

几个多面体网格剖分问题的NP难度证明^{*}

田延军⁺, 邓俊辉

(清华大学 计算机科学与技术系, 北京 100084)

NP-Hardness of Some Polyhedral Mesh Decomposition Problems

TIAN Yan-Jun⁺, DENG Jun-Hui

(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-10-62782609, Fax: +86-10-62782609, E-mail: tianyanjun@gmail.com

Tian YJ, Deng JH. NP-Hardness of some polyhedral mesh decomposition problems. Journal of Software, 2008,19(4):1026-1035. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/19/1026.htm>

Abstract: This paper considers the problem of decomposing a polyhedral surface or a polyhedron into simpler components: Monotone patches or terrain polyhedra. It is shown to be NP-complete to decide if a polyhedral surface can be decomposed into k monotone patches, by constructing a geometric model to make a reduction from SAT (satisfiability) problem. And the corresponding optimization problem is shown to be NP-hard. Then, the method is extended to the problems of decomposing a polyhedron with or without holes into the minimum number of terrain polyhedra, both of which are also shown to be NP-hard.

Key words: mesh decomposition; monotone patch; terrain polyhedron; NP-complete

摘要: 主要讨论了两类多面体网格剖分问题——网格表面单调剖分和地形多面体剖分。首先研究了判定一个多面体表面能否被剖分成 k 个单调片的问题,通过构造与 SAT 问题(satisfiability problem)相应的几何模型,证明出该判定问题是 NP 完全的,而与之对应的最优剖分问题是 NP-hard 的。然后将证明方法推广到地形多面体剖分的问题:将一个带洞多面体或者简单多面体剖分成最小数量的地形多面体,这两个问题都被证明是 NP-hard 的。

关键词: 网格剖分;单调片;地形多面体;NP 完全

中图法分类号: TP391

文献标识码: A

三维多面体网格剖分(简称网格剖分)是指按照一定的几何拓扑特征,将三维多面体网格模型或者模型的表面分割成一组数量有限的、各自具有简单形状意义的子多面体或子分割片(patch)的工作。近年来,网格剖分算法在计算几何、计算机图形学、模式识别和计算机辅助设计等多个领域内都得到了越来越多的研究和应用。认知心理学认为:人类对物体形状进行识别时,部分地基于“分割”,复杂物体往往被看作是简单的基本元素或者组件的组合^[1-4]。由于剖分出来的子模型更加简单,也更易于计算机的处理和绘制,因此,网格剖分被广泛地应用于几何变形^[5-8]、碰撞检测^[9-12]、纹理映射^[13-16]和网格简化^[17,18]等多个问题中。

三维多面体网格剖分问题主要分为两类:一类称为实体剖分(solid decomposition),指的是将三维多面体本身分割成多个子多面体;另外一类称为表面剖分(surface decomposition),指的是将三维多面体的表面分割成多

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69803006 (国家自然科学基金)

Received 2006-07-04; Accepted 2006-11-14

个子分割片.

早在 1982 年,Lingas^[19]就证明了三维多面体的最小凸剖分问题是 NP-hard 的.Chazelle^[20]证明了对一个含有 n 个顶点的多面体进行凸剖分,剖分结果将会得到 $O(n^2)$ 个凸多面体,而且在最坏情况下,这个下界是紧的.这就使得实体剖分算法的实际应用价值受到了很大的限制,而且在实际应用中往往不需要去直接分割多面体,因此,网格表面剖分问题就得到了很多研究人员的重视.

