

一种基于可变多簇结构的动态概率粒子群优化算法*

倪庆剑¹⁺, 张志政^{1,2}, 王蓁蓁¹, 邢汉承¹

¹(东南大学 计算机科学与工程学院, 江苏 南京 210096)

²(南京大学 计算机软件新技术国家重点实验室, 江苏 南京 210093)

Dynamic Probabilistic Particle Swarm Optimization Based on Varying Multi-Cluster Structure

NI Qing-Jian¹⁺, ZHANG Zhi-Zheng^{1,2}, WANG Zhen-Zhen¹, XING Han-Cheng¹

¹(School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

²(State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

+ Corresponding author: E-mail: nqj@seu.edu.cn

Ni QJ, Zhang ZZ, Wang ZZ, Xing HC. Dynamic probabilistic particle swarm optimization based on varying multi-cluster structure. *Journal of Software*, 2009,20(2):339-349. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/3237.htm>

Abstract: Regarding to the characteristic of Gbest model and Lbest model in original particle swarm optimization, a neighborhood topology structure is developed, called multi-cluster structure. Moreover, a varying neighborhood strategy based on multi-cluster is proposed to coordinate exploration and exploitation. Furthermore, the information dissemination of several topologies is analyzed theoretically, and the statistical properties of canonical topologies and varying neighborhood topology are analyzed from graph theory. Gaussian dynamic particle swarm with several canonical topologies and varying topology are tested on five benchmark functions which are commonly used in the evolutionary computation. Experimental simulation results demonstrate that dynamic probabilistic particle swarm optimization with the varying neighborhood topology can solve complex optimization problems and escape from local optimal solutions efficiently. The results also reveal that the proposed method enhances the global search ability obviously.

Key words: swarm intelligence; particle swarm optimization; neighborhood topology; varying topology; multi-cluster structure

摘要: 针对传统粒子群优化算法中全连接型拓扑和环形拓扑的特点,引入了一种粒子群信息共享方式——多簇结构,进而基于多簇结构提出了动态可变拓扑策略以协调动态概率粒子群优化算法的勘探和开采能力,并从理论上分析了最优信息在各种拓扑中的传播,同时从图论角度分析了几种经典拓扑以及动态可变多簇结构的统计特性.通过典型的 Benchmark 函数优化问题测试并比较了几种经典拓扑以及可变拓扑在高斯动态粒子群优化算法中的性能.实验结果表明,基于多簇结构的可变拓扑策略在求解复杂优化问题时优势明显,可以有效地避免算法陷入局部最优,在保证收敛速度的同时增强了算法的全局搜索能力.

关键词: 群智能;粒子群优化算法;邻域拓扑;可变拓扑;多簇结构

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.90412014 (国家自然科学基金)

Received 2007-07-02; Accepted 2007-11-20

中图法分类号: TP18 文献标识码: A

粒子群优化算法(particle swarm optimization,简称 PSO 算法)是 James Kennedy 和 Russell Eberhart 于 1995 年提出的一种进化计算方法^[1,2],PSO 算法概念较为简单,易于编码实现,作为一种有效的优化工具已被成功地应用到诸多工程领域^[3].

在 PSO 算法中,粒子之间通过相互学习寻找最优解,这种学习通过共享粒子所发现的最优解来实现,所以粒子之间的信息共享方式对算法的性能有着至关重要的影响.粒子之间的信息共享方式体现为粒子群的邻域拓扑结构,因此,对粒子群的邻域拓扑结构进行研究可以深刻理解 PSO 算法的工作方式进而提高 PSO 算法的性能.

目前,研究者们开始关注粒子群的邻域拓扑的研究^[4-6],提出了一些经典的静态邻域拓扑结构,比如 Gbest 模型、Lbest 模型等;此后,很多研究者也开始关注动态的邻域拓扑结构,比较 PSO 算法采用不同拓扑结构时的性能差异.Suganthan^[7]尝试根据粒子之间的距离,通过邻域算子动态地调整粒子的邻域;王雪飞等人^[8]受到小世界网络模型的启发,在进化过程中根据概率动态地调整粒子的邻域结构;翁雯等人^[9]先计算粒子成为其他粒子的邻域粒子的概率,再在进化过程中根据这些概率对每个粒子选择邻域粒子.然而,以上动态可变拓扑的设计在计算距离或概率时都增加了额外的时间耗费,从而增加了算法的复杂性.本文通过对典型的粒子群拓扑结构进行分析,引入了多簇结构型拓扑,并结合 Kennedy 新近提出的高斯动态 PSO 算法^[10,11],提出了一种基于可变多簇结构的动态概率 PSO 算法,可变拓扑策略在粒子群进化的不同阶段采用不同的多簇结构,协调算法的勘探和开采能力,提高算法的寻优性能.

1 粒子群优化算法的变体

PSO 算法在求解优化问题时,粒子被抽象成解空间中的点,具有位置($x_i(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{id},\dots,x_{iD})$)和速度($v_i(v_{i1},v_{i2},\dots,v_{iD})$)属性,粒子在解空间中飞行,根据自身飞行经验和群体飞行经验动态更新自己的速度和位置.速度更新公式和位置更新公式如式(1)和式(2)所示.

$$v_{id} = v_{id} + c_1 \times rand() \times (P_{id} - x_{id}) + c_2 \times Rand() \times (P_{gd} - x_{id}) \quad (1)$$

$$x_{id} = x_{id} + v_{id} \quad (2)$$

其中,式(1)右边的第 1 部分是粒子对自身速度的记忆, v_{id} 是粒子 i 速度的第 d 维分量;第 2 部分是“认知”部分,表示粒子自身的思考,粒子根据自身的飞行经验对速度作相应的调整, c_1 是正的加速系数, $rand()$ 是 0,1 之间的随机数发生函数, x_{id} 是粒子 i 位置的第 d 维分量, P_{id} 是粒子自身历史最好位置的第 d 维分量;第 3 部分是“社会”部分,体现了群体信息对粒子的影响,粒子从群体的飞行经验中学习使得粒子向群体中的最优粒子靠近, c_2 是正的加速系数, $Rand()$ 是 0,1 之间的随机数发生函数, P_{gd} 是粒子群体中历史最好位置的第 d 维分量.

