜索. NNIA 是一种非常有效的进化多目标范例. 为了有效地比较本文提出的支配机制, 我们采用等度规映射 ϵ 支配来替代 NNIA 中的基于拥挤距离的多样性保持机制, 替代后的算法记为 INNIA.

3 实验仿真

3.1 度量标准

现有的度量标准多采用最优 Pareto 解的参考集合.一方面,当一个问题的最优 Pareto 前沿的曲率变化较大时,一般较难获得均匀分布的最优解;另一方面,Pareto 最优解的个数对最终的评价指标的影响较大,评价指标的精度往往受最优参考解个数的制约.所以,本文采用非参考集合的度量标准:两个解集之间的覆盖率(coverage of two sets,简称 C)^[14]用来度量不同算法得到的解的相互支配关系,用间距(spacing)^[15]来度量解分布的均匀性,用最大展布(maximum spread,简称 MS)^[8]来度量解分布的宽广性.这些指标已被进化多目标优化领域的学者所广泛采用,并获得了一致的认可.

间距(spacing,简称 S):间距度量指标用于衡量 PF_{known} 上抗体分布的均匀性,其定义如下:

$$S \cong \sqrt{\frac{1}{n_{PF}-1} \sum_{i=1}^{n_{PF}} (\bar{d} - d'_i)^2} \quad (7)$$

其中, $\bar{d} = \frac{1}{n_{PF}} \sum_{i=1}^{n_{PF}} d'_i$, n_{PF} 为 PF_{known} 上解的数目; d'_i 为 PF_{known} 上的第 i 个解与 PF_{known} 中最近的解之间的欧式距离.

如果 $S=0$,则表示 PF_{known} 中的所有解呈均匀分布;相反地, S 越大,表明解分布越不均匀.

最大展布:该度量指标用于衡量 PF_{known} 上解分布的宽广性,如果最优参考解集为 PF_{true} ,则其定义如下:

$$MS \cong \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\min(f_i^{\max}, F_i^{\max}) - \max(f_i^{\min}, F_i^{\min})}{F_i^{\max} - F_i^{\min}} \right\}^2} \quad (8)$$

其中, f_i^{\max} 和 f_i^{\min} 分别是集合 PF_{known} 中个体的第 i 维目标函数的最大值和最小值; F_i^{\max} 和 F_i^{\min} 分别是集合 PF_{true} 中个体的第 i 维目标函数的最大值和最小值, m 为目标函数维数.直观而言,最大展布为参考集合中的极端解和算法估计解集的极端解所形成的空间超立方体,该空间超立方体越大,估计解集越能够逼近最优解集;相反地,该值越小,说明算法的多样性越差.

解集之间覆盖率:该度量指标用于衡量两个估计解集之间的相互支配关系,其定义如下:

$$C(X', X'') \cong \frac{|\{x'' \in X''; x' \in X': x' \triangleright x''\}|}{|X''|} \quad (9)$$

其中, \triangleright 表示 Pareto 不劣于, X' 和 X'' 分别是两个估计集合.

从定义可知, $C(X', X'') \in (0, 1)$. $C(X', X'')=1$ 表示对于集合 X'' 中的所有解而言,均能在集合 X' 中找到一个解不劣于它; $C(X', X'')=0$ 表示对于集合 X'' 中的所有解而言,无法在集合 X' 中找到一个解不劣于它的解.

值得注意的是, $C(X', X'') \neq 1 - C(X'', X')$, 二者不存在严格的数量互补关系,在度量两个解集之间相互支配关系时,需要同时考虑它们^[16].

3.2 测试函数

为了测试 IED 的有效性,本文设计了 5 个两目标测试问题: $F2, F3, F4, F5$ 和 $F6$. 如下所示:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= x_1, f_2(\mathbf{x}) = g(x)[1 - (x_1/g(x))^q], x_1 \in [0, 1] \\ g(\mathbf{x}) &= 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n [x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)], x_i \in [-5, 5], i = 2, \dots, n, n = 10 \end{aligned} \quad (10)$$

