ISSN 1000-9825, CODEN RUXUEW
Journal of Software, Vol.19, No.11, November 2008, pp.2968−2978
DOI: 10.3724/SP.J.1001.2008.02968

E-mail: jos@iscas.ac.cn
http://www.jos.org.cn
Tel/Fax: +86-10-62562563

多偏好逻辑GMPL *

张志政[1,2,3+], 高志强[1], 邢汉承[1]

[1](东南大学 计算机科学与工程学院,江苏 南京 210096)

[2](南京大学 计算机软件新技术国家重点实验室,江苏 南京 210093)

[3](苏州大学 江苏省计算机信息处理技术重点实验室,江苏 苏州 215006)

GMPL Logic of Kinds of Preferences

ZHANG Zhi-Zheng[1,2,3+], GAO Zhi-Qiang[1], XING Han-Cheng[1]

[1](School of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

[2](State Key Laboratory for Novel Software Technology, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

[3](Jiangsu Provincial Key Laboratory of Computer Information Processing Technology, Soochow University, Suzhou 215006, China)

+ Corresponding author: E-mail: seu_zzz@seu.edu.cn

Zhang ZZ, Gao ZQ, Xing HC. GMPL logic of kinds of preferences. *Journal of Software*, 2008,19(11): 2968−2978. http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/2968.htm

Abstract: Because of the absence of a whole logic to represent and reason various kinds of preferences, MPL (logic of many kinds of preference) is presently constructed to fill the gap. But, the semantics of MPL is based on the complete pre-order, so incomplete preferences cannot be expressed in it. In this paper, GMPL (a generalized edition of MPL) is introduced to supply the gap. In addition, the expressive power of GMPL is showed by rewriting several familiar logical preferences. Moreover, a decision procedure is introduced to reduce SAT problem of GMPL into that of propositional logic.
Key words: preference representation; preference logic; preference reasoning

摘 要: 针对缺乏多类型偏好共存的偏好逻辑系统的现状,MPL(logic of many kinds of preference)被构造为一种能够表示和推理四类型偏好的偏好逻辑,但是 MPL 的语义基于全前序偏好结构,因而不能表示不完全偏好.为此,提出了偏好逻辑 GMPL(a generalized edition of MPL).此外,通过常见逻辑偏好的 GMPL 重写表明 GMPL 较强的表达能力和实际应用前景,并提出一种将 GMPL 的 SAT 问题归结为命题逻辑的 SAT 问题的方法.
关键词: 偏好表示;偏好逻辑;偏好推理
中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

许多决策问题的解都可以归结为布尔变量集上的赋值,于是决策者对问题解的偏好表现为赋值集上的偏好关系.然而,决策者的偏好通常不是通过枚举每一对解之间的相对优劣(或愿意、喜欢等)关系给出,而是表达为具有某特征的解集和具有另一特征的解集之间的相对优劣(或意愿、喜欢等)关系.如果把布尔变量集的赋值看作命题逻辑的可能世界,决策者偏好就可以表示为命题逻辑公式上的偏好.因此,以偏好表示和推理为目标的偏

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60773107 (国家自然科学基金)
Received 2007-10-23; Accepted 2008-06-03

好逻辑研究具有重要意义[1,2].

称将可能世界间的偏好表达为逻辑表达式间偏好关系为偏好提升(preference lifting)或逻辑偏好定义[3].人工智能研究人员通常把可能世界上的偏好关系看作 agent 具有的一种内部状态或者常识,通常表现为可能世界上某种序,例如,全前序(即线序)、偏序、严格线序等[4].逻辑偏好的定义本质是采用可能世界上的序,定义和解释诸如决策者的喜好、意愿、目标、理性选择、有序选择、知识分级、常识推理等智能行为.鉴于偏好扮演角色和根源的多样性,逻辑偏好的定义多种多样[2].

在决策问题中,特别是在多 agent 决策和多判据决策情景下,往往多个逻辑偏好定义共存于一个决策问题中.Kaci 和 van der Torre[5]首先注意到当前人工智能偏好研究往往都只是针对在特定应用中 von Wright 的 3 种逻辑偏好定义之一,然而实际决策问题中 3 种偏好往往共存的事实,先后在 2005 年欧洲符号和定性的不确定推理会议和 2005 年国际人工智能联合大会的偏好研究专题讨论会上明确提出多偏好共存情况下的推理和决策问题,结合 von Wright 合取扩展原理和 ceteris paribus 原理定义 8 种更细致的偏好,并提出一种多偏好表示语言及其非单调推理方法[5,6].虽然多偏好共存情况下的决策研究刚刚明确提出,尚未展开,但是有些研究人员已经开始注意并接受了多偏好同时共存的现状:von Wright[7]提出了 3 种偏好,实际上是为了弥补 von Wright 偏好逻辑中一种偏好不能描述实际当中很多偏好认知现象的不足;van Benthem 等人[8]从哲学逻辑公理化和形式化偏好角度提出了 4 种偏好定义的想法;从偏好的简洁表示和知识库设计角度出发,Brewka 等人[9]提出了基于分级知识库的定性偏好表示语言 LPD,能够描述多种偏好.构造多个逻辑偏好定义共存的逻辑系统(简称为多偏好逻辑系统)成为偏好表示和推理及其实际应用的重要需求.在文献[5,6]的基础上,针对缺乏多偏好逻辑系统的现状,文献[10]构造了 MPL(logic of many kinds of preference)逻辑.

与 von Wright,Kaci 和 van der Torre 以及 van Benthem 的工作相比,MPL 是一个完整的多偏好逻辑系统,能够表示和刻画多种常见偏好的推理规律.但是 MPL 仍然存在一些缺陷和不足:条件愿望[11]、条件偏好[12]、相对相似[3]、理性偏好[13]等常见偏好定义,以及 J. van Benthem 的四偏好设想都是建立在偏序结构上,而且实际决策问题中通常偏好信息是不完全的[2],但是 MPL 的逻辑偏好定义建立在全前序偏好结构上,不能表示不完全偏好信息,与常见偏好定义相比具有极大的局限性,在实际应用中受到极大的限制.

针对上述问题,本文首先介绍 MPL,并与相关工作作比较分析,提出解决上述问题面临的 3 个最基本的研究内容;其次提出 4 个更一般的逻辑偏好定义,使其能够建立在全前序、偏序等完全或者不完全的偏好关系上,并提出能够表示和推理 4 个新逻辑偏好定义的 GMPL 偏好逻辑;再次,通过常见逻辑偏好定义的 GMPL 重写,表明 GMPL 更强的表达能力;然后,提出一个将 GMPL 的 SAT 问题归结为命题逻辑的 SAT 问题的方法;最后,总结本文并展望进一步的研究工作.

1 MPL偏好逻辑

1.1 MPL逻辑偏好定义

用$[\![\phi]\!]$表示命题公式ϕ的模型集,Kaci和van der Torre划分agent“ϕ偏好于ψ”的 4 种认知情况如下:

① 有限乐观(locally optimistic):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“好”的与$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“好”的作比较.

② 有限悲观(locally pessimistic):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“差”的与$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“差”的作比较.

③ 投机(opportunistic):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“好”的与$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“差”的作比较.

④ 谨慎(careful):用$[\![\phi\wedge\neg\psi]\!]$中最“差”的与$[\![\neg\phi\wedge\psi]\!]$中最“好”的作比较.