PSO 算法通过自身记忆、“认知”部分和“社会”部分这 3 个模块的作用影响粒子的速度,进而更新粒子的位置,通常对 PSO 算法的改进是通过改变这 3 部分的计算机制或者相互之间的协调机制提高算法的性能^[12-14].Shi 等人^[12]提出了带惯性权的 PSO 算法;Clerc 等人^[14,15]提出了带压缩因子的 PSO 算法;Kennedy^[13]最早开始对 PSO 算法中的邻域结构进行研究,提出了几种经典的邻域拓扑,并从小世界网络模型^[16]出发对 PSO 算法中的邻域拓扑进行了初步的探索;吕振肃等人^[17]基于群体适应度方差,引入遗传算法中的变异操作,提出了自适应变异的 PSO 算法;赫然等人^[18]结合生物界中的种群自动分家迁移的现象,提出了自适应逃逸的 PSO 算法;高海兵等人^[19]提出了广义粒子群优化模型应用到组合优化问题.上述研究都是通过改进方程式(1)和方程式(2)中各模块的计算机制进而提高 PSO 算法的性能.

Kennedy 新近提出了没有速度更新公式的 PSO 算法,采用概率的方法而非传统的轨迹方法生成新一代粒子的位置^[10,11,20],获得了与其他出色的改进相当的效果.下面分析两种 PSO 算法的变型:经典 PSO 算法和高斯动态 PSO 算法.

1.1 经典PSO算法

Clerc 和 Kennedy 提出的带压缩因子的 PSO 算法用压缩因子来控制算法的收敛性^[14,15],速度更新公式变为

$$v_{id} = \chi \times [v_{id} + c_1 \times rand() \times (P_{id} - x_{id}) + c_2 \times Rand() \times (P_{gd} - x_{id})] \tag{3}$$

$$\chi = 2 / \left| 2 - \varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4\varphi} \right|, \text{ where } \varphi = c_1 + c_2, \varphi > 4 \tag{4}$$

通常 χ 设为 0.729, φ 设为 4.1.带压缩因子的 PSO 算法应用广泛,也经常被用来与其他 PSO 算法的变体相比较,故被称为经典 PSO 算法.

1.2 高斯动态PSO算法

Kennedy 尝试采用概率的方法生成新一代的种群,提出了高斯动态粒子群优化算法(GDPSO)^[10].区别于传统的轨迹方法,采用这种种群产生方式的 PSO 算法可称为动态概率 PSO 算法.

在动态概率 PSO 算法的几种变体中,高斯动态 PSO 算法的性能表现较好,其粒子位置更新公式如下:

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + W1 \times (x_{id}(t) - x_{id}(t-1)) + W2 \times (avgp - x_{id}(t)) + G(0,1) \times (frange / 2.0) \tag{5}$$

$$avgp = \sum_{k=1}^K p_{kd} / K \tag{6}$$

$$frange = \sum_{k=1}^K |p_{id} - p_{kd}| / K \tag{7}$$

其中,W1 和 W2 分别是权值,G(0,1)是一个服从正态分布的随机数发生函数,式(6)和式(7)中的下标 k 表示粒子 i 的邻域粒子的标号,K 表示粒子 i 邻域粒子的个数.从式(6)和式(7)可以看出,两个关键数值的计算需要用到邻域中每个粒子的记忆,邻域信息得以充分利用,因此邻域拓扑的研究对高斯动态 PSO 算法显得尤为重要.

2 基于多簇结构的可变拓扑

2.1 Gbest模型和Lbest模型

目前,PSO 算法中应用和讨论得较多的是全连接型拓扑结构和环形拓扑结构.这两种拓扑结构最初以 PSO 算法^[2]中的 Gbest 模型和 Lbest 模型的形式出现,如图 1 所示.

Gbest 模型是一种全连接型的拓扑结构,粒子的邻域是群体中的所有其他粒子,Lbest 模型是一个环状的拓扑结构,通常粒子的邻域包括紧邻在粒子两边的一个粒子.在 Gbest 模型中,粒子只考虑群体中获得最优位置的粒子的信息,收敛速度相对较快,但易于陷入局部最优;Lbest 模型中,粒子之间的信息交流相对较慢,而一旦其中一个粒子搜索到最优位置,那么这个消息最终也将逐步传播到整个群体.

然而,社会群体中的信息传播模式并非像 Gbest 模型那样,个体两两之间都可以直接传递信息;也不像 Lbest 模型,个体的直接信息来源相对较少.Watts 等人^[16]于 1998 年提出了小世界网络模型,这方面的成果对群体中信息传播的研究提供了新的思路.PSO 算法是模拟生物群体行为机制进行寻优的,因此,粒子群的信息传播机制也可以用社会网络分析的方法加以分析和改进.Kennedy 最先分析了几种拓扑结构对 PSO 算法的影响^[13],初步通过实验证实了 PSO 算法中拓扑的重要作用;Kennedy 和 Mendes 后来又对随机产生的拓扑进行了研究^[6],发现方形拓扑(如图 2 所示)的效果比较突出;Mendes 在其博士学位论文中较为系统地分析了粒子群体中的拓扑结构对经典 PSO 算法性能的影响^[4],并肯定了粒子群的拓扑结构对 PSO 算法的鲁棒性和执行性能有直接的作用.