当 $q=0.5, 2, 5, 0.2$ 时,对应的问题定义为 $F1, F2, F3$ 和 $F4$. $F2, F3$ 和 $F4$ 是 ZDT4^[14]测试函数的变形. $F1$ 和 $F4$ 问题的 Pareto 最优前沿是凹的,而 $F2$ 和 $F3$ 问题的 Pareto 最优前沿是凸的; $F3$ 和 $F4$ 的 Pareto 前沿的曲率变化分别比 $F2$ 和 $F1$ 的要剧烈. $F5$ 和 $F6$ 是等式(6)定义的 p 分别等于 $1/2$ 和 $1/3$ 时的问题, $F6$ 的最优 Pareto 前沿的曲率变化比 $F5$ 要剧烈. DTLZ1, DTLZ2 和 DTLZ3 是经典的测试多目标算法的三目标优化问题^[17],详细数学定义见表 1. 通过参考文献[17],对于 DTLZ1,我们设定 $|\mathbf{x}|=5$; 对于 DTLZ2 和 DTLZ3, $|\mathbf{x}|=10$. 研究 EMO 的学者已经提出很多测试函数^[18,19]及其变形^[20],并被广泛用于测试最新的优化算法. 这些新的测试函数大多是根据传统的 ZDT

和 DTLZ 提出的变形形式.

Table 1 Test instances

表 1 测试函数

Test problems	Number of variables	Variable boundary	Objective functions (minimize)
F1~F4	10	$x_1 \in [0,1]$ $x_i \in [-5,5]$ $i = 2, \dots, n$	$f_1(\mathbf{x}) = x_1, f_2(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})[1 - (x_1/g(\mathbf{x}))^p]$, where $g(\mathbf{x}) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^n [x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)]$ F1: $p = 0.5$; F2: $p = 2$; F3: $p = 5$; F4: $p = 0.2$
F5	30	[0,1]	$f_1(\mathbf{x}) = x_1, f_2(\mathbf{x}) = \{g(\mathbf{x})[1 - (x_1/g(\mathbf{x}))^{0.5}]\}^2$ where $g(\mathbf{x}) = 1 + 9((\sum_{i=2}^n x_i)/(n-1))^{0.25}$
F6	30	[0,1]	$f_1(\mathbf{x}) = x_1, f_2(\mathbf{x}) = \{g(\mathbf{x})[1 - (x_1/g(\mathbf{x}))^{1/3}]\}^3$ where $g(\mathbf{x}) = 1 + 9((\sum_{i=2}^n x_i)/(n-1))^{0.25}$
DTLZ1	$k+ \mathbf{x} -1$	[0,1]	$f_1(\mathbf{x}) = 0.5x_1x_2(1+g(\mathbf{x}))$ $f_2(\mathbf{x}) = 0.5x_1(1-x_2)(1+g(\mathbf{x}))$ $f_3(\mathbf{x}) = 0.5(1-x_1)(1+g(\mathbf{x}))$ where $g(\mathbf{x}) = 100[\mathbf{x}_M + \sum_{x_i \in \mathbf{x}_M} ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5)))]$
DTLZ2	$k+ \mathbf{x} -1$	[0,1]	$f_1(\mathbf{x}) = \cos(0.5\pi x_1)\cos(0.5\pi x_2)(1+g)$ $f_2(\mathbf{x}) = \cos(0.5\pi x_1)\sin(0.5\pi x_2)(1+g)$ $f_3(\mathbf{x}) = \sin(0.5\pi x_1)(1+g)$ where $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=3}^n (x_i - 0.5)^2$
DTLZ3	$k+ \mathbf{x} -1$	[0,1]	$f_1(\mathbf{x}) = \cos(0.5\pi x_1)\cos(0.5\pi x_2)(1+g)$ $f_2(\mathbf{x}) = \cos(0.5\pi x_1)\sin(0.5\pi x_2)(1+g)$ $f_3(\mathbf{x}) = \sin(0.5\pi x_1)(1+g)$ where $g(\mathbf{x}) = 100[\mathbf{x}_M + \sum_{i=3}^n ((x_i - 0.5)^2 - \cos(20\pi(x_i - 0.5)))]$

3.3 实验设置

本文采用 NSGAI, ϵ MOEA, NNIA, SPEA2 与 INNIA 进行实验比较,其参数设置如下:对于 NSGAI, ϵ MOEA, SPEA2, 在线进化种群大小是 100, 外部种群大小是 100; 对于 NNIA 和 INNIA, 抗体种群大小是 100, 非支配活性抗体种群的大小是 20. 对于这 5 种算法, 其进化代数均是 500. 为了下文实验结果表示得简洁和有效, 本文采用简单的阿拉伯数字来表示不同的算法, 见表 2. 在后文所示的图 5~图 7 中, 横坐标的阿拉伯数字均表示表 2 中的相应算法.