据此,给定指派集W上的全前序$\succeq$,定义$M(\phi,\succeq)=\{w\in[\![\phi]\!]|w'\in[\![\phi]\!]\Rightarrow w\succeq w'\}$,$m(\phi,\succeq)=\{w\in[\![\phi]\!]|w'\in[\![\phi]\!]\Rightarrow w'\succeq w\}$,4 种逻辑偏好定义“$\phi^x\geq^y\psi$”解释如下:

$(W,\succeq)$满足$\phi^x\geq^y\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi\wedge\neg\psi,\succeq),\forall w'\in y(\neg\phi\wedge\psi,\succeq)$满足 $w\succeq w'$,其中 $x,y\in\{M,m\}$.

通过剔除 von Wright 合取扩展原理的限制,MPL 中重新定义 4 种认知情况如下:

- 有限乐观(locally optimistic):用$[\![\phi]\!]$中最“好”的与$[\![\psi]\!]$中最“好”的作比较.
- 有限悲观(locally pessimistic):用$[\![\phi]\!]$中最“差”的与$[\![\psi]\!]$中最“差”的作比较.

- 投机(opportunistic):用⟦ϕ⟧中最“好”的与⟦ψ⟧中最“差”的作比较.
- 谨慎(careful):用⟦ϕ⟧中最“差”的与⟦ψ⟧中最“好”的作比较.

依据上述 4 种认知情况, MPL 中 4 种逻辑偏好定义“$\phi^x\geq^y\psi$”解释如下:

$(W,\succeq,\eta)$满足$\phi^x\geq^y\psi$当且仅当$\forall w\in x(\phi,\succeq),\forall w'\in y(\psi,\succeq)$满足 $w\succeq w'$,其中 $x,y\in\{M,m\}$.

1.2 MPL的语言和语义

给定有限布尔变量集 $VAR=\{p_1,\ldots,p_n\}$,基于命题逻辑,添加偏好算子 ${}^x\geq^y$,MPL 逻辑语言定义如下:

- $p_i\in L_{MPL}$;如果$\phi,\psi\in L_{MPL}$,则$\neg\phi\in L_{MPL},\phi\rightarrow\psi\in L_{MPL},\phi^x\geq^y\psi\in L_{MPL}$,其中 $x,y\in\{M,m\}$.
- 其他经典命题逻辑联结词如$\vee,\wedge,\leftrightarrow$以及一元逻辑符号 $\top,\perp$等可通过算子$\neg$和$\rightarrow$来定义,方法与命题逻辑相同,${}^l\geq^r$ 和$\vee,\wedge$同一优先级,此外,用括号表示优先.

MPL 的模型定义为三元组 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,其中 VAR 是有限布尔变量集,W 是 VAR 上的指派集,如果记任意 $w\in W$ 为 VAR 子集形式使得 $p_i\in w$ 当且仅当 p_i 为真,那么 $W=2^{VAR}$.$\boldsymbol{R}$ 是定义在 W 上的全前序.假设任意非永假 $\phi\in L_{MPL}$ 有$\phi^x\geq^y\perp$无条件成立,表示“有选择项总比没有选择好”.MPL 逻辑语义定义如下:

$M,w\models p$ 当且仅当 $p\in w$;$M,w\models\neg\phi$当且仅当 $M,w\models\phi$不成立;$M,w\models\phi\rightarrow\psi$当且仅当 $M,w\models\neg\phi$或 $M,w\models\psi$.

$M,w\models\phi^x\geq^y\psi$当且仅当如下两种情况之一成立:

① $M,w\models\phi$且不存在 $w'\in W$ 满足 $M,w'\models\psi$;② $\forall w_1\in x(\phi,\boldsymbol{R}),\forall w_2\in y(\psi,\boldsymbol{R})$满足 $w_1\boldsymbol{R}w_2,x,y\in\{M,m\}$.

其中,对任意公式ϕ,定义 $M(\phi,\boldsymbol{R})=\{w|M,w\models\phi$,且对于任意 $w'\in W$,如果 $M,w'\models\phi$则 $w\boldsymbol{R}w'\}$,$m(\phi,\boldsymbol{R})=\{w|M,w\models\phi$,且对于任意 $w'\in W$,如果 $M,w'\models\phi$则 $w'\boldsymbol{R}w\}$.

1.3 小 结

通过剔除 von Wright 合取扩展原理的限制,MPL 逻辑中逻辑偏好定义表达能力更强,MPL 作为一个逻辑系统,为构造实际偏好推理系统提供了坚实的基础,但是,MPL 的逻辑偏好定义建立在全前序偏好结构上,不能表示不完全偏好信息,与常见偏好定义相比具有极大的局限性,由此带来了 3 个最基本的研究内容:

① 如何将 MPL 的语义扩展到偏好结构上来,即三元组 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$中 $\boldsymbol{R}$ 是偏序的情况;

② 扩展后的 MPL 表达能力如何;

③ 扩展后,MPL 的可计算性,例如可满足性检测问题的可计算性质.

2 多偏好逻辑GMPL

2.1 更一般的逻辑偏好定义

显然,MPL 无法表示和推理更常见的不完全偏好.在此,重新划分 agent“ϕ偏好于ψ”的 4 种认知情况如下:

- 有限乐观(locally optimistic):用⟦ϕ⟧中某些元素与⟦ψ⟧的全部元素作比较.
- 有限悲观(locally pessimistic):用⟦ϕ⟧全部元素与⟦ψ⟧中某些元素比较.
- 投机(opportunistic):用⟦ϕ⟧中某些元素与⟦ψ⟧中某些元素作比较.
- 谨慎(careful):用⟦ϕ⟧的全部元素与⟦ψ⟧的全部元素作比较.

给定命题逻辑语言指派集 W 上的偏好关系 $\boldsymbol{R}$,定义 4 种逻辑偏好:

1. $\phi^\forall\geq^\forall\psi\Leftrightarrow\forall w\in⟦\phi⟧,\forall w'\in⟦\psi⟧$有$w\boldsymbol{R}w'$.
2. $\phi^\forall\geq^\exists\psi\Leftrightarrow\forall w\in⟦\phi⟧,\exists w'\in⟦\psi⟧$有$w\boldsymbol{R}w'$.
3. $\phi^\exists\geq^\forall\psi\Leftrightarrow\exists w\in⟦\phi⟧,\forall w'\in⟦\psi⟧$有$w\boldsymbol{R}w'$.
4. $\phi^\exists\geq^\exists\psi\Leftrightarrow\exists w\in⟦\phi⟧,\exists w'\in⟦\psi⟧$有$w\boldsymbol{R}w'$.

显然,通过引入存在量词和全程量词,在上述 4 种认知情况划分和逻辑偏好定义中,无须求“最差”或“最好”,亦即偏好关系 $\boldsymbol{R}$ 并不要求必须满足完全性.当 $\boldsymbol{R}$ 是全前序时,易知:

$$\phi^M\geq^m\psi\Leftrightarrow\phi^\forall\geq^\forall\psi,$$

$$\phi^m\geq^m\psi\Leftrightarrow\phi\wedge^\forall\geq^\exists\psi,$$

$$\phi^{M}\geq^{M}\psi\Leftrightarrow\phi^{\exists}\geq^{\forall}\psi,$$
$$\phi^{m}\geq^{m}\psi\Leftrightarrow\phi^{\exists}\geq^{\exists}\psi.$$

因此,与 MPL 偏好比较,该偏好定义更一般,能够表示不完全前序偏好上的 4 类认知情况.