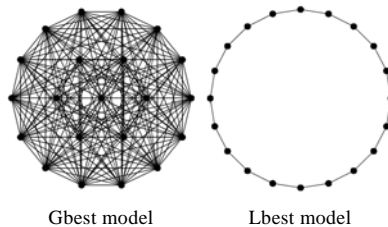


Fig.1 Gbest model and Lbest model
图 1 Gbest 模型和 Lbest 最优模型

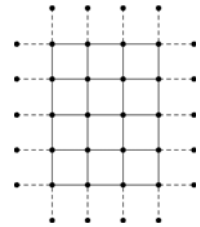


Fig.2 Square topology
图 2 方形拓扑

然而,社会群体中的信息传播模式并非像 Gbest 模型那样,个体两两之间都可以直接传递信息;也不像 Lbest 模型,个体的直接信息来源相对较少.Watts 等人^[16]于 1998 年提出了小世界网络模型,这方面的成果对群体中信息传播的研究提供了新的思路.PSO 算法是模拟生物群体行为机制进行寻优的,因此,粒子群的信息传播机制也可以用社会网络分析的方法加以分析和改进.Kennedy 最先分析了几种拓扑结构对 PSO 算法的影响^[13],初步通过实验证实了 PSO 算法中拓扑的重要作用;Kennedy 和 Mendes 后来又对随机产生的拓扑进行了研究^[6],发现方形拓扑(如图 2 所示)的效果比较突出;Mendes 在其博士学位论文中较为系统地分析了粒子群体中的拓扑结构对经典 PSO 算法性能的影响^[4],并肯定了粒子群的拓扑结构对 PSO 算法的鲁棒性和执行性能有直接的作用.

2.2 多簇结构

结合前述 Gbest 模型和 Lbest 模型的特点,提出多簇结构型拓扑.

定义 1(多簇结构). 将群体规模为 N 的种群分为 k 簇,每簇的规模为 M_i ,令 $4 \leq M_i \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, |M_i - M_j| \leq 1$,其中 $i, j = 1, \dots, k, i \neq j$,簇内部的粒子之间实现全连接型结构(Gbest 模型), k 簇之间通过边界粒子之间的连接形成环形结构(Lbest 模型),与其他簇有连接的粒子称为边界粒子,令边界粒子最多只与 1 个簇有连接.

前人的研究^[13]表明,Gbest 模型收敛速度较快,具有较强的局部搜索能力,但鲁棒性较差;Lbest 模型收敛速度较慢,但具有较强的全局搜索能力,鲁棒性较好.在群体规模为 N 的多簇结构中,要求分簇时各簇之间的粒子个数尽量相同,且各簇之间只通过边界粒子相连.多簇结构结合了 Gbest 模型和 Lbest 模型的优点,这种邻域结构的组织相当于将一个种群分成多个子种群,子种群内部实现信息的完全共享,而子种群之间则只通过个别粒子相互连接实现信息的传递.

根据定义 1,在群体规模为 N 的 k 簇结构中,每簇的规模为 $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$ 或 $\left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor + 1$.以种群规模 $N=20$ 为例,可以有 4 种多簇结构, $k=2,3,4,5$,则 2 簇、3 簇、4 簇、5 簇结构如图 3 所示.

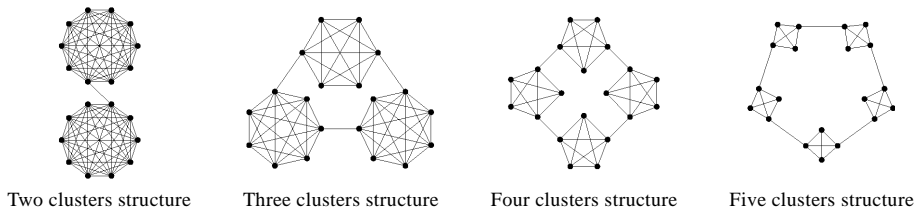


Fig.3 Multi-Cluster structure

图 3 多簇结构

2.3 可变拓扑策略

根据前述 Gbest 模型、Lbest 模型以及多簇结构的特点,本文提出基于多簇结构的可变拓扑策略,协调 PSO 算法的勘探(exploration)和开采(exploitation)能力.

定义 2(可变拓扑策略). 设 PSO 算法最大迭代次数为 MAX_ITR,种群规模为 N ,可形成 P 种多簇结构,将 P 种多簇结构按照簇数从少到多的顺序进行排序得到 $T_1, T_2, \dots, T_{P-1}, T_P$,在粒子群体进化的初期使用全连接型拓扑(Gbest 模型),随着迭代次数的增加按照 $T_1, T_2, \dots, T_{P-1}, T_P$ 的顺序依次采用多簇结构型拓扑,在进化的末期使用环形拓扑(Lbest 模型).

表 1 显示了采用可变拓扑策略时,PSO 算法在进化的不同阶段所用的拓扑结构.

Table 1 Topology of particle swarms on different stage of evolution

表 1 粒子群进化的不同阶段所使用的拓扑

Iteration numbers	Topology
$1 \sim \left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor$	GBest
$\left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor + 1 \sim \left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor \times 2$	T_1
...	...
$\left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor \times i + 1 \sim \left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor \times (i+1)$	T_i
...	...
$\left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor \times P + 1 \sim \left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor \times (P+1)$	T_P
$\left\lfloor \frac{\text{MAX_ITR}}{P+2} \right\rfloor \times (P+1) + 1 \sim \text{MAX_ITR}$	Lbest