Table 2 Indexes of the different algorithms

表 2 不同算法的索引值

Index number	1	2	3	4	5
Algorithms	NSGAI	ϵ MOEA	NNIA	INNIA	SPEA2

3.4 实验测试结果与分析

对于等式(6)定义的函数, 当 p 分别取 3/4, 1/2 和 1/3 时, INNIA 的实验结果如图 4 所示. 为了清楚而不重叠地观察基于 IED 的算法得到解的均匀性和极端解保留情况, 本文把部分问题的 Pareto 前沿坐标轴进行了一定量的平移, 同时采用较小的外部种群. 从图 4 可以看到, 基于 IED 的 NNIA 算法不受问题的 Pareto 前沿曲率变化的影响, 具有较好的均匀保持性和极端解保留能力, 与图 1 相比, 它克服了传统 ϵ 支配的不足.

5 种算法的统计实验结果比较如图 5~图 7 所示. 实验结果是 30 次独立实验的统计平均, 采用盒须图来表示实验的结果. 盒须图是经济学领域的统计分析的有效工具. 盒图中的凹口可以有效地估计样本分布的中位数. 这些中位数可以描述样本的统计平均分布, 而 '+' 和盒图分布的长短可以有效地描述样本分布的稳定性.

图 5 是 NSGAI1, ϵ MOEA, NNIA, INNIA 和 SPEA2 对 9 个测试函数的运算结果的 Spacing 度量的盒须图分布. Spacing 指标是衡量解分布均匀性的重要指标. 由于本文研究的是如何保持解分布的均匀性问题, 因此该指标对于评价改进的 ϵ 支配至关重要. 首先比较改进 ϵ 支配的 NNIA 与传统 ϵ 支配的进化多目标算法 ϵ MOEA 的均匀性统计结果. 可以发现, 对于最优 Pareto 前沿曲率变化较小的问题(图 5 中的 F1), 传统的 ϵ 支配能够取得较好的均匀分布度量值. 但是, 随着曲率的增大(图 5 中的 F3, F4, F5 和 F6), 盒须图的统计均值较大. 这说明传统的 ϵ 支配得出了较差的结果, 这是由于它不能保持有效解的均匀性所致. 也就是说, 传统的 ϵ 支配对于 Pareto 前沿曲率较大的问题丢失了部分有效解. 基于等度规映射的改进型 ϵ 支配, 对于具有不同曲率的 Pareto 前沿的多目标问题, 表现出较好且稳定的性能.

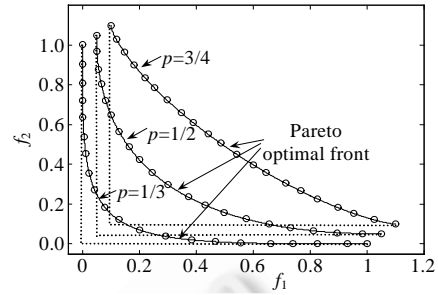


Fig.4 Distributions of nondominated solutions obtained by INNIA in solving the MOPs in equation (6) (denoted by hollow circles)

图 4 INNIA 用于解决等式(6)定义的多目标问题而得到的非支配解的分布情况(图中的空心圆圈)