2.2 语 言

基于命题逻辑,引入 ${}^{\forall}\geq^{\forall},{}^{\forall}\geq^{\exists},{}^{\exists}\geq^{\forall},{}^{\exists}\geq^{\exists}$作为偏好逻辑算子,给定有限布尔变量集 $VAR=\{p_1,\dots,p_n\}$,则 GMPL 逻辑的语言、语义和证明系统定义如下.值得注意的是,GMPL 逻辑语言 L_{GMPL} 并非仅仅是把 MPL 逻辑语言偏好逻辑算子作了替换,而且从知识表示的角度出发将 MPL 逻辑语言中难以直观解释的迭代偏好式剔除.其一是命题逻辑公式集 L_0,其二是逻辑偏好公式集 L_1.形式定义如下:

- $p_i\in L_0$,且如果$\phi_0,\psi_0\in L_0$,则$\neg\phi_0\in L_0,\phi_0\wedge\psi_0\in L_0$.
- 如果 $\phi_0,\psi_0\in L_0$,则 $\phi_0{}^{\forall}\geq^{\forall}\psi_0\in L_1,\phi_0{}^{\forall}\geq^{\exists}\psi_0\in L_1,\phi_0{}^{\exists}\geq^{\forall}\psi_0\in L_1,\phi_0{}^{\exists}\geq^{\exists}\psi_0\in L_1,\langle S\rangle\phi_0\in L_1,\langle U\rangle\phi_0\in L_1$;另外,如果 $\phi_1,\psi_1\in L_1$,则$\neg\phi_1\in L_1,\phi_1\wedge\psi_1\in L_1$.
- 其他经典命题逻辑算子如$\rightarrow,\vee,\leftrightarrow$以及一元逻辑符号 $\top,\bot$等可通过算子$\neg$和$\wedge$定义,方法与命题逻辑相同,$\neg$优先级高于偏好逻辑算子,偏好逻辑算子优先级高于$\wedge$,$\langle S\rangle$和$\langle U\rangle$优先级高于$\wedge$而低于$\neg$,此外,用括号表示优先.

其中,$\langle S\rangle\phi_0$ 表示“ϕ_0 是可解释的”,$\langle U\rangle\phi_0$ 表示“ϕ_0 的解释是唯一的”.

2.3 语 义

GMPL 的模型定义为偏好结构 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,其中 VAR 是有限布尔变量集,W 是 VAR 上的指派集,$\boldsymbol{R}$ 是定义在 W 上的偏好关系.给定任意$\phi\in L_{GMPL}$,$M\models\phi$表示ϕ在 M 中解释为真.如果记任意 $w\in W$ 为 VAR 的子集形式使得 $p_i\in w$ 当且仅当 p_i 为真,那么 $W=2^{VAR}$.首先定义 L_0 公式在 w 上的满足性如下:

- $M,w\models p_i$ 当且仅当 $p_i\in w$.
- $M,w\models\neg\phi_0$ 当且仅当 $M,w\models\phi_0$ 不成立.
- $M,w\models\phi_0\wedge\psi_0$ 当且仅当 $M,w\models\phi_0$ 且 $M,w\models\psi_0$.

记$[\![\phi_0]\!]=\{w|M,w\models\phi_0\}$,定义$L_1$ 公式在M上的满足性如下:

- $M=\phi_0{}^{\forall}\geq^{\forall}\psi_0$ 当且仅当$\forall w\in[\![\phi_0]\!],\forall w'\in[\![\psi_0]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'$.
- $M\models\phi_0{}^{\forall}\geq^{\exists}\psi_0$ 当且仅当$\forall w\in[\![\phi_0]\!],\exists w'\in[\![\psi_0]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'$.
- $M\models\phi_0{}^{\exists}\geq^{\forall}\psi_0$ 当且仅当$\exists w\in[\![\phi_0]\!],\forall w'\in[\![\psi_0]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'$.
- $M\models\phi_0{}^{\exists}\geq^{\exists}\psi_0$ 当且仅当$\exists w\in[\![\phi_0]\!],\exists w'\in[\![\psi_0]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'$.
- $M\models\neg\phi_1$ 当且仅当 $M\models\phi_1$ 不成立.
- $M\models\phi_1\wedge\psi_1$ 当且仅当 $M\models\phi_1$ 且 $M\models\psi_1$.
- $M\models\langle S\rangle\phi_0$ 当且仅当$|[\![\phi_0]\!]|\neq0$.
- $M\models\langle U\rangle\phi_0$ 当且仅当$|[\![\phi_0]\!]|=1$.

显然,$\langle S\rangle\phi_0$ 表示“ϕ_0 能够表达一些指派”,$\langle U\rangle\phi_0$ 表示“ϕ_0 仅能表达一个指派”.

2.4 证明系统

随着 $\boldsymbol{R}$ 的不同,4 个逻辑偏好表现的特征和转换关系也不同,与 MPL 相同,把偏好算子 ${}^{X}\geq^{Y}$ 看作命题逻辑合式公式之间的偏好关系,本质上反映了 $\boldsymbol{R}$ 确定的 2^{W} 上的关系 $\boldsymbol{R}_{XY}$:对任意 $A,B\subseteq W,A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 当且仅当 $Xw\in A,Yw'\in B$ 满足 $w\boldsymbol{R}w'$,其中 $X,Y\in\{\forall,\exists\}$.通过考察 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 可知,偏好算子 ${}^{X}\geq^{Y}$ 特征及其转换关系:

1. ${}^{X}\geq^{Y}$特征

通过考察 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 的自反性、传递性、完全性得到对应算子 ${}^{X}\geq^{Y}$ 的相应性质.

2. ${}^{X}\geq^{Y}$ 转换关系考察

通过对以下 3 个推理模式下 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 间的转化关系,考察对应算子 ${}^{X}\geq^{Y}$ 间的转换关系:

(1) $\subseteq$模式:该模式考察候选项类的“大”“小”变化对 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 的影响.

- 如果 $C\subseteq A$ 且 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $C\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$;
- 如果 $C\subseteq B$ 且 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}C$;
- 如果 $A\subseteq C$ 且 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $C\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$;
- 如果 $B\subseteq C$ 且 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}C$.

(2) $\cap$模式:该模式考察候选项类通过$\cap$运算的“大”“小”变化对 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 的影响.

- 如果$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $C\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$ 和 $A\boldsymbol{R}_{X''Y''}B$;
- 如果 $A\boldsymbol{R}_{XY}(B\cap C)$,考察 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}C$ 和 $A\boldsymbol{R}_{X''Y''}B$;
- 如果 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$ 和$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{X''Y''}B$;
- 如果 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}(B\cap C)$和 $A\boldsymbol{R}_{X''Y''}(B\cap C^c)$.

(3) $\cup$模式:该模式考察候选项类通过$\cup$运算的“大”“小”变化对 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 的影响.

- 如果$(A\cup C)\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $C\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$ 和 $A\boldsymbol{R}_{X''Y''}B$;
- 如果 $A\boldsymbol{R}_{XY}(B\cup C)$,考察 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}C$ 和 $A\boldsymbol{R}_{X''Y''}B$;
- 如果 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察$(A\cup C)\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$ 和$(A\cup C^c)\boldsymbol{R}_{X''Y''}B$;
- 如果 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$,考察 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}(B\cup C)$和 $A\boldsymbol{R}_{X''Y''}(B\cup C^c)$.

由于$\subseteq,\cap,\cup$和补运算^{c}之间的相关性,上述各类偏好的操作模式下的结论并非独立的,它们之间具有因果关系,可以归结[**]为仅采用$\subseteq,\cap$和补运算^{c}下的几条性质.

依照上述模式,对$^X\geq^Y$特征及其转换关系进行L_{GMPL}描述即可得到相应证明系统.以基于全前序偏好结构(即M中$\boldsymbol{R}$为全前序[***])的GMPL证明系统和基于偏序的偏好结构(即M中$\boldsymbol{R}$为偏序[****])的GMPL证明系统为例加以说明.