以种群规模为 20 的 PSO 算法为例,可变拓扑策略在初期使用全连接型拓扑,然后依次使用 2 簇、3 簇、4 簇、5 簇结构,在后期使用环形拓扑。

动态可变拓扑策略在 PSO 算法迭代的初期使用全连接型拓扑,充分利用全连接型拓扑收敛速度快的特点,在早期将粒子引向有希望的搜索区域,同时又不失群体的多样性,然后在进化的中期使用多簇结构型拓扑作为过渡,协调 PSO 算法的勘探和开采能力,最后在迭代的末期使用环形拓扑,以获得最优解。最初我们试图在进化的初始阶段使用全局搜索能力较强的 Lbest 模型,然后再依次使用 $T_p, T_{p-1}, \dots, T_2, T_1$ 型的拓扑,最后使用 Gbest 模型,发现实验的效果一般。而采取本文提出的可变拓扑策略时,效果较好,其原因在于 Gbest 模型本身就具备一定全局搜索能力,可在一定程度上避免陷入局部最优,而且由于使用了可变拓扑策略,只在初期使用 Gbest 模型,进化代数不多,然后依次使用多簇结构型拓扑,这使得在进化的初期粒子群仍保持一定的多样性;在进化的后期,则开始注重全局搜索,由于在很多复杂优化问题中,在全局极值周围可能存在很多局部极值,因此进化的后期使用全局搜索能力较强的 Lbest 模型较为妥当。

下面讨论最优信息在群体中的传播。在 PSO 算法中,当粒子 X 找到全局最优解以后,X 的邻域粒子并不是直接用 X 的位置代替自身的位置,而是根据位置更新公式向 X 靠近,邻域最优的信息就这样逐步传播。为了便于考察 PSO 算法中最优信息在多簇结构及其他经典拓扑中传播的速度,提出假设 1,简化粒子的更新过程。

假设 1. 粒子 X 找到最优位置后,X 的邻域粒子在进化一代后找到最优位置。

定理 1. 在假设 1 的前提下,在采用全连接型拓扑(Gbest 模型)的 PSO 算法中,粒子 X 找到最优位置后,群体中除 X 外的所有粒子在进化一代后均可找到最优位置。

证明:由于在全连接型拓扑中,粒子的邻域包括群体中的所有其他粒子,因此 X 的邻域包含了除 X 外的所有其他粒子,根据假设 1,群体中除 X 以外的所有粒子在进化一代后均可找到最优位置。 □

定理 2. 在假设 1 的前提下,在采用环形拓扑(Lbest 模型)的 PSO 算法中,粒子 X 找到最优位置后,群体进化 $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ 代后,群体中所有的粒子均可找到最优位置。

证明:由于在 Lbest 模型中,每个粒子的邻域包括两个粒子,且整体呈环状连接,因此,当 N 为奇数时,在粒子 X 找到最优位置后,每进化 1 代,就有且只有两个粒子找到最优位置,直至所有粒子都找到最优位置,则群体进化 $(N-1)/2$ 代后,所有粒子均可找到最优位置。

当 N 为偶数时,在粒子 X 找到最优位置以后,每进化 1 代,就有且只有两个粒子找到最优位置,直至只剩下 1 个粒子没有找到最优位置,此后再进化一代,该粒子也找到最优位置,则群体进化 $N/2$ 代后,所有粒子均可找到最优位置。

综上,当一个粒子找到最优位置以后,当群体进化 $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ 代后,所有粒子均可找到最优位置。 □

定理 3. 在假设 1 的前提下,在采用 k 簇结构的 PSO 算法中,当粒子 X 找到最优位置后,群体进化 S 代后,群体中所有的粒子均可找到最优位置, $S=k$ 或 $k+1$ 。

证明:在 k 簇结构中,簇内部粒子之间是全连接型结构,在 X 找到最优位置后,根据定理 1,群体进化 1 代后,X 所在簇的所有粒子均可到达最优位置。

根据定义 1,k 个簇通过边界粒子连接形成环形结构。再根据定理 2,群体进化 k 或 $k+1$ 代后,所有粒子均可找到最优位置。 □

在假设 1 的前提下,考察各种拓扑结构中最优信息的传播速度。以种群规模 $N=20$ 为例,存在 4 种多簇结构(2 簇、3 簇、4 簇、5 簇),根据定理 1~定理 3,当群体中有一个粒子找到最优位置后,整个群体中的粒子都到达最优位置所需要的进化代数(S)见表 2。进化代数越少,说明信息传播越快;进化代数越多,则信息传播越慢。

Table 2 Comparison of information dissemination speed in several topologies

表 2 各种拓扑中信息传播速度对比

Topology S value	Gbest	2 cluster	3 cluster	4 cluster	5cluster	Lbest
	1	2 or 3	3	4 or 5	5	10

对于采用基于多簇结构的可变拓扑策略的 PSO 算法,当 $MAX_ITR=1000$ 时,其各个阶段最优信息传播至整个群体所需的进化代数(S)如图 4(其中 2 簇结构和 4 簇结构的 S 值取为 2.5 和 4.5)所示.当采用可变拓扑策略时,在进化的初期, S 值较小,最优信息的传播较快,随着迭代次数的增加,由于采用了多簇结构作为过渡, S 值逐步变大,信息传播速度逐渐变慢,直至进化的末期采用环形拓扑时,信息传播速度最慢.

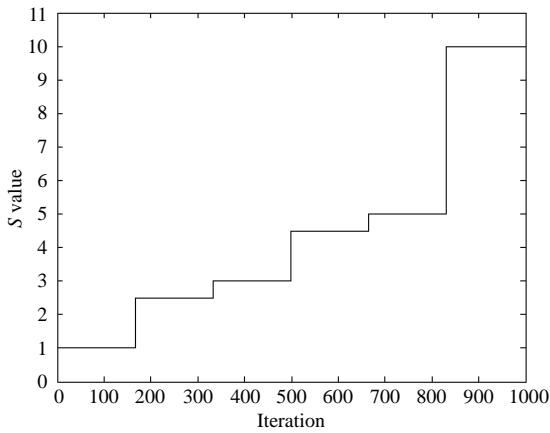


Fig.4 S values in different evolution stage

图 4 进化各个阶段的 S 值

在实际的 PSO 算法中,粒子并不是直接用邻域的最优信息取代自身位置,粒子具有自身的思考和记忆,邻域最优信息只是影响其运动,使粒子向邻域最优靠近,因此,在实际情况下,最优信息的传播比假设 1 条件下的速度要慢得多.基于多簇结构的可变拓扑策略正是从控制粒子信息传播速度的角度提高粒子的寻优能力,进而改进 PSO 算法的执行性能.在群体进化的初期,信息传播速度较快,有利于找到潜在的可行区域,后期逐步增强粒子的全局搜索能力,避免粒子陷入局部最优,更有利于找到全局最优解.