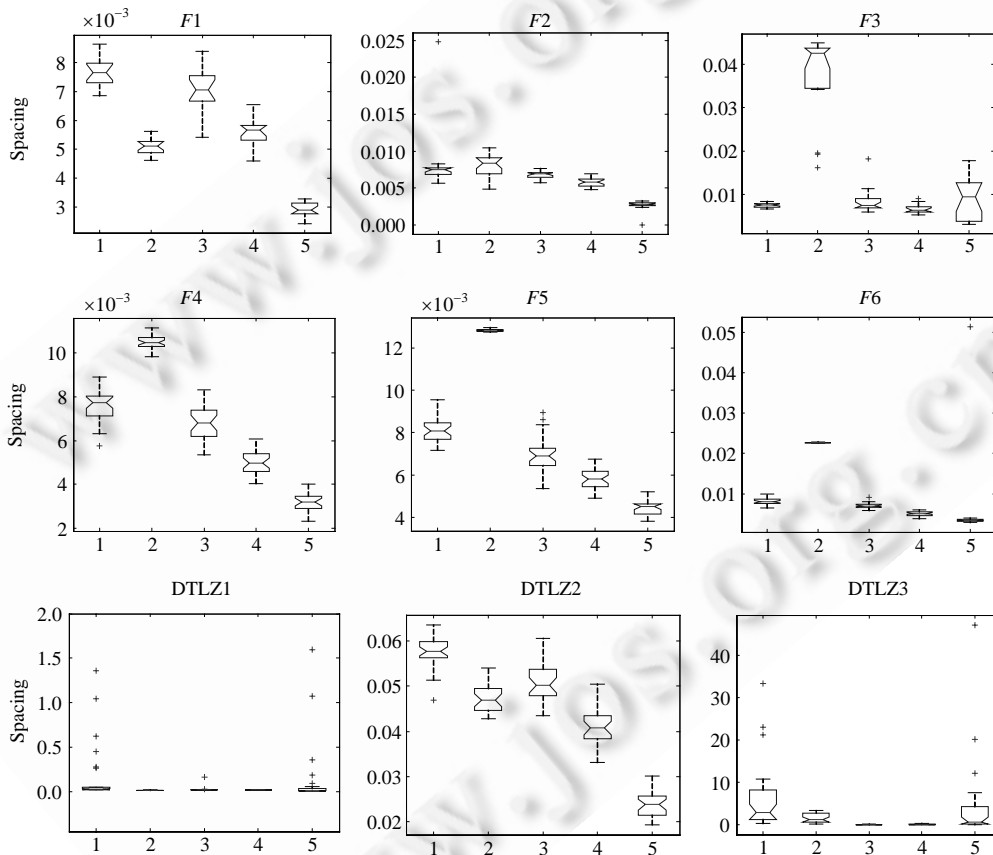


Fig.5 Statistical values of spacing for nine test problems by NSGAI1 ('1'), ϵ MOEA ('2'), NNIA ('3'), INNIA ('4'), and SPEA2 ('5') respectively. Box plots are used to illustrate the distribution of these samples

图 5 NSGAI1('1'), ϵ MOEA('2'), NNIA('3'), INNIA('4')和 SPEA2('5')对 9 个测试函数的运算结果的间距度量的盒须图统计分布,盒须图用来描述样本的统计分布

此外,通过对比图 5 中的 INNIA 和 NNIA 统计盒须图分布,对于 $F1, F2, F3, F4, F5, F6$ 和 $DTLZ2, INNIA$ 获得了更加优秀的均匀性统计分布指标,说明基于改进 ϵ 支配的 NNIA 比基于经典拥挤距离的 NNIA 能够更好地保持解分布的均匀性.对于 $DTLZ1$ 和 $DTLZ3$,二者具有十分接近的统计分布结果,这是由于它们对于这两个问题获得了明显优越的收敛性,图中无法在更加精细的数量级比较二者的均匀性指标.需要说明的是,对于 $F1, F2, F4, F5, F6$ 和 $SPEA2$ 获得最好的盒须图统计分布结果,这说明 $SPEA2$ 在本文 5 种算法中的均匀性保持能力最好. $SPEA2$ 算法在当前进化多目标优化领域已获得公认的均匀性保持能力,但是该算法的缺点在于需要进行一个复杂的个体选择操作,其时间复杂度是 $O(N^3)$, N 是种群的大小.如果不考虑该算法,本文提出的基于等度规映射 ϵ 支配的均匀性保持能力最好,均优于 $NSGAI, \epsilon MOEA, NNIA$.

图 6 是 $NSGAI, \epsilon MOEA, NNIA, INNIA$ 和 $SPEA2$ 对 9 个测试函数的运算结果的最大展布度量盒须图分布.最大展布可以检验解集分布的宽广程度.最终得到的解分布越宽广,越能给决策者更多的选择,有利于发现更加适合实际工程需要的解.从图 6 中可以得到,对于 $F1, F3, F4, F5, F6, DTLZ1$ 和 $DTLZ3$ 问题, $\epsilon MOEA$ 的宽广程度不如其他算法,原因是该算法丢失了极端点处的解.而加入极端解检验算子的 IED 可以较好地保留极端解,并且对于实验中的 9 个问题,基于 IED 算法均获得较好的统计结果.