2.4.1 基于全前序的 GMPL 证明系统

根据作用的不同,基于全前序偏好结构的 GMPL 证明系统可以分为经典命题逻辑公理、偏好性质公理、4 种逻辑偏好算子的转换公理和分离规则四部分.

基于全前序偏好结构的 GMPL 证明系统.

- 经典命题逻辑公理

  Taut 命题逻辑重言式.

- 偏好性质公理

  Sat $\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\to\langle S\rangle\phi_0\wedge\langle S\rangle\psi_0$,其中 $X,Y\in\{\exists,\forall\}$.

  Bas $\langle U\rangle\phi_0\wedge\langle U\rangle\psi_0\to(\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\leftrightarrow\phi_0{}^{X'}\geq^{Y'}\psi_0)$,其中 $X,Y,X',Y'\in\{\exists,\forall\}$.

  Lin $\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\wedge\psi_0{}^X\geq^Y\chi_0\to\phi_0{}^X\geq^Y\chi_0$,其中 $XY\in\{\forall\forall,\exists\forall,\forall\exists\}$.

  Ref $\langle S\rangle\phi_0\to\phi_0{}^X\geq^Y\phi_0$,其中 $XY\in\{\exists\exists,\exists\forall,\forall\exists\}$.

  Com $\langle S\rangle\phi_0\wedge\langle S\rangle\psi_0\to\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\vee\phi_0{}^{X'}\geq^{Y'}\psi_0$,其中 $XY\in\{\exists\exists,\exists\forall,\forall\exists\}$.

- 多偏好转换规则

  RedL $\phi_0\to\chi_0\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\Rightarrow\chi_0{}^{X'}\geq^{Y'}\psi_0$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\forall\exists,\exists\exists),(\forall\forall,\exists\forall),(\exists\forall,\exists\forall),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

  RedR $\psi_0\to\chi_0\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\Rightarrow\phi_0{}^{X'}\geq^{Y'}\chi_0$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\exists\forall,\exists\exists),(\forall\forall,\forall\exists),(\forall\exists,\forall\exists),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

  ExtL $\langle S\rangle\chi_0\chi_0\to\phi_0\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\Rightarrow\chi_0{}^X\geq^Y\psi_0$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\forall\forall\}$.

  ExtR $\langle S\rangle\chi_0\chi_0\to\psi_0\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\Rightarrow\phi_0{}^X\geq^Y\chi_0$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\forall\forall\}$.

  ConL $\phi_0{}^X\geq^Y\psi_0\Rightarrow(\chi_0\wedge\phi_0)^X\geq^Y\psi_0\vee(\neg\chi_0\wedge\phi_0)^X\geq^Y\psi_0$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\exists\exists\}$.

** 在此,归结过程是在按顺序考察 3 种模式的基础上,尽量采用先得到的结论推导后面模式的结论,然后把所有能够用先前的结论推出的结论去掉,限于篇幅,这里不再赘述.

*** 全前序是自反、传递、完全的关系.

**** 偏序是自反、传递、反对称的关系.

ConR $\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow\phi_0{}^X\!\geq^Y(\gamma_0\wedge\psi_0)\vee\phi_0{}^X\!\geq^Y(\neg\gamma_0\wedge\psi_0)$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\exists\exists\}$.

- 分离规则

Mp $\phi,\phi\rightarrow\psi\Rightarrow\psi$.

Taut 公理和 MP 规则说明 GMPL 是经典命题逻辑上的扩展.

从集合论的角度看,Sat 表明如果 W 的两个子集可比,那么它们非空.Bas 表明,如果 W 的两个子集的模都是 1,那么它们之间的偏好关系 $\boldsymbol{R}_{XY}$ 就是它们各自元素之间的偏好关系 $\boldsymbol{R}$.Lin 意味着${}^\forall\!\geq^\forall$,${}^\exists\!\geq^\forall$,${}^\forall\!\geq^\exists$是传递的,Ref 意味着${}^\exists\!\geq^\forall$,${}^\forall\!\geq^\exists$,${}^\exists\!\geq^\exists$是自反的.Comp 表明${}^\exists\!\geq^\forall$和${}^\exists\!\geq^\exists$是完全的.

RedL,RedR,ExtL,ExtR 揭示了 ${}^X\!\geq^Y$ 前后项描述范围的变化导致的偏好关系转化关系.ConL,ConR 则是由合取运算导致的偏好变化.

定理 1. 基于全前序的 GMPL 证明系统合理且完备.

证明:见附录. □

2.4.2 基于偏序的 GMPL 证明系统

基于偏序证明系统可以分为同样的 4 个部分,它与基于全前序证明系统的差别在于没有完全公理 Com,并且仅有${}^\exists\!\geq^\exists$和${}^\forall\!\geq^\exists$满足自反公理 Ref,此外增加了反对称公理 Dsy.

基于偏前序偏好结构的 GMPL 证明系统.

- 经典命题逻辑公理

Taut 命题逻辑重言式.

- 偏好性质公理

Sat $\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\rightarrow\langle S\rangle\phi_0\wedge\langle S\rangle\psi_0$,其中 $X,Y\in\{\exists,\forall\}$.

Bas $\langle U\rangle\phi_0\wedge\langle U\rangle\psi_0\rightarrow(\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\leftrightarrow\phi_0{}^{X'}\!\geq^{Y'}\psi_0)$,其中 $X,Y,X',Y'\in\{\exists,\forall\}$.

Lin $\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\wedge\psi_0{}^X\!\geq^Y\gamma_0\rightarrow\phi_0{}^X\!\geq^Y\gamma_0$,其中 $XY\in\{\forall\forall,\exists\forall,\forall\exists\}$.

Ref $\langle S\rangle\phi_0\rightarrow\phi_0{}^X\!\geq^Y\phi_0$,其中 $XY\in\{\exists\exists,\forall\exists\}$.

Dsy $\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\rightarrow\neg(\psi_0{}^X\!\geq^Y\phi_0)$,其中 $XY\in\{\forall\forall\}$.

- 多偏好转换规则

RedL $\phi_0\rightarrow\gamma_0\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow\gamma_0{}^{X'}\!\geq^{Y'}\psi_0$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\forall\exists,\exists\exists),(\forall\forall,\exists\forall),(\exists\forall,\exists\forall),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

RedR $\psi_0\rightarrow\gamma_0\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow\phi_0{}^{X'}\!\geq^{Y'}\gamma_0$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\exists\forall,\exists\exists),(\forall\forall,\forall\exists),(\forall\exists,\forall\exists),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

ExtL $\langle S\rangle\gamma_0\gamma_0\rightarrow\phi_0\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow\gamma_0{}^X\!\geq^Y\psi_0$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\forall\forall\}$.

ExtR $\langle S\rangle\gamma_0\gamma_0\rightarrow\psi_0\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow\phi_0{}^X\!\geq^Y\gamma_0$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\forall\forall\}$.

ConL $\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow(\gamma_0\wedge\phi_0){}^X\!\geq^Y\psi_0\vee(\neg\gamma_0\wedge\phi_0){}^X\!\geq^Y\psi_0$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\exists\exists\}$.

ConR $\phi_0{}^X\!\geq^Y\psi_0\Rightarrow\phi_0{}^X\!\geq^Y(\gamma_0\wedge\psi_0)\vee\phi_0{}^X\!\geq^Y(\neg\gamma_0\wedge\psi_0)$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\exists\exists\}$.