在群体进化的初期,信息传播速度较快,有利于找到潜在的可行区域,后期逐步增强粒子的全局搜索能力,避免粒子陷入局部最优,更有利于找到全局最优解.

在群体进化的初期,信息传播速度较快,有利于找到潜在的可行区域,后期逐步增强粒子的全局搜索能力,避免粒子陷入局部最优,更有利于找到全局最优解.

2.4 图论分析

粒子群的拓扑结构图可以看作是一种无向图,下面从图论角度分析上述几种粒子群拓扑结构的统计特性,选择连通性、节点度均值以及平均距离指标考察各种拓扑结构.

1. 连通性.粒子群拓扑结构图必须是连通的,因为 PSO 算法是通过粒子之间相互学习寻优的,各节点之间相互连通才可以保证粒子之间的信息共享与交流,上述的几种拓扑结构都满足连通性的要求.

2. 节点度均值.节点的度表示与粒子直接相邻的粒子个数,它决定了粒子的“社会”化程度,粒子在更新位置时需要自身经验和群体的经验,节点的度可以看作群体经验来源的个数.粒子度较小,说明与粒子进行交流的直接信息源较少;粒子度较大,说明与粒子进行信息共享的直接信息源较多.

3. 平均距离.图中两节点之间的距离是指两节点之间的边的数量.在粒子群拓扑结构中,距离表明了节点之间信息传播的长度,粒子之间的距离影响到信息交流的速度,而信息交流的速度则会影响到 PSO 算法收敛的速度.平均距离较小,说明信息传播的速度较快,算法收敛也比较快,但易于陷入局部最优;平均距离较大,则说明信息交流的速度较慢,但有利于全局搜索.

以规模为 20 的种群为例,各种拓扑的度均值以及平均距离见表 3.其中, Gbest 模型的度均值最大,平均距离最小,说明粒子的直接信息源较多,信息传播速度较快;而 Lbest 模型度均值最小,平均距离最大,说明粒子的直接信息源较少,信息传播速度较慢;多簇结构的度均值随着簇数的增多而减少,其平均距离随着簇数的增多而增加,这说明随着簇数的增多,粒子的直接信息源变多,同时信息传播的速度变快.

Table 3 Comparison of average degree and average length of nodes among different topologies

表 3 各种拓扑的节点度均值及平均距离对比

Topology	Gbest	Lbest	Square	2 cluster	3 cluster	4 cluster	5 cluster
Average degree	19	2	4	9.1	6	4.4	3.5
Average length	1	5.26	2.11	1.95	2.19	2.69	3.24

以规模为 20 的种群为例,当采用动态可变拓扑策略时,拓扑从最初的 Gbest 模型,再到 2 簇、3 簇、4 簇、5 簇结构,后期采用 Lbest 模型.以 $MAX_ITR=1000$ 为例,如图 5 所示,在进化的不同阶段,节点度均值逐步变小,平均距离逐渐变大.这说明,在可变拓扑策略中,随着迭代次数的增加,信息传播的速度逐步变慢,这与第 2.3 节的结论一致.

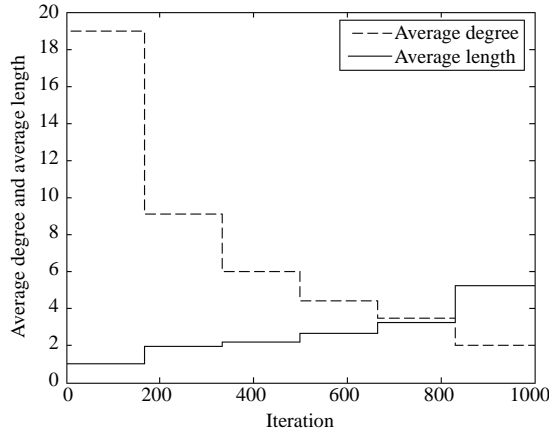


Fig.5 Average degree and average length of nodes in different evolution stage when applying varying topology

图5 采用可变拓扑时进化各阶段的节点度均值和平均距离

3 实验

3.1 实验设置

为了分析采用可变拓扑策略的动态概率粒子群优化算法的执行性能,本文选择经典 PSO 算法(CPSO)与带邻域拓扑的高斯动态 PSO 算法(GDPSO)进行对比测试.带邻域拓扑的 GDPSO 算法共选择了 4 种拓扑,分别是:全连接型拓扑(Gbest 模型)、环形拓扑(Lbest 模型)、方形(Square)拓扑以及本文所提出的基于多簇结构的动态可变拓扑.实验选用 5 个 Benchmark 问题进行测试,分别是 Sphere 函数、Schaffer F6 函数、Griewank 函数、Rosenbrock 函数和 Rastrigin 函数.表 4 显示了这些 Benchmark 函数的定义、维度、取值范围以及优化目标精度.