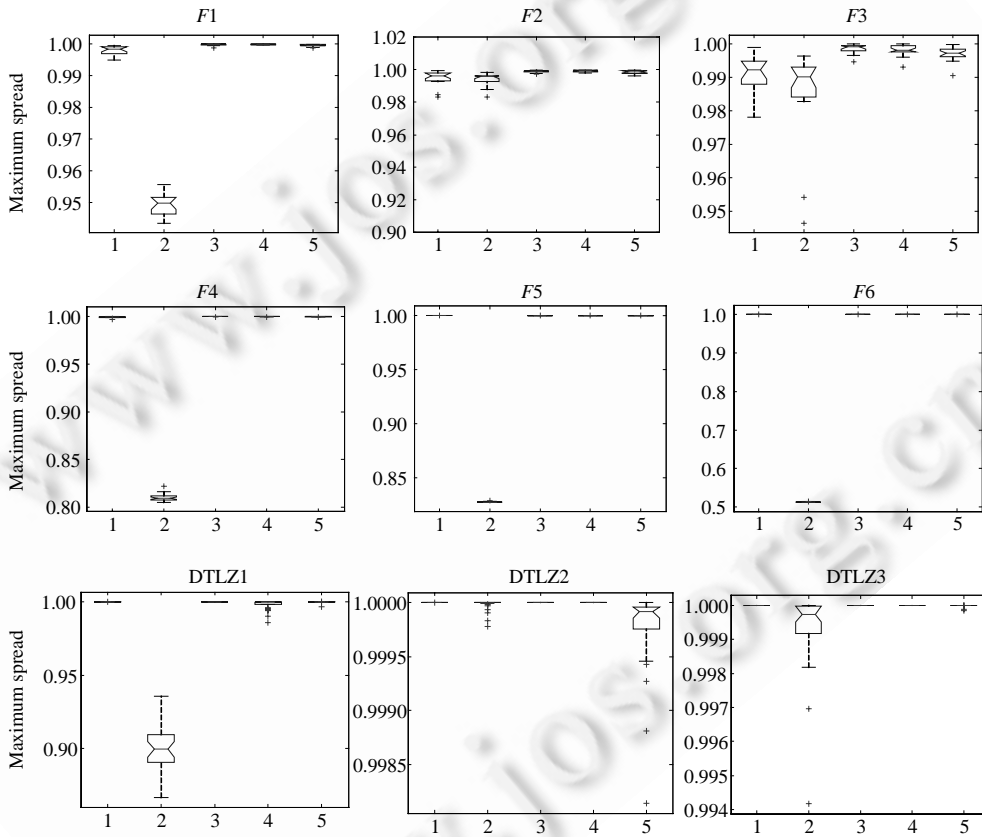


Fig.6 Statistical values of maximum spread for nine test problems by $NSGAI$ ('1'), $\epsilon MOEA$ ('2'), $NNIA$ ('3'), $INNIA$ ('4'), and $SPEA2$ ('5') respectively. Box plots are used to illustrate the distribution of these samples

图 6 $NSGAI$ ('1'), $\epsilon MOEA$ ('2'), $NNIA$ ('3'), $INNIA$ ('4') 和 $SPEA2$ ('5') 对 9 个测试函数的运算结果的最大展布度量的盒须图统计结果,盒须图用来描述样本的统计分布

图 7 是 $NSGAI, \epsilon MOEA, INNIA$ 和 $SPEA2$ 对 9 个测试函数的运算结果的集合之间覆盖率度量盒须图分布.集合之间覆盖率能够定量地反映出两个集合相互之间的支配关系,能够衡量解的相对收敛性.本文并未给出

INNIA 与 NNIA 的支配关系,这是因为 NNIA 是 IED 的算法载体,IED 从 NNIA 得到当前代的非支配解集而未影响 NNIA,所以 INNIA 的收敛性与 NNIA 是一致的.

一个多目标算法要获得均匀分布的解,不仅要有较好的均匀性保持策略,还要有较好的收敛性.如果算法不能收敛到或接近 Pareto 最优前沿,那么该算法要么不能得到均匀分布的解,要么得到的也是无意义的均匀解.图 7 中,除了 F5 和 F6 问题对应的 C(1,4)大于 C(4,1)和 C(2,4)大于 C(4,2)以外,对于其他 7 个问题的解集之间覆盖率度量,与其他 3 种算法相比,INNIA 均获得了较好或近似的结果,这说明 INNIA 的收敛性优于或等于 NSGAI, ϵ MOEA 和 SPEA2 的收敛性.特别地,对于 DTLZ3 问题,NSGAI, ϵ MOEA 和 SPEA2 均获得了较差的均匀性度量值.这是因为这些算法不能收敛该问题的最优 Pareto 前沿附近,而 NNIA 可以收敛到该问题的最优 Pareto 前沿,所以 INNIA 对该问题具有较好的收敛性和均匀性.