- 分离规则

Mp $\phi,\phi\rightarrow\psi\Rightarrow\psi$.

定理 2. 基于偏序的 GMPL 证明系统合理且完备.

证明:见附录. □

3 常见逻辑偏好定义的GMPL重写

通过对最大满足和最大不满足两种偏好策略下分级知识库的重写,文献[7]初步揭示了 MPL 具有较强的表示能力.在此基础上,通过 4 种常见逻辑偏好定义的 L_{GMPL} 重写进一步表明 GMPL 适于表示和推理很多决策问题中的偏好现象.4 种常见逻辑偏好定义如下:

- 条件愿望$I(\phi|\psi)$[11](称作“在条件ψ下,agent的愿望是ϕ”):基于全前序$\boldsymbol{R}$,$I(\phi|\psi)$当且仅当对$\forall w_0\in\{w\in[\![\psi]\!]|\forall w'\in[\![\psi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}$都有$w_0\vDash\phi$.
- 条件偏好$\phi\!\Rightarrow\!\psi\gamma$[12](称作“在条件$\phi$下,agent偏爱$\psi$胜过$\gamma$”):基于偏序$\boldsymbol{R}$,$\phi\!\Rightarrow\!\psi\gamma$当且仅当对$\forall w\in[\![\phi\wedge\psi]\!]$和

$\forall w'\in[\![\phi\wedge\gamma]\!]$都有$w\boldsymbol{R}w'$.

- 理性偏好$\phi>\psi$[13](表示两个候选项集上的理性偏好关系就是它们各自的最好项之间的偏好关系):基于全前序$\boldsymbol{R}$,$\phi>\psi$当且仅当对$\forall w_0\in\{w\in[\![\phi]\!]|\forall w'\in[\![\phi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}$和$\forall w_1\in\{w\in[\![\psi]\!]|\forall w'\in[\![\psi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}$都有$w_0\boldsymbol{R}w_1$且$\neg(w_1\boldsymbol{R}w_0)$.
- 相对相似$\phi>>\psi$[3](用来定义相似性程度的高低):基于偏序$\boldsymbol{R}$,$\phi>>\psi$当且仅当对$\forall w_1\in[\![\psi]\!]$,$\exists w_0\in[\![\phi]\!]$满足$w_0\boldsymbol{R}w_1$.

定理 3. (1) 基于全前序偏好结构,$I(\phi|\psi)$可以重写为$\neg((\neg\phi\wedge\psi)^{\exists}\geq^{\forall}(\phi\wedge\psi))$.

(2) 基于偏序偏好结构,$\phi\Rightarrow\psi\gamma$可以重写为$(\phi\wedge\psi)^{\forall}\geq^{\forall}(\phi\wedge\gamma)$.

(3) 基于全前序偏好结构,$\phi>\psi$可以重写为$\phi^{\exists}\geq^{\forall}\psi\wedge\neg(\psi^{\exists}\geq^{\forall}\phi)$.

(4) 基于偏序偏好结构,$\phi>>\psi$可以重写为$\langle U\rangle\gamma\wedge(\gamma\mapsto\psi)\to\phi^{\exists}\geq^{\forall}\psi$.

证明:见附录. □

4 GMPL的可满足性检测

GMPL 的可满足性检测(SAT)问题就是给定一个 GMPL 合式公式ϕ,基于一个 GMPL 证明系统(如基于全前序的GMPL证明系统,或基于偏序的GMPL证明系统),检验是否存在一个偏好结构M,满足$M\models\phi$.如果$\phi\in L_0$,那么 GMPL 的 SAT 问题就是命题逻辑的 SAT 问题.本节提出一个 GMPL 推理过程,能够将$\phi\in L_1$的可满足性检测也归结为命题逻辑的 SAT 问题.首先提出一个相关定义和两个引理,并提出归结方法,然后通过一个实例来说明.

定义 1(完全偏好式). 称形如$\phi^{x}\geq^{Y}\psi$的式子为偏好式,如果ϕ和ψ都是 VAR 上的完全合取式,则称其为完全偏好式.

引理 1(GMPL 的合取扩展原理).

(1) $\langle S\rangle(\phi\wedge\gamma)\wedge\langle S\rangle(\phi\wedge\neg\gamma)\wedge\phi^{x}\geq^{Y}\psi\to(\phi\wedge\gamma)^{x}\geq^{Y}\psi\wedge(\phi\wedge\neg\gamma)^{x}\geq^{Y}\psi$,其中$XY\in\{\forall\forall,\forall\exists\}$.

(2) $\langle S\rangle(\psi\wedge\gamma)\wedge\langle S\rangle(\psi\wedge\neg\gamma)\wedge\phi^{x}\geq^{Y}\psi\to\phi^{x}\geq^{Y}(\psi\wedge\gamma)\wedge\phi\wedge^{x}\geq^{Y}(\psi\wedge\neg\gamma)$,其中$XY\in\{\forall\forall,\exists\forall\}$.

证明:见附录. □

引理 2(GMPL 的析取扩展原理).

(1) $\langle S\rangle\phi\wedge\langle S\rangle\gamma\wedge(\phi\vee\gamma)^{x}\geq^{Y}\psi\to\phi^{x}\geq^{Y}\psi\wedge\gamma^{x}\geq^{Y}\psi$,其中$XY\in\{\forall\forall,\forall\exists\}$.

(2) $\langle S\rangle\psi\wedge\langle S\rangle\gamma\wedge\phi^{x}\geq^{Y}(\psi\vee\gamma)\to\phi^{x}\geq^{Y}\psi\wedge\phi\wedge^{x}\geq^{Y}\gamma$,其中$XY\in\{\forall\forall,\exists\forall\}$.

(3) $\langle S\rangle\phi\wedge\langle S\rangle\gamma\wedge(\phi\vee\gamma)^{x}\geq^{Y}\psi\to\phi^{x}\geq^{Y}\psi\vee\gamma^{x}\geq^{Y}\psi$,其中$XY\in\{\exists\forall\}$.

(4) $\langle S\rangle\psi\wedge\langle S\rangle\gamma\wedge\phi^{x}\geq^{Y}(\psi\vee\gamma)\to\phi^{x}\geq^{Y}\psi\vee\phi\wedge^{x}\geq^{Y}\gamma$,其中$XY\in\{\forall\exists\}$.

证明:见附录. □

归结方法:给定$\lambda\in L_1$.

第 1 步.对λ中形如$\langle S\rangle\phi$或$\langle U\rangle\phi$的式子看作一个新命题变量;

第 2 步.将偏好式化为完全偏好式:

(1) 采用摩根定律消除$\neg$:把偏好表达式中形如$\neg(\phi\wedge\psi)$的项化为$\neg\phi\vee\psi$;

(2) 采用析取扩展原理消除所有偏好表达式中的析取算子$\vee$;

(3) 采用合取扩展原理和转换公理将偏好表达式化为完全偏好式;

(4) 根据 Bas 公理,逻辑偏好算子归一化.

第 3 步.基于偏好性质公理,做一致性检查:

(1) 把每个完全偏好式也看作一个新命题变量;

(2) 对命题变量按照如下原则赋 true 或 false 值:

1) 如果证明系统中自反公理成立,则$\phi^{X}\geq^{Y}\phi$为 true;如果 $\boldsymbol{R}$ 是反自反的,则$\phi^{X}\geq^{Y}\phi$为 false.

2) 如果证明系统中传递公理成立,当$\phi^{X}\geq^{Y}\psi$赋值和$\psi^{X}\geq^{Y}\gamma$赋值都为 true 时,则$\phi^{X}\geq^{Y}\gamma$赋值也为 true.