Table 4 Five benchmark functions

表 4 5 个标准测试函数

Function	Equation	Relative parameters
Sphere	$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$	Dimensions: 30 Initial range: [-100,100] Acceptable error: <0.01
Schaffer F6	$f(X) = \frac{\sin^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 0.5}{[1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2)]^2} - 0.5$	Dimensions: 2 Initial range: [-100,100] Acceptable error: <0.00001
Griewank	$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	Dimensions: 30 Initial range: [-600,600] Acceptable error: <0.1
Rosenbrock	$f(x) = \sum_{i=1}^n (100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2)$	Dimensions: 30 Initial range: [-30,30] Acceptable error: <100
Rastrigin	$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i) + 10)$	Dimensions: 30 Initial range: [-5.12,5.12] Acceptable error: <100

表 4 中,Schaffer F6,Griewank,Rastrigin 这 3 个函数都是多峰函数,都有很多的局部极小值点,一般算法都较难找到全局最优值,因此可以用来检验算法跳出局部最优的能力;Rosenbrock 函数为单峰,非凸的病态函数,也是难度较大的复杂优化问题,用来评价算法的执行效率;Sphere 函数是较为简单的单峰函数,可以测试算法的寻优精度,考察算法的执行性能.

所有实验的种群规模为 20,迭代次数为 1 000,每个函数的测试独立运行 100 次,考察 100 次实验迭代结束时测试函数的最优值、中值、均值、标准差、最差值,以及每种算法满足误差范围的比率(成功率).各个函数的误差范围在表 4 中给出,满足误差范围表示算法此时已经找到最优解所在的区域,可以从这个角度考察算法搜索最优解的能力.

3.2 实验结果

表 5 显示了带各种邻域拓扑的 GDPSO 算法和经典 PSO 算法具体的实验结果,简写 CPSO,GDPSO(Gbest),GDPSO(Lbest),GDPSO(Square),GDPSO(Dynamic)分别代表经典 PSO 算法,以及采用全连接型拓扑、环形拓扑、方形拓扑和基于多簇结构的可变拓扑的 GDPSO 算法.对于 Sphere 函数,采用可变拓扑策略的 GDPSO 算法达到误差范围的成功率达到了 100%,表明可变拓扑策略达到了很好的寻优精度;对于 Schaffer F6 函数,采用可变拓扑策略的效果明显好于其他几种拓扑,在均值、中值和成功率这几项重要指标上优势非常突出,这表明对于像 Schaffer F6 函数这样的具有较多局部极小值点的复杂优化问题,可变拓扑策略非常有效地使算法跳出了局部最优;对于 Griewank 函数,从最小值和中值来看,可变拓扑的优势很明显,而且成功率达到了 100%,这说明采用可变拓扑的 GDPSO 算法具有较高的稳定性和健壮性;对于 Rosenbrock 函数,可变拓扑和方形拓扑在几项重要指标上相差不大且优于其他几种拓扑,但采用可变拓扑时的成功率最高;对于 Rastrigin 函数,可变拓扑在最小值、中值、均值以及成功率等指标上均占有较大优势,充分显示了可变拓扑策略的高效性.

表 6 与其他文献中采用动态拓扑结构且性能较优的 PSO 算法进行了性能对比.

在表 6 中,对比了算法在各 Benchmark 函数上所获得的均值数据,其他采用动态拓扑结构的 PSO 算法的优化结果是指文献[7-9]中的算法取得的最好结果.从实验对比可以看出,本文所提出的可变拓扑策略优势明显.

Table 5 Comparison of test results of five benchmark functions

表 5 5 个标准测试函数的测试结果对比

Function	Algorithm	Min	Median	Mean	STD	MAX	Success proportion (%)
Sphere	CPSO	2.26E-12	1.85E-08	1.10E+03	3.45E+03	2.00E+04	90
	GDPSO (Gbest)	4.20E-31	8.45E-25	1.67E-01	1.65E+00	1.65E+01	93
	GDPSO (Lbest)	2.28E-07	9.59E-07	1.27E-06	1.16E-06	8.89E-06	100
	GDPSO (Square)	6.23E-12	2.91E-11	4.40E-11	5.85E-11	4.27E-10	100
	GDPSO (Dynamic)	3.99E-29	1.14E-27	1.21E-08	3.83E-08	1.21E-07	100
Schaffer F6	CPSO	0.00E+00	9.72E-03	4.96E-03	4.88E-03	9.72E-03	48
	GDPSO (Gbest)	0.00E+00	8.43E-05	1.76E-03	3.23E-03	9.72E-03	22
	GDPSO (Lbest)	0.00E+00	9.68E-07	9.28E-04	2.46E-03	9.72E-03	58
	GDPSO (Square)	5.55E-17	1.11E-05	9.47E-04	2.20E-03	9.72E-03	48
	GDPSO (Dynamic)	0.00E+00	2.58E-09	6.06E-04	2.01E-03	9.72E-03	74
Griewank	CPSO	3.95E-12	5.27E-02	9.09E+00	3.01E+01	1.81E+02	77
	GDPSO (Gbest)	0.00E+00	1.47E-10	1.20E-02	4.15E-02	2.71E-01	96
	GDPSO (Lbest)	7.77E-07	5.18E-04	4.13E-03	8.33E-03	4.41E-02	96
	GDPSO (Square)	1.90E-11	9.21E-11	1.11E-03	5.19E-03	4.65E-02	98
	GDPSO (Dynamic)	0.00E+00	0.00E+00	1.80E-03	7.96E-03	6.10E-02	100
Rosenbrock	CPSO	4.372 6	80.8	8.13E+05	8.00E+06	8.00E+07	55
	GDPSO (Gbest)	21.521	30.349	114.44	313.11	2 981.1	79
	GDPSO (Lbest)	10.32	27.594	56.059	39.252	156.02	85
	GDPSO (Square)	22.639	26.305	37.705	25.189	140.48	92
	GDPSO (Dynamic)	0.000 3	21.571	25.659	9.564	37.146	98
Rastrigin	CPSO	42.783 0	96.511 0	100.350 0	30.295 0	180.230 0	55
	GDPSO (Gbest)	10.945 0	20.894 0	24.835 0	19.367 0	160.810 0	90
	GDPSO (Lbest)	46.152 0	87.292 0	86.480 0	18.756 0	125.580 0	78
	GDPSO (Square)	7.058 2	23.158 0	49.201 0	45.581 0	166.950 0	81
	GDPSO (Dynamic)	0.000 0	15.063 0	17.130 0	11.159 5	29.848 7	98