由于实体剖分算法存在着局限性,实际应用中往往只需要将多面体的边界——多边形网格表面——分割为不同的子分割片,称为网格表面剖分.1997 年,Chazelle 等人^[21]证明了一个非常重要的结论:包含 r 个凹边(reflex edge)的多面体,表面可剖分为 $18r-2$ 个凸的分割片,且给出了一个复杂度为 $O(n+r \log r)$ 的剖分算法.相对于实体凸剖分的平方量级结果来说,该结论表明,网格表面凸剖分的结果是线性 $O(r)$ 的,而且独立于多面体顶点数 n .可见,表面凸剖分更加具有实用价值^[9,18].Chazelle^[22]同时也证明了多面体表面的最小凸剖分问题仍然是 NP 完全的.值得一提的是,文献[21]的证明过程中所剖分出来的每一凸分割片相对于 xz 平面都是单调的.因此,网格表面单调剖分算法也具有相同的结果,剖分所得到的单调片的个数也是线性 $O(r)$ 的,而且不多于 $18r-2$.所以,网格表面单调剖分算法也同样具有很好的应用价值.但是,目前关于单调剖分算法的研究和应用还很少,Li 等人^[10]利用一个启发式的单调剖分算法和图形硬件来加速碰撞检测,算法实现简单而且快速达到实时.相对于这些结果,本文将证明以下几个问题的难度:

MMSD(minimum monotone surface decomposition):将一个多面体的表面剖分成最小数量的单调片;

k -MSD(k -monotone surface decomposition):判定一个多面体的表面能否被剖分成 k 个单调片;

MTPD(minimum terrain polyhedron decomposition):将一个多面体剖分成最小数量的地形多面体;

k -TPD(k -terrain polyhedron decomposition):判定一个多面体能否被剖分成 k 个地形多面体.

本文第 1 节给出一些基本概念的定义.第 2 节证明 k -MSD 是 NP 完全问题,MMSD 问题是 NP-hard 的.第 3 节讨论地形多面体的剖分问题,证明对于带洞的多面体或者简单多面体, k -TPD 是 NP 完全问题,MTPD 问题是 NP-hard 的.最后在第 4 节进行总结并且讨论几个仍未解决的问题.

1 基本概念

在多项式时间内,由确定型图灵机(deterministic Turing machine,简称 DTM)可以解决的问题称为 P 类问题;如果一个问题,其解法在多项式时间内可以由一个非确定型图灵机(nondeterministic Turing machine,简称 NTM)实现,那么,此问题属于 NP 类问题.如果所有的 NP 类问题都可多项式规约为问题 π ,则称 π 为 NP 难题(NP-hard).如果某个问题是 NP-hard 的,同时又是 NP 问题,那么称其为 NP 完全(NP-complete,简称 NPC)问题.NPC 是 NP 类中最难的一类问题.NP 完全性理论的研究在实践中有着重要的指导作用,在算法设计和分析过程中,如果已证明某问题是 NP 完全的,这就意味着面临的是一个难于处理的问题.对于它,要找出一个在计算机上可行的(即多项式时间的)算法是十分困难的,甚至可能根本找不到.因此,对于 NP 完全问题,最好是去寻找近似解法,或者针对该问题的某些有实用价值的特殊情况,寻找多项式时间算法.关于图灵机和 NP 完全性理论的进一步介绍可参见文献[23].

下面给出几个与表面剖分相关的重要概念的定义和两个观察结论:

凹边(reflex edge):多面体 P 的一条边 e ,与 e 相关的两个面片所成内角(interior angle)大于 π ;

分割片(patch):由多面体 P 的一个或多个面片及其相关联的顶点和边所构成的集合.分割片可以是连通的或者不连通的;

凸分割片(convex patch):多面体 P 的一个分割片 σ 被称为凸的,当且仅当 σ 完全位于其凸包 $CH(\sigma)$ 的边界上,且相对于 σ 的每一面片, P 和 $CH(\sigma)$ 都位于同侧;

单调(monotone):对于一个分割片 σ ,如果平行于 d 方向的任意一条直线与 σ 相交于至多一个点,则称 σ 相对于 d 是单调的;如果 σ 上各点到平面 π 的垂直投影互不相同,则称 σ 相对于 π 是单调的;

单调片(monotone patch):对于一个分割片 σ ,如果存在一个方向 d ,使得 σ 相对于 d 是单调的,则称 σ 是单调的;

否则,称 σ 是不单调的.同样,单调片也可以是不连通的,如图 1 所示.