3) 如果证明系统中反对称公理成立,$\phi^{X}\geq^{Y}\psi$为 true,则$\psi^{X}\geq^{Y}\phi$赋值为 false;

4) 如果ϕ在命题逻辑下可满足,则$\langle S\rangle\phi$为 true,否则为 false;如果ϕ在命题逻辑下的解释唯一,则$\langle U\rangle\phi$为 true,否则为 false.

(3) 通过计算真值表(值得注意的是,此时$\langle S\rangle\phi$或$\langle U\rangle\phi$的真假值是确定的)等命题逻辑 SAT 问题解决方法检验一致性.

定理 4. GMPL 的可满足性检测是 NP 完全的.

证明:见附录. □

例:设 p 和 q 分别代表“涨工资”和“降房价”,那么“涨工资总比不涨工资好,并且有些情况下降房价比不降房价而只涨工资也好”就可以表示为 $p^{\forall}\geq^{\forall}\neg p\wedge q^{\exists}\geq^{\forall}\neg(q\wedge\neg p)$.令 $VAR=\{p,q\}$,ϕ为 $p^{\forall}\geq^{\forall}\neg p\wedge q^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\vee p)$,那么$\phi$的可满足性检测过程如下:

第 1 步.将偏好表达式化为完全偏好式.

(1) 采用摩根定律将$\neg(q\wedge\neg p)$化为$(\neg q\vee p)$得到 $p^{\forall}\geq^{\forall}\neg p\wedge q^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\vee p)$;

(2) 采用析取扩展原理消除所有析取算子$\vee$.

采用析取扩展原理(2),ϕ转化为 $p^{\forall}\geq^{\forall}\neg p\wedge q^{\exists}\geq^{\forall}\neg q\wedge q^{\exists}\geq^{\forall}p$.

(3) 采用合取扩展原理和转换公理.设有偏好公式$\gamma^{X}\geq^{Y}\psi$,如果存在 $v\in VAR$ 且 v 没有出现在γ或ψ中,则采用合取扩展原理或 ConL,ConR 公理添加 v,直到所有命题变量都出现在偏好算子两边为止.

1) 对 $p^{\forall}\geq^{\forall}\neg p$,采用合取扩展原理(1),则有$(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}\neg p\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}\neg p$,再对$(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}\neg p$ 和$(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}\neg p$ 分别采用合取扩展原理(2),则有$(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge q)\wedge(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge q)\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge\neg q)$.

2) 对 $q^{\exists}\geq^{\forall}\neg q$,首先采用 ConL,得到$(q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}\neg q\vee(q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}\neg q$,再对$(q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}\neg q$ 和$(q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}\neg q$ 分别采用合取扩展原理(2),则有$((q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge\neg p))\vee((q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge\neg p))$.

3) 同 2),把 $q^{\exists}\geq^{\forall}p$ 转化为$((q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(q\wedge p))\vee((q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(q\wedge p))$.

4) 综上,ϕ转化为$(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge q)\wedge(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge q)\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge\neg q)\wedge(((q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge\neg p))\vee((q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge\neg p)))\wedge(((q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge p)^{\exists}\geq^{\forall}(q\wedge p))\vee((q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge\neg p)^{\exists}\geq^{\forall}(q\wedge p)))$.

(4) 根据 Bas 公理,逻辑偏好算子归一化.

采用 Bas,ϕ转化为$(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge q)\wedge(p\wedge q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge q)\wedge(p\wedge\neg q)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg p\wedge\neg q)\wedge(((q\wedge p)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge p)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg q\wedge\neg p))\vee((q\wedge\neg p)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge\neg p)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg q\wedge\neg p)))\wedge(((q\wedge p)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge p)^{\forall}\geq^{\forall}(q\wedge p))\vee((q\wedge\neg p)^{\forall}\geq^{\forall}(\neg q\wedge p)\wedge(q\wedge\neg p)^{\forall}\geq^{\forall}(q\wedge p)))$.

\\令 a_{11} 表示 $p\wedge q$,a_{10} 表示 $p\wedge\neg q$,a_{01} 表示$\neg p\wedge q$,a_{00} 表示$\neg p\wedge\neg q$,则ϕ简记为 $a_{11}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{01}\wedge a_{11}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{00}\wedge a_{10}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{01}\wedge a_{10}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{00}\wedge((a_{11}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{10}\wedge a_{11}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{00})\vee(a_{01}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{10}\wedge a_{01}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{00}))\wedge((a_{11}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{10}\wedge a_{11}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{11})\vee(a_{01}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{10}\wedge a_{01}{}^{\forall}\geq^{\forall}a_{11}))$

第 2 步.基于偏好性质公理的一致性检查.

(1) 把每个完全偏好式看作一个新命题变量.

(2) 对命题变量按照如下原则赋 true 或 false 值.

1) 如果证明系统中自反公理成立,则$\phi^{X}\geq^{Y}\phi$为 true;如果 $\boldsymbol{R}$ 是反自反的,则$\phi^{X}\geq^{Y}\phi$为 false.

2) 如果证明系统中传递公理成立, $\phi^{X}\geq^{Y}\psi$赋值和$\psi^{X}\geq^{Y}\gamma$赋值都为 true,则$\phi^{X}\geq^{Y}\gamma$赋值也为 true.

3) 如果证明系统中反对称公理成立,$\phi^{X}\geq^{Y}\psi$为 true,则$\psi^{X}\geq^{Y}\phi$赋值为 false.

(3) 通过命题逻辑 SAT 问题解决方法,如计算真值表等方法来检验一致性.

经过第 2 步,易验证,ϕ在基于全前序的 GMPL 证明系统中是一致的(即存在全前序偏好结构 M,满足 $M\models\phi$),ϕ在基于偏序的 GMPL 证明系统中也是一致的(即存在偏序偏好结构 M,满足 $M\models\phi$).图 1 所示为一个满足ϕ的全前序偏好结构,图 2 所示为满足ϕ的一个偏序偏好结构.

5 结论和展望

本文从知识表示和推理的角度出发,在 MPL 逻辑基础上提出了更一般的逻辑偏好定义,且构造了能够表示和推理不完全偏好的多偏好逻辑系统 GMPL,给出了构造 GMPL 证明系统的模式,并以基于全前序偏好结构的 GMPL 证明系统和基于偏序的偏好结构的 GMPL 证明系统的构造为例进行了说明.诸如基于偏序,严格线序等偏好结构的 GMPL 证明系统也可在此模式下构造.然后,通过对常见逻辑偏好定义的重写,展示了 GMPL 的表达能力和实际应用前景.最后通过将 GMPL 的可满足性检测归结为命题逻辑 SAT 问题,证明了 GMPL 的可满足性检测问题是 NP 完全的.为进一步设计实现相关推理算法提供了基础.GMPL 推理的逻辑程序设计和实现将是进一步的工作内容.