Table 6 Comparison between the different PSO algorithms with varying topology

表 6 与其他采用动态拓扑结构的 PSO 算法的比较

Algorithm	Benchmark functions			
	Sphere	Rosenbrock	Griewank	Rastrigin
Mean value of other PSO algorithms	6.8E-07	45.573	0.011 556	26.376 5
Mean value of the proposed algorithm	1.21E-08	25.659	0.001 80	17.13

综合表 5 中的各项数据,对于有较多局部极小值的复杂优化问题,采用可变拓扑策略的 GDPSO 算法获得了非常好的结果.下面考察 Schaffer F6, Griewank, Rosenbrock, Rastrigin 这 4 个复杂优化问题适应度的进化曲线.为了较直观地观察适应度的变化趋势,本文考察适应度对数值(以 e 为底数)随迭代次数的变化曲线,同时为避免出现对 0 取对数的情况,对适应度值加上 10^{-10} 后再取对数.4 个 Benchmark 函数对应的进化曲线如图 6~图 9 所示.

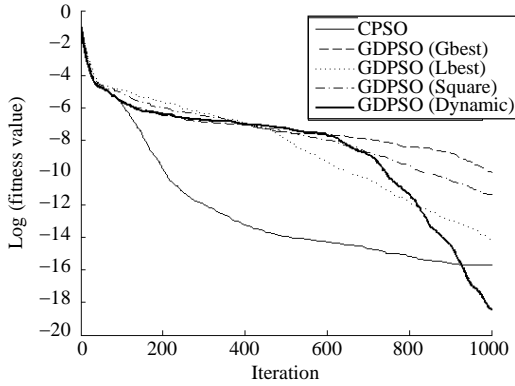


Fig.6 Fitness values (Log) for Schaffer F6 function

图 6 Schaffer F6 函数适应度值(Log)

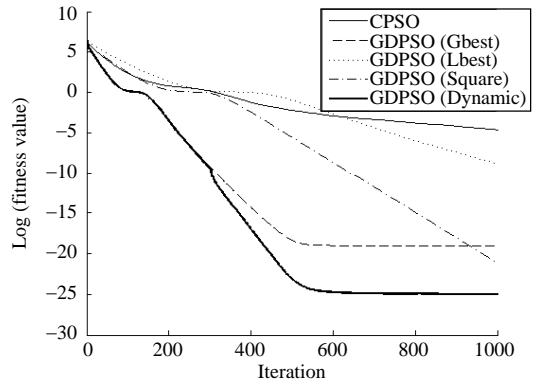


Fig.7 Fitness values (Log) for Griewank function

图 7 Griewank 函数适应度值(Log)

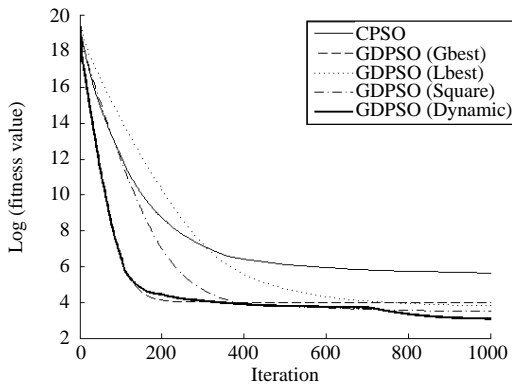


Fig.8 Fitness values (Log) for Rosenbrock function

图 8 Rosenbrock 函数适应度值(Log)

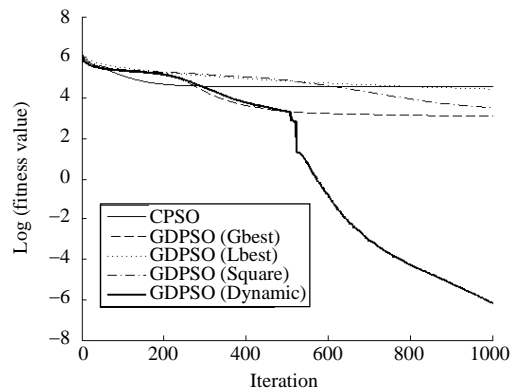


Fig.9 Fitness values (Log) for Rastrigin function

图 9 Rastrigin 函数适应度值(Log)

从变化曲线图中可以看出,采用基于多簇结构的可变拓扑策略的 GDPSO 算法在进化的各个阶段,不仅可以保证较快的收敛速度,而且能够持续地搜索全局最优解,较好地协调了 PSO 算法在各个阶段的全局搜索和局部搜索能力,并且在收敛精度和收敛速度上都具有明显的优势.以上实验结果充分验证了基于多簇结构的可变拓扑策略的正确性和高效性.

综合上面的分析,对于较难的复杂优化问题,基于多簇结构的可变拓扑策略通过控制最优信息的传播很好地协调了 GDPSO 算法在进化各阶段的全局搜索和局部搜索.实验结果表明,可变拓扑策略达到了预想的效果,综合指标优于其他文献中提及较多的效果较好的拓扑.