条带(strip):条带 S 是一个平行于 z 轴的平行四边形,且有两边与 xy 平面垂直. S 在 xy 平面上投影的长度,称作 S 的宽度;平行于 z 轴但不平行于 S 的平面与 S 的交线长度,称作 S 的高度.注意:宽度和高度虽不能确定条带的位置和形状,但必然可以确定其面积.

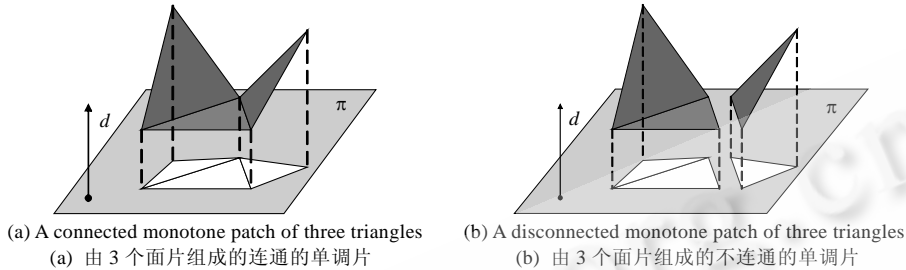


Fig.1

图 1

设 σ 为多面体 P 的一个分割片, n_1, n_2, \dots, n_r 为 σ 中各三角形的法向量,其中, $n_i = \langle a_i, b_i, c_i \rangle$, r 为 σ 所包含的三角形总数.由于每个三角形面片的法向量都有两个方向,因此,下面两个观察结论成立的前提是要保证法向量的“一致性”: P 的所有法向量均指向其外侧(或内侧)^[24].

观察结论 1. 若连通的分割片 σ 是单调的,则存在方向 $n = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$,使得 n 与 σ 的各法向量的点积($n_i \cdot n = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3$)同号.

观察结论 2. 若连通的分割片 σ 包含 3 个法向量 n_i, n_j, n_k ,它们所在的 3 条直线共面,并且由它们所构成的 3 个夹角均不大于 π ,则 σ 必不单调.

显而易见,观察结论 1 是成立的.观察结论 2 可以由观察结论 1 的逆否命题得出:对于如图 2(a)所示的 3 个法向量 n_i, n_j, n_k ,容易验证,任意法向量与它们的点积都不同号.图 2(b)是一个由 3 个条带 S_1, S_2, S_3 组成的分割片 σ ,根据观察结论 2 可知, σ 不单调.