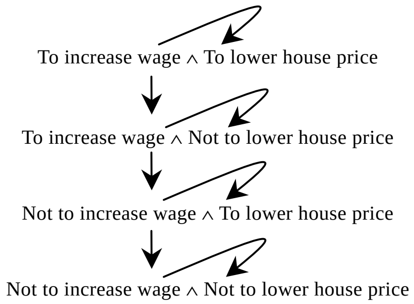

Fig.1 Total pre-order structure satisfying ϕ
图 1 ϕ的一个全前序偏好结构模型

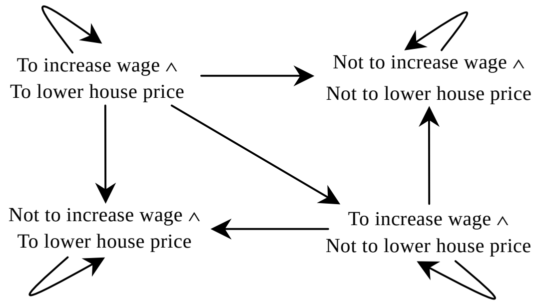

Fig.2 Partial pre-order structure satisfying ϕ
图 2 ϕ的一个偏序偏好结构模型

References:

[1] Brewka G. A rank based description language for qualitative preferences. In: Saitta L, ed. Proc. of the 16th European Conf. on Artificial Intelligence. Valencia: IOS Press, 2004. 303−307.

[2] Dyle J. Prospects for preferences. Computational Intelligence, 2004,20(2):111−136.

[3] Halpern JY. Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structure. Journal of Artificial Intelligence Research, 1997, 7:1−24.

[4] Öztürk M, Tsoukiàs A, Vincke P. Preference modelling. In: Ehrgott M, Greco S, Figueira J, eds. State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 27−72.

[5] Kaci S, van der Torre L. Algorithms for a nonmonotonic logic of preferences. In: Godo L, ed. Proc. of the 8th European Conf. on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty. 2005. 281−292.

[6] Kaci S, van der Torre L. Non-Monotonic reasoning with various kinds of preferences. In: Brafman R, Junker U, eds. Proc. of Multidisciplinary IJCAI 2005 Workshop on Advances in Preference Handling. 2005. 112−117.

[7] von Wright GH. The logic of preference reconsidered. Theory and Decision, 1972,3(2):140−169.

[8] van Benthem J, van Otterloo S, Roy O. Preference logic, conditionals and solution concepts in games. In: Lagerlund H, Lindstrom S, Sliwinski R, eds. Modality Matters: 25 Essays in Honour of Krister Segerberg. Uppsala: University of Uppsala, 2006. 61−76.

[9] Brewka G. A rank based description language for qualitative preferences. In: Saitta L, ed. Proc. of the 16th European Conf. on Artificial Intelligence. Valencia: IOS Press, 2004. 303−307.

[10] Zhang ZZ, Xing HC, Wang ZZ, Ni QJ. A preference logic based on various kinds of preferences. Journal of Software, 2007,18(11):2728−2739 (in Chinese with English abstract). http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2728.htm

[11] Boutilier, C. Toward a logic for qualitative decision theory. In: Proc. of the 4th Int'l Conf. on Principle of Knowledge Representation and Reasoning. 1994. 75−86.

[12] Lang J, van der Torre L, Weyder E. Hidden uncertainty in the logical representation of desires. In: Gottlob T, Walsh T, eds. Proc. of the IJCAI 2003. Acapulco: Morgan Kaufmann Publishers, 2003. 685−690.

[13] Freund M. On the revision of preferences and rational inference process. Artificial Intelligence, 2004,152(1):105−139.

附中文参考文献:

[10] 张志政,邢汉承,王蓁蓁,倪庆剑.一个基于多类型偏好的偏好逻辑.软件学报,2007,18(11):2728−2739. http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2728.htm

附录. 定理的证明

1. 定理 1 的证明

(1) 合理性证明.只要证明公理在语义下是正确的.给定基于全前序的偏好结构 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$.

1) Taut,Sat,Bas,Mp 显然成立.

2) 根据第 2.3 节公理构造方法的说明,证明 Lin 只要证明 $\boldsymbol{R}_{\forall\forall},\boldsymbol{R}_{\exists\forall},\boldsymbol{R}_{\forall\exists}$是传递的.

3) 证明 Ref 只要证明 $\boldsymbol{R}_{\exists\exists},\boldsymbol{R}_{\exists\forall},\boldsymbol{R}_{\forall\exists}$是自反的.

4) 证明 Com 只要证明 $\boldsymbol{R}_{\exists\exists},\boldsymbol{R}_{\exists\forall},\boldsymbol{R}_{\forall\exists}$是完全的.

5) 证明 RedL 只要由 $A\subseteq C$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $C\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\forall\exists,\exists\exists),(\forall\forall,\exists\forall),(\exists\forall,\exists\forall),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

6) 证明 RedR 只要由 $B\subseteq C$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}C$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\exists\forall,\exists\exists),(\forall\forall,\forall\exists),(\forall\exists,\forall\exists),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

7) 证明 ExtL 只要由 C 非空,$C\subseteq A$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $C\boldsymbol{R}_{XY}B$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\forall\forall\}$.

8) 证明 ExtR 只要由 C 非空,$C\subseteq B$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $A\boldsymbol{R}_{XY}C$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\forall\forall\}$.

9) 证明 ConL 只要由 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{XY}B$ 和$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{XY}B$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\exists\exists\}$.

10) 证明 ConL 只要由 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $A\boldsymbol{R}_{XY}(B\cap C)$和 $A\boldsymbol{R}_{XY}(B\cap C^c)$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\exists\exists\}$.

从上述集合论角度证明系统的合理性,过程比较简单,在此不再赘述.

(2) 完备性证明.证明系统是完备的当且仅当关于全前序偏好结构有效的公式,在该证明系统都是可证的.为此,只要证明对于每个协调公式ϕ,都存在一个偏好模型,使得ϕ在这个模型中是可满足的,进而只要证明对于极大协调集 S_m,可以构造 M,使得 $M\models\gamma$当且仅当$\gamma\in S_m$.因为该证明系统的公理和规则是直接建立在命题逻辑重言式和基于全前序性质和操作的基础上的,所以只要构造模型 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,使得 $\boldsymbol{R}$ 是全前序即可.令 $S^P=\{\alpha\,{}^X\!\geq^Y\beta\in S_m|\alpha,\beta$是完全合取式$\}$,构造 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$:$W=2^{VAR}$ 可以表示为完全合取式集合,即 $W=\{\gamma|\gamma$是完全合取式$\}$,$\boldsymbol{R}=\{(\alpha,\beta)|\alpha\,{}^X\!\geq^Y\beta\in S^P\}$,亦即 $\alpha\boldsymbol{R}\beta\Leftrightarrow\alpha^X\!\geq^Y\beta\in S^P$.根据 Bas,有 $\boldsymbol{R}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\forall\!\geq^\forall\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\exists\!\geq^\forall\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\forall\!\geq^\exists\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\exists\!\geq^\exists\beta\in S^P\}$,再根据序偏好性质公理 Lin,Ref,Com,容易推出 $\boldsymbol{R}$ 必然满足自反性、传递性和完全性,因而 $\boldsymbol{R}$ 是全前序.

2. 定理 2 的证明

(1) 合理性证明.只要证明公理在语义下是正确的.给定基于偏序的偏好结构 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$.

1) Taut,Sat,Bas,Mp 显然成立.

2) 根据第 2.3 节公理构造方法的说明,证明 Lin 只要证明 $\boldsymbol{R}_{\forall\forall},\boldsymbol{R}_{\exists\forall},\boldsymbol{R}_{\forall\exists}$是传递的.

3) 证明 Ref 只要证明 $\boldsymbol{R}_{\exists\exists},\boldsymbol{R}_{\forall\exists}$是自反的.

4) 证明 Dsy 只要证明 $\boldsymbol{R}_{\forall\forall}$是反对称的.