4 总结

本文通过分析 PSO 算法的几种经典拓扑以及 GDPSO 算法的特点,引入了多簇结构型拓扑,进而基于多簇结构提出了动态可变拓扑策略,通过控制 PSO 算法中最优信息的传播提高算法的性能,并从理论上分析了群体

最优信息在各种拓扑结构中的传播.同时,本文还从图论角度对粒子群各种拓扑结构的统计特性进行了分析,最后通过实验对比了 GDPSO 算法采用各种拓扑结构以及可变拓扑策略时的性能差异.基于多簇结构的可变拓扑策略可以有效地引导 PSO 算法持续地搜索解空间.算法在初期使用全连接型拓扑,在不失群体多样性的前提下,引导算法寻找可能的最优区域,然后采用可变多簇结构协调算法的勘探和开采,最后使用环形拓扑,使得粒子群体可以有效地搜索全局最优解.在多个 Benchmark 问题上的实验结果显示,基于多簇结构的可变拓扑策略在求解复杂优化问题时优势明显,可以有效地避免粒子陷入局部最优,同时也具有较快的收敛速度,达到了非常好的优化效果.基于多簇结构的可变拓扑策略为 PSO 算法求解复杂优化问题提供了新的思路.

基于现有的工作,我们将对以下问题展开进一步的研究:

- (1) 可变拓扑策略是基于多簇结构的,可以继续改进多簇结构本身以进一步增强算法的寻优能力;
- (2) 可变拓扑策略中,不同拓扑在各个阶段的迭代次数、采用的多簇结构的个数,这些参数的取值也值得进一步优化.

References:

- [1] Kennedy J, Eberhart RC. Particle swarm optimization. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Neural Networks. Perth: IEEE Press, 1995. 1942–1948.
- [2] Eberhart RC, Kennedy J. A new optimizer using particle swarm theory. In: Proc. of the 6th Int'l Symp. on Micro Machine and Human Science. Nagoya: IEEE Press, 1995. 39–43.
- [3] Shi YH. Particle swarm optimization. IEEE Connections, 2004,2(1):8–13.
- [4] Mendes R. Population topologies and their influence in particle swarm performance [Ph.D. Thesis]. Portugal: Escola de Engenharia: Universidade do Minho, 2004.
- [5] Kennedy J, Mendes R. Neighborhood topologies in fully informed and best-of-neighborhood particle swarms. IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, 2006,36(4):515–519.
- [6] Kennedy J, Mendes R. Population structure and particle swarm performance. In: Proc. of the Congress on Computational Intelligence. Honolulu: IEEE Press, 2002. 1671–1676.
- [7] Suganthan PN. Particle swarm optimiser with neighbourhood operator. In: Proc. of the Congress on Evolutionary Computation. Washington: IEEE Press, 1999. 1958–1962.
- [8] Wang XF, Wang F, Qiu YH. Research on a novel particle swarm algorithm with dynamic topology. Computer Science, 2007,34(3): 205–207 (in Chinese with English abstract).
- [9] Wen W, Hao Z. Improved particle swarm optimizer based on dynamic topology. Computer Engineering and Applications, 2005, 41(34):82–85 (in Chinese with English abstract).
- [10] Kennedy J. Dynamic-Probabilistic particle swarms. In: Proc. of the Conf. on Genetic and Evolutionary Computation. Washington: ACM Press, 2005. 201–207.
- [11] Kennedy J. In search of the essential particle swarm. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Vancouver: IEEE Press, 2006. 1694–1701.
- [12] Shi YH, Eberhart RC. A modified particle swarm optimizer. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Evolutionary Computation. Anchorage: IEEE Press, 1998. 69–73.
- [13] Kennedy J. Small worlds and mega-minds: Effects of neighborhood topology on particle swarm performance. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Washington: IEEE, 1999. 1931–1938.
- [14] Clerc M, Kennedy J. The particle swarm—Explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space. IEEE Trans. on Evolutionary Computation, 2002,6(1):58–73.
- [15] Clerc M. The swarm and the queen: Towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. In: Proc. of the IEEE Congress on Evolutionary Computation. Washington: IEEE Press, 1999. 1951–1957.
- [16] Watts DJ, Strogatz SH. Collective dynamics of small-world networks. Nature, 1998,393(4):440–442.
- [17] Lü ZS, Hou ZR. Particle swarm optimization with adaptive mutation. Acta Electronica Sinica, 2004,32(3):416–420 (in Chinese with English abstract).

- [18] He R, Wang YJ, Wang Q, Zhou JH, Hu CY. An improved particle swarm optimization based on self-adaptive escape velocity. *Journal of Software*, 2005,16(12):2036–2044 (in Chinese with English abstract). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/2036.htm>
- [19] Gao HB, Zhou C, Gao L. General particle swarm optimization model. *Chinese Journal of Computers*, 2005,28(12):1980–1987 (in Chinese with English abstract).
- [20] Kennedy J. Bare bones particle swarms. In: *Proc. of the IEEE Swarm Intelligence Symp.* Indianapolis: IEEE Press, 2003. 80–87.

附中文参考文献:

- [8] 王雪飞,王芳,邱玉辉.一种具有动态拓扑结构的粒子群算法研究. *计算机科学*,2007,34(3):205–207.
- [9] 翁雯,郝志峰.一种基于动态拓扑结构的 PSO 改进算法. *计算机工程与应用*,2005,41(34):82–85.
- [17] 吕振肃,侯志荣.自适应变异的粒子群优化算法. *电子学报*,2004,32(3):416–420.
- [18] 赫然,王永吉,王青,周津慧,胡陈勇.一种改进的自适应逃逸微粒群算法及实验分析. *软件学报*,2005,16(12):2036–2044. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/16/2036.htm>
- [19] 高海兵,周驰,高亮.广义粒子群优化模型. *计算机学报*,2005,28(12):1980–1987.



倪庆剑(1980—),男,江苏盐城人,博士生,主要研究领域为群智能方法,机器学习.



王蓁蓁(1975—),女,博士生,主要研究领域为增强学习.



张志政(1980—),男,博士,讲师,主要研究领域为知识表示和推理.



邢汉承(1938—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能,逻辑程序设计.