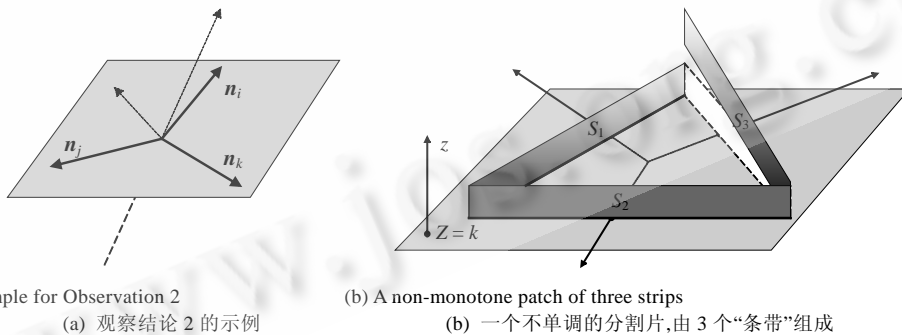


Fig.2

图 2

如图 3 所示的基本模型是一个由一组条带 S_1, S_2, \dots, S_n 首尾相连所构成的螺旋型结构,其竖直边记为 e_1, e_2, \dots, e_n ,所有条带都平行于 z 轴.其中, S_1, S_2, \dots, S_{n-2} 是具有相同高度 l 的竖直矩形,都与平面 $z=k$ 垂直且相邻, S_{n-1} 和 S_n 是将这两个矩形的公共边 e_n 沿着 z 轴向上拉动一小段距离得到的,任意两个相邻条带的夹角都是 $\pi/3$, $S_3, S_6, S_9, S_{12}, \dots$ 平行于 xz 平面,边 $e_2, e_5, e_8, e_{11}, \dots$ 沿着 y 轴的方向排列.我们称 $e_1, e_3, e_5, e_7, \dots$ 为“奇数边”, $e_2, e_4, e_6, e_8, \dots$ 为“偶数边”, $e_2, e_5, e_8, e_{11}, \dots$ 为“中间边”.其中, $e_5, e_{11}, e_{17}, \dots$ 既是奇数边又是中间边,称为“奇数中间边”; e_2, e_8, e_{14}, \dots 既是偶数边又是中间边,称为“偶数中间边”.

由观察结论 2 可知,图 3 所示基本模型的表面单调剖分只有两种最优的剖分方式,分别称为“奇分割”和“偶分割”.为了更清晰地描述这两种剖分方式,考虑该模型在 xy 平面上的投影,如图 4 所示.奇分割方式是沿着奇数边将模型表面切割开,而偶分割方式则是沿着偶数边将模型表面切割开.

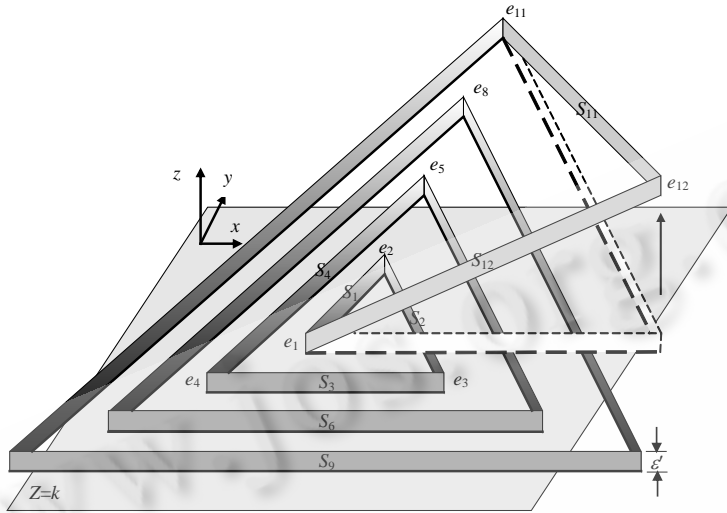


Fig.3 The gadget used in the proof
图 3 证明过程中用到的基本结构

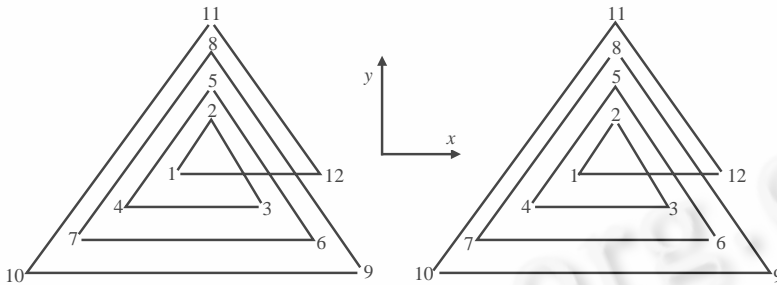


Fig.4 Odd-Cut and even-cut
图 4 奇分割和偶分割

2 MMSD 和 k -MSD 的难度

本节主要将讨论 MMSD 和 k -MSD 问题的难度.证明思路是通过构造与 SAT 问题(可满足性问题)的逻辑表达式相对应的几何模型,将 SAT 问题规约到这两个问题上.设 $x_1, x_2, \dots, x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}$ 为 $2n$ 个布尔变量,子句 c_1, c_2, \dots, c_n 是由这些布尔变量所构成的析取范式,并且同一个子句 c_i 中不能同时包含 x_k 和 $\overline{x_k}$.