5) 证明 RedL 只要由 $A\subseteq C$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $C\boldsymbol{R}_{X'Y'}B$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\forall\exists,\exists\exists),(\forall\forall,\exists\forall),(\exists\forall,\exists\forall),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

6) 证明 RedR 只要由 $B\subseteq C$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $A\boldsymbol{R}_{X'Y'}C$,其中$(XY,X'Y')\in\{(\exists\forall,\exists\exists),(\forall\forall,\forall\exists),(\forall\exists,\forall\exists),(\exists\exists,\exists\exists)\}$.

7) 证明 ExtL 只要由 C 非空,$C\subseteq A$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $C\boldsymbol{R}_{XY}B$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\forall\forall\}$.

8) 证明 ExtR 只要由 C 非空,$C\subseteq B$ 和 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $A\boldsymbol{R}_{XY}C$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\forall\forall\}$.

9) 证明 ConL 只要由 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明$(A\cap C)\boldsymbol{R}_{XY}B$ 和$(A\cap C^c)\boldsymbol{R}_{XY}B$,其中 $XY\in\{\exists\forall,\exists\exists\}$.

10) 证明 ConL 只要由 $A\boldsymbol{R}_{XY}B$ 证明 $A\boldsymbol{R}_{XY}(B\cap C)$和 $A\boldsymbol{R}_{XY}(B\cap C^c)$,其中 $XY\in\{\forall\exists,\exists\exists\}$.

从上述集合论角度证明系统的合理性,过程比较简单,这里不再赘述.

(2) 完备性证明.证明系统是完备的当且仅当关于偏序偏好结构有效的公式,在该证明系统都是可证的.为此,只要证明对于每个协调公式ϕ,都存在一个偏好模型,使得ϕ在这个模型中是可满足的,进而只要证明对于极大协调集 S_m,可以构造 M,使得 $M\models\gamma$当且仅当$\gamma\in S_m$.因为该证明系统的公理和规则是直接建立在命题逻辑重言式和基于偏序性质和操作的基础上,所以只要构造模型 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$使得 $\boldsymbol{R}$ 是偏序即可.令 $S^P=\{\alpha\,{}^X\!\geq^Y\beta\in S_m|\alpha,\beta$是完全合取式$\}$,构造 $M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$:$W=2^{VAR}$ 可以表示为完全合取式集合,即 $W=\{\gamma|\gamma$是完全合取式$\}$,$\boldsymbol{R}=\{(\alpha,\beta)|\alpha\,{}^X\!\geq^Y\beta\in S^P\}$,亦即 $\alpha\boldsymbol{R}\beta\Leftrightarrow\alpha^X\!\geq^Y\beta\in S^P$.根据 Bas,有 $\boldsymbol{R}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\forall\!\geq^\forall\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\exists\!\geq^\forall\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\forall\!\geq^\exists\beta\in S^P\}=\{(\alpha,\beta)|\alpha^\exists\!\geq^\exists\beta\in S^P\}$,再根据序偏好性质公理 Lin,Ref 和 Dsy 容易推出 $\boldsymbol{R}$ 必然满足自反性、传递性和反对称性,因而 $\boldsymbol{R}$

是偏序.

3. 定理 3 的证明

(1) 给定全前序偏好结构$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,根据定义$M\models I(\phi|\psi)$当且仅当对$I(\phi|\psi)$当且仅当对$\forall w_0\in\{w\in[\![\psi]\!]|\forall w'\in[\![\psi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}$都有$w_0\models\phi$.也就是$\{w\in[\![\psi]\!]|\forall w'\in[\![\psi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}\subseteq[\![\psi]\!]\cap[\![\phi]\!]$,亦即$\neg\exists w\in[\![\psi]\!]\cap[\![\phi]\!]^c,\forall w'\in[\![\psi]\!]\cap[\![\phi]\!]$,使得$w\boldsymbol{R}w'$,即$M\models\neg((\neg\phi\wedge\psi)^{\exists}\geq^{\forall}(\phi\wedge\psi))$.

(2) 给定偏序偏好结构$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,根据定义$M\models\phi\Rightarrow\psi\gamma$当且仅当对$\forall w\in[\![\phi\wedge\psi]\!]$和$\forall w'\in[\![\phi\wedge\gamma]\!]$都有$w\boldsymbol{R}w'$,即$M\models(\phi\wedge\psi)^{\forall}\geq^{\forall}(\phi\wedge\gamma)$.

(3) 给定全前序偏好结构$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,根据定义$M\models\phi>\psi$当且仅当对$\forall w_0\in\{w\in[\![\phi]\!]|\forall w'\in[\![\phi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}$和$\forall w_1\in\{w\in[\![\psi]\!]|\forall w'\in[\![\psi]\!]$满足$w\boldsymbol{R}w'\}$都有$w_0\boldsymbol{R}w_1$ 且$\neg(w_1\boldsymbol{R}w_0)$,亦即$\exists w_0\in[\![\phi]\!],\forall w_1\in[\![\psi]\!]$有$w_0\boldsymbol{R}w_1$,并且$\neg\exists w_1\in[\![\psi]\!],\forall w_0\in[\![\phi]\!]$使得$w_1\boldsymbol{R}w_0$.即$M\models\phi^{\exists}\geq^{\forall}\psi\wedge\neg(\psi^{\exists}\geq^{\forall}\phi)$.

(4) 给定偏序偏好结构$M=(W,\boldsymbol{R},VAR)$,根据定义$M\models\phi>>\psi$当且仅当对$\forall w_1\in[\![\psi]\!],\exists w_0\in[\![\phi]\!]$满足$w_0\boldsymbol{R}w_1$.显然$M\models\langle U\rangle\gamma\wedge(\gamma\to\psi)\to\phi^{\exists}\geq^{\forall}\gamma$.

4. 引理 1 的证明

引理 1 中(1)可由公理 Sat 和 ExtL 直接推出,引理 1 中(2)可由公理 Sat 和 ExtR 直接推出.

5. 引理 2 的证明

引理 2 中(1)可由公理 Sat 和 ExtL 直接推出,引理 2 中(2)可由公理 Sat 和 ExtR 直接推出.引理 2 中(3)可由公理 Sat 和 ConL 直接推出,引理 2 中(4)可由公理 Sat 和 ConR 直接推出.

6. 定理 4 的证明

如果$\lambda\in L_0$,那么 GMPL 的 SAT 问题显然就是命题逻辑的 SAT 问题.

如果$\lambda\in L_1$,则:

(1) 在命题变量有限的情况下,通过摩根定律、析取扩展原理、合取扩展原理和转换公理,λ中的任意偏好式化为完全偏好式的过程显然是多项式时间的(该过程可借鉴一般命题公式化为范式的方法).

(2) 对于λ中形如$\langle S\rangle\phi$或$\langle U\rangle\phi$的式子,由 GMPL 的语义定义可知,$\langle S\rangle\phi$的语义就是判定ϕ在命题逻辑下是否可满足的,因而是命题逻辑 SAT 问题,而$\langle U\rangle\phi$是判定ϕ在命题逻辑下的解释是否唯一,显然也可以归结为对真值表的遍历,归结为命题逻辑 SAT 问题.

(3) λ的可满足性检测规约为命题逻辑 SAT 问题($\langle S\rangle\phi$或$\langle U\rangle\phi$的真假值已确定).

因此,λ的可满足性检测直接是命题逻辑的 SAT 问题,或可在多项式时间内归结为命题逻辑 SAT 问题,是 NP 完全的.

张志政(1980－),男,山东乐陵人,博士,讲师,主要研究领域为知识表示和推理.

邢汉承(1938－),男,教授,博士生导师,主要研究领域为人工智能,不确定信息处理.

高志强(1966－),男,博士,副教授,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为语义 Web,多 agent 系统.