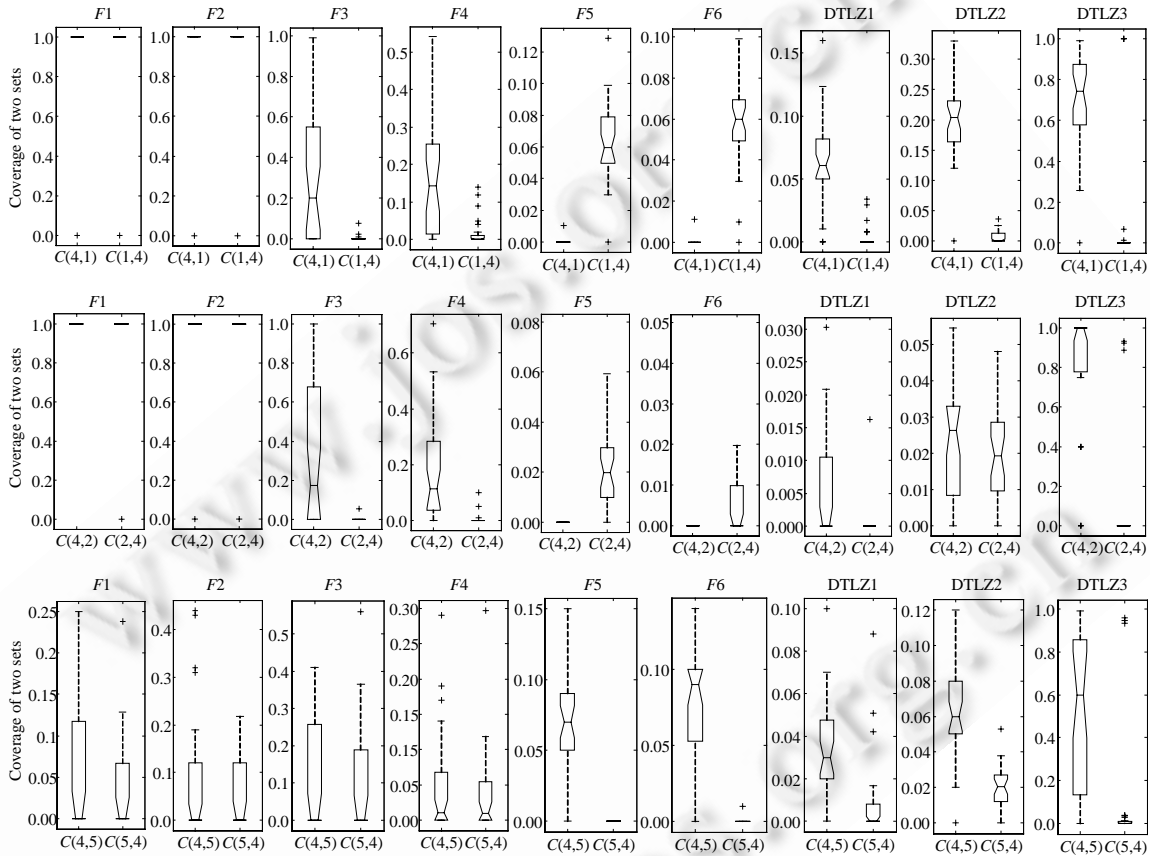


Fig.7 Statistical values of Coverage of two sets for nine test problems by NSGAI ('1'), ϵ MOEA ('2'), NNIA ('3'), INNIA ('4'), and SPEA2('5') respectively. Box plots are used to illustrate the distribution of these samples

图 7 NSGAI('1'), ϵ MOEA('2'),NNIA('3'),INNIA('4')和 SPEA2('5')对 9 个测试函数的运算结果的集合之间覆盖率度量的盒须图统计结果.盒须图用来描述样本的统计分布

总而言之,通过实验比较,可以得出如下结论:

- (1) 当两种算法具有比较接近的收敛性能时,解集的均匀性由该算法的均匀性保持策略来支配,均匀性保持策略好的算法能够得到较均匀的解集;如果两种算法具有较悬殊的收敛性能,那么,收敛性能较差的算法一般不能得到均匀分布的解集或得到不收敛的均匀解;
- (2) 本文提出的改进 ϵ 支配机制的等度规映射方法克服了传统 ϵ 支配对于 Pareto 前沿形状敏感的缺点,本

文的策略能够较好地维持解分布的均匀性,有利于解的有效进化和后期决策;

- (3) 极端解检验算子能够保持极端解的存在,克服了传统 ϵ 支配丢失极端解的不足,能够较好地维持解分布的宽广性.虽然多目标优化算法给决策者提供的是一组折衷解集,但是极端解往往对于折衷解的比较和选择有重要的参考价值.一旦决策者得到一组折衷解,他往往想知道这组解在对于所有目标的最值,然后做出合适的选择,并且决策者也很可能选择极端解.所以,保持极端解对于多目标决策有很大的参考和选择价值.