2.1 构造子句模型和变量模型

为每一个子句 c_i 构造其相应的子句模型 C_i ; C_i 是一个被放置在 $y=i$ 平面内的矩形条带,如图 5(a)所示, C_i 平行于 xz 平面且与 y 轴相交于 $(0, i, 0)$ 点,其宽度 $\epsilon > 0$. 这里没有必要指定 C_i 确切的宽度和高度,其宽度 ϵ 需要足够小,以满足下面将给出的变量模型的限制条件,而其高度则需要足够大.

为每一个布尔变量 x_k 构造如图 3 所示的变量模型 X_k , X_k 在 xy 平面上的投影是一条多边形链 L_k , 如图 5(b)所示, 图中虚线部分表示在原模型中是不存在自交现象的,这里需要给出两个限制条件:

- (1) $|L_k|$ 必须是偶数,其中, $|L_k|$ 是 L_k 所包含的边的个数.

(2) L_k 的复杂度相对于包含 x_k 或 $\overline{x_k}$ 的子句的个数必须是线性的。

根据观察结论 2 可知,变量模型 X_k 的一个单调分割片最多只能包含两个相邻的条带,因此,第 1 个限制条件是为了保证 X_k 只有两种最优的表面单调分割方法.否则,如果 $|L_k|$ 为奇数,则共有 $|L_k|$ 种单调分割方法.第 2 个限制条件表明,模型的构造过程中不要求最小化 $|L_k|$,从而使得变量模型 X_k 能够获得足够的空间,以避免与其他变量模型相交以及 X_k 本身的自交现象.

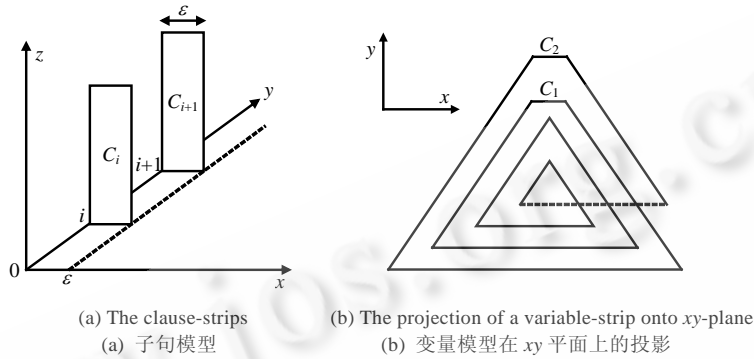


Fig.5

图 5

2.2 连接子句模型和变量模型

如果 c_i 包含 x_k ,则将 C_i 连接到 X_k 的一条“偶数中间边” e_l 上;如果 c_i 包含 $\overline{x_k}$,则将 C_i 连接到 X_k 的一条“奇数中间边” e_l 上.连接方式如下所示:将 e_l 的相邻两个条带 S_{l-1} 和 S_l 左右水平分开,然后把 S_{l-1} 连接到 C_i 左边(即 x 坐标值较小的)那条竖直边上,把 S_l 连接到 C_i 的另外一条竖直边上,如图 6 所示,称 S_{l-1} 和 S_l 为 C_i 的“连接对”.易知,图 6 中分别由 C_i, S_{l-1}, S_{l-2} 和 C_i, S_l, S_{l+1} 所构成的两个分割片都不单调,由 C_i, S_{l-1}, S_l 所构成的分割片则相对于 C_i 所在的平面是单调的.

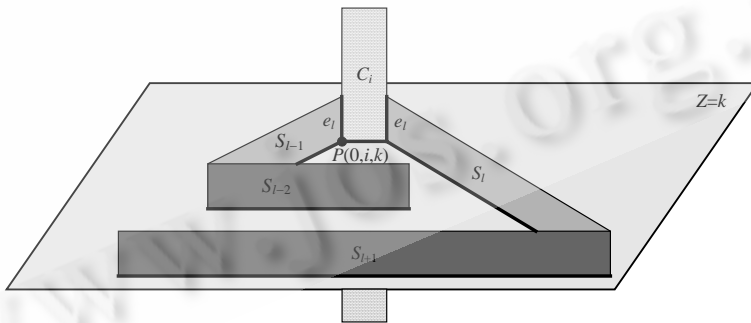


Fig.6 Attaching a clause-strip to a variable-strip

图 6 连接子句模型和变量模型

假定只有 c_1 包含 x_k ,只有 c_2 包含 $\overline{x_k}$,连接之后的模型在 xy 平面上的投影如图 5(b)所示.由于 C_1 被连接到 X_k 的一条偶数边上,因此, X_k 的奇分割结果能够将 C_1 包含在一个单调片中;而 C_2 则不能.反之, X_k 的偶分割结果能够将 C_2 包含在一个单调片中,而 C_1 则不能,如图 7 所示.由此可知,奇分割方式对应于 x_k 取值为真,能够将 C_1 包含在内,从而使得对应的子句 c_1 取得真值;而偶分割方式对应于 x_k 取值为假,能够将 C_2 包含在内,从而使得对应的子句 c_2 取得真值.

这里需要给出另外两个限制条件:

- (1) 子句模型 C_i 的高度必须足够大,以保证能够将其对应的所有变量模型都连接起来;而 C_i 的宽度 ε 必须足够小,以避免与其他条带相交.
- (2) 组成变量模型 X_k 的条带的高度 ε' 必须足够小,并且 X_k 的总高度也必须足够小,以保证 X_k 位于 $k \leq z < k+1$ 区间内.

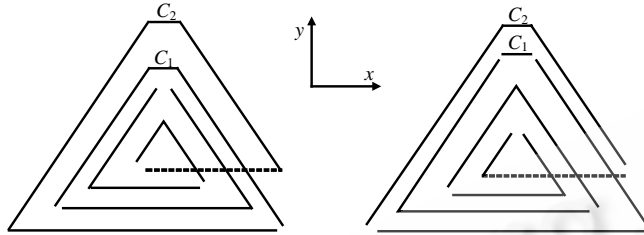


Fig.7 Two ways of decomposition depending on the truth assignment of x_k
图 7 根据 x_k 的取值不同所得到的两种剖分结果

2.3 结论的证明

至此,几何模型的构造已经完成,本节将给出主要结论的证明过程.

定理 1. SAT 问题的表达式可满足的条件是,当且仅当所构造的几何模型能够被剖分成 $N = \sum_k |L_k| / 2$ 个连通的单调片,其中 $|L_k|$ 表示 L_k 所包含的边的个数.

证明:首先证明充分性.假定 SAT 问题的逻辑表达式是可满足的,那么,如果 x_k 为真,则对 X_k 进行奇分割;否则对 X_k 进行偶分割.这样,对于每一个子句 c_i ,由于 c_i 是可满足的,则至少有一个连接对(其对应的变量 x_k 满足 c_i)与 C_i 连接在一起,构成一个单调片.如果只有一个变量满足 c_i ,也就是说 C_i 只有一个连接对,则将整个子句模型 C_i 与该连接对连接在一起,构成一个单调片即可.但是,如果有多个变量都能满足 c_i ,也就是说 C_i 有多个连接对,就必须对包含 C_i 的单调片进行切分,从而将这些不同的连接对分割开.如图 8 所示,假设 x_1, x_2 和 $\overline{x_4}$ 都能满足 c_i ,而 $\overline{x_3}$ 不能(即 x_1, x_2, x_3 为真, x_4 为假),则需要用两条虚拟边界线将该子句模型切分开:其中一条将包含 x_1 和包含 x_2 的两个单调片分割开,另外一条将包含 x_2 和包含 $\overline{x_4}$ 的两个单调片分割开.