3.5 本征维数的估计

本征维数就是嵌入到流形空间的维数,在流形学习中,本征维数的估计问题是流形学习中的重要问题.对于本文所要解决的两目标和三目标问题,定性地看,需要考虑原始问题分别嵌入到一维和两维空间的集合分布情况,因为对于两目标问题,直观地把曲线伸展成一条直线;对于三目标问题,把曲面伸展成一个平面.所以,本文采用了 $m-1$ 作为问题的本征维数.在此,我们用嵌入向量的重构残差^[5]来验证本文的做法.

图 8 是 $F5$ 和 $DTLZ2$ 问题的本征维数-残差曲线图(不同的嵌入维数为横坐标,残差为纵坐标得到的残差曲线图).对于两目标优化问题($F5$),IED 的残差较小;当维数大于 1 时,残差的变化已不明显.这说明,对于两目标问题,取本征维数为 1,残差已经很小.对于三目标优化问题($DTLZ2$),IED 的残差比两目标问题的残差要大;当维数大于 2 时,残差已经相对较小.所以,本征维数取 2 已经可以满足要求.这说明,我们把由两目标和三目标优化问题得到的两维曲线和三维曲面 Pareto 前沿端分别伸展成一维直线和两维平面是有效的.

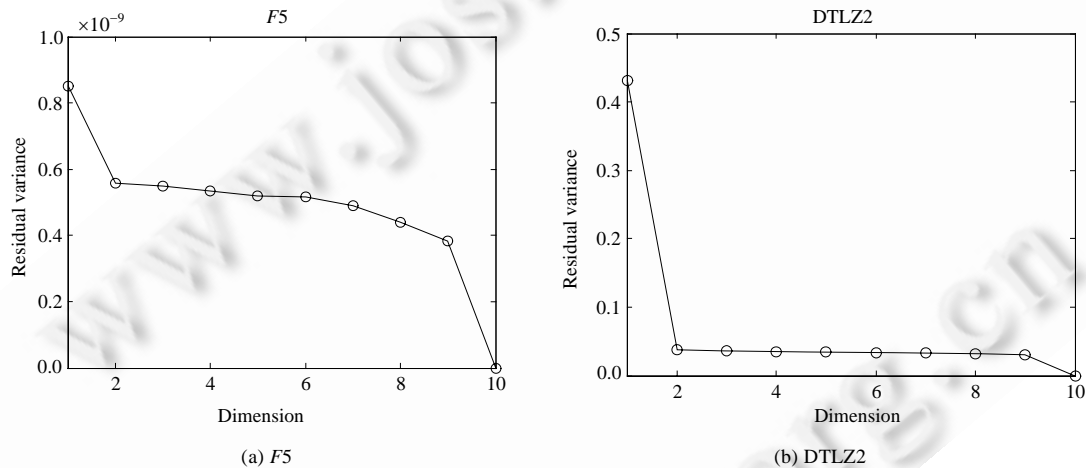


Fig.8 Graphs of corresponding dimension-residuals of $F5$ and $DTLZ2$

图 8 $F5$ 和 $DTLZ2$ 问题的本征维数-残差曲线图

4 结束语

ϵ 支配机制是较新的一种松弛形式的 Pareto 支配机制,根据 ϵ 支配机制的不足和流形学习特点,本文提出了基于等度规映射的 ϵ 支配机制和极端解检验算子.实验分析表明,基于等度规映射的 ϵ 支配具有较好的均匀保持性,极端解检验算子具有较好的极端解保持能力,它较好地克服了传统 ϵ 支配机制的不足.把每一代的非支配解影射到变换空间是一种很好的保持解均匀性的思路.但是,等度规映射只是非线性变换的一种方法,需要指出的是,如何设计出简单而有效的非线性变换或映射,是改进传统的 ϵ 支配机制的一个可行而有效的方法.

References:

- [1] Deb K, Pratap A, Meyarivan T. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2002,6(2):182-197. [doi: 10.1109/4235.996017]

- [2] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. Thiele. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm for multiobjective optimization. In: Giannakoglou KC, *et al.*, eds. *Evolutionary Methods for Design, Optimization and Control with Application to Industrial Problems (EUROGEN 2001)*. Athens, 2002. 95–100.
- [3] Corne DG, Jerram NR, Knowles JD, Oates MJ. PESA-II: Region-Based selection in evolutionary multi-objective optimization. In: Lee S, *et al.*, eds. *Proc. of the Genetic and Evolutionary Computation Conf. (GECCO 2001)*. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2001. 283–290.
- [4] Gong MG, Jiao LC, Yang DD, Ma WP. Research on evolutionary multi-objective optimization algorithms. *Journal of Software*, 2009,20(2):271–289 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3483.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03483]
- [5] Yang DD, Jiao LC, Gong MG. Adaptive multi-objective optimization based on nondominated solutions. *Computational Intelligence*, 2009,25(2):84–108. [doi: 10.1111/j.1467-8640.2009.00332.x]
- [6] Hernández-Díaz AG, Santana-Quintero LV, Coello Coello CA, Molina J. Pareto-Adaptive ε -dominance. *Evolutionary Computation*, 2007,15(4):493–517. [doi: 10.1162/evco.2007.15.4.493]
- [7] de Silva V, Tenenbaum JB. Global versus local methods in nonlinear dimensionality reduction. In: Becher S, Thrun S, Oberinayer K, eds. *Advances in Neural Information Processing Systems, Vol.15*. Cambridge: The MIT Press, 2003. 705–712.
- [8] Deb K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.
- [9] Coello Coello CA, van Veldhuizen DA, Lamont GB. *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [10] van Veldhuizen DA, Lamont GB. Evolutionary computation and convergence to a Pareto front. In: Koza JR, ed. *Proc. of the Genetic Programming 1998 Conf. 1998*. 221–228.
- [11] Liu L, Li MQ, Lin D. The ε -dominance based multiobjective evolutionary algorithm and an adaptive ε strategy. *Chinese Journal of Computers*, 2008,31(7):1063–1072 (in Chinese with English abstract).
- [12] Deb K, Mohan M, Mishra S. Towards a quick computation of well-spread Pareto-optimal solutions. In: Fonseca CM, Fleming PJ, Zitzler E, Deb K, Thiele L, eds. *Proc. of the 2nd Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2003)*. LNCS 2632, Faro: Springer-Verlag, 2003. 222–236. [doi: 10.1007/3-540-36970-8_16]
- [13] Gong MG, Jiao LC, Du HF, Bo LF. Multiobjective immune algorithm with nondominated neighbor-based selection. *Evolutionary Computation*, 2008,16(2):225–255. [doi:10.1162/evco.2008.16.2.225]
- [14] Zitzler E, Thiele L. Multi-Objective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 1999,3(4):257–271. [doi: 10.1109/4235.797969v]
- [15] van Veldhuizen DA, Lamont GB. On measuring multiobjective evolutionary algorithm performance. In: *Proc. of the Congress on Evolutionary Computation 2000*. Piscataway: IEEE Press, 2000. 204–211. <http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/dynhome.jsp> [doi: 10.1109/CEC.2000.870296]
- [16] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multi-objective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 2000,8(2):173–195. [doi: 10.1162/106365600568202]
- [17] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable multi-objective optimization test problems. In: *Proc. of the Congress on Evolutionary Computation (CEC 2002)*, Vol.1. IEEE Service Center, 2002. 825–830. <http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/dynhome.jsp> [doi: 10.1109/CEC.2002.1007032]
- [18] Deb K. Multi-Objective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems. *Evolutionary Computation*, 1999,7(3):205–230. [doi: 10.1162/evco.1999.7.3.205]
- [19] Huband S, Hingston P, Barone L, While L. A review of multi-objective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2006,10(5):477–506. [doi: 10.1109/TEVC.2005.861417]
- [20] Zhang QF, Zhou AM, Jin Y. RM-MEDA: A regularity model based multiobjective estimation of distribution algorithm. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2007,12(1):41–63. [doi: 10.1109/TEVC.2007.894202]

附中文参考文献:

- [4] 公茂果,焦李成,杨咚咚,马文萍.进化多目标优化算法研究.软件学报,2009,20(2):271-289. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3483.htm> [doi: 10.3724/SP.J.1001.2009.03483]
- [11] 刘鏊,李敏强,林丹.基于 ϵ -支配的多目标进化算法及自适应 ϵ 调整策略.计算机学报,2008,31(7):1063-1072.



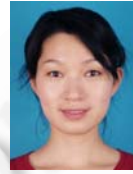
杨咚咚(1982-),男,河南三门峡人,博士生,主要研究领域为进化多目标优化,流形学习.



公茂果(1979-),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为自然计算,图像处理,数据挖掘.



马晶晶(1983-),女,博士生,主要研究领域为自然计算,数据挖掘.



司晓云(1986-),女,博士生,主要研究领域为数据挖掘,压缩感知理论.



焦李成(1959-),男,博士,教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为自然计算,数据挖掘,图像处理.