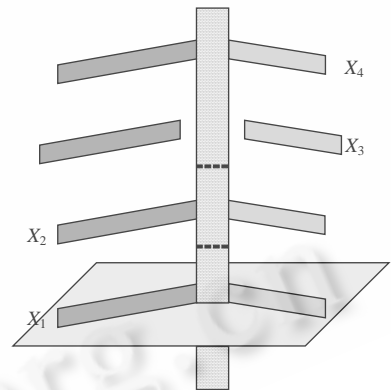


Fig.8 Disconnecting a clause-strip
图 8 切分子句模型

再证明必要性.为便于讨论,定义如下几个新的名称:每一个子句模型 C_i 被称为一个“子句节点”,构成变量模型 X_k 的每一个竖直条带被称为一个“变量节点”.易知,子句节点的个数为 n ,而变量节点的个数为 $\sum_k |L_k| = 2N$,必要性的证明主要依据以下几个简单的命题:

- 命题 1. 同一个单调片所包含的子句节点,都属于同一个子句模型.
 - 命题 2. 同一个单调片最多只能包含一个子句节点.
 - 命题 3. 同一个单调片所包含的变量节点都属于同一个变量模型.
 - 命题 4. 同一个单调片最多只能包含两个变量节点.
 - 命题 5. 任意一个单调片都包含两个变量节点.
 - 命题 6. 如果一个单调片包含子句 c_i 的一个连接对,则该单调片必然也包含 c_i 所对应的一个子句节点.
- 根据单调片的定义,容易验证命题 1、命题 2 和命题 3 都是成立的.

由观察结论 2 可知,命题 4 必然成立.

由命题 4 可知,同一个单调片最多只能包含两个变量节点,而 N 个单调片将所有的 $2N$ 个变量节点都包含在内,因此,每个单调片都必须包含两个变量节点,命题 5 得证.

由命题 5 可知,每个单调片都包含两个变量节点,而所构造的几何模型被剖分成 N 个单调片,因此, c_i 所对应的子句节点必然与一对变量节点相连,即命题 6 也是成立的.

综上所述,根据变量模型 X_k 所采用的单调剖分方式来确定 x_k 的取值.如果 C_i 是通过一条偶数中间边(或奇数中间边)被连接到 X_k 的一对变量节点上的,并且它们共同构成了一个单调片,这表明 c_i 包含 x_k (或 \bar{x}_k),而且 X_k 采用的是奇分割(或偶分割)的剖分方式,那么 x_k 为真(或假),并且 x_k 的取值能够满足 c_i .由上述命题可知,所有的子句都能够被满足,即SAT问题的表达式能够被满足.定理 1 得证. □

容易验证, k -MSD 问题能够用非确定图灵机在多项式的时间内解决,所以, k -MSD 问题是 NP 的.由定理 1 可得出以下结论:

定理 2. k -MSD 问题是 NP 完全的.

定理 3. MMSD 问题是 NP-hard 的.

3 MTPD 和 k -TPD 的难度

如果多面体 P 包含一个面片 f 称为“基准面片”,base facet),使得对于多面体上的任意一点 p (p 在 f 上的垂直投影点为 p'),线段 pp' 均位于多面体 P 的内部,则称 P 为一个“地形多面体”.换句话说,任意垂直于 f 的直线与该多面体的交集是一条线段,且线段的一个端点位于 f 上,如图 9 所示.本节将采用相似的思路,通过构造相应的几何模型,证明对于带洞多面体或简单多面体, k -TPD 问题同样是 NP 完全的,而 MTPD 问题则是 NP-hard 的.尽管该结论在文献[25]中已经得到证明,但这里所采用的几何模型更加简单,证明方法也更容易推广到其他类似的网格剖分问题中.

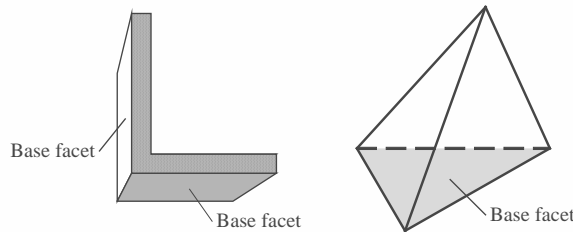


Fig.9 Examples for terrain polyhedron

图 9 地形多面体示例

同样,需要为每一个子句 c_i 构造相应的子句模型 C_i ; C_i 由前、后、左、右 4 个竖直的矩形条带首尾相连所构成,如图 10 所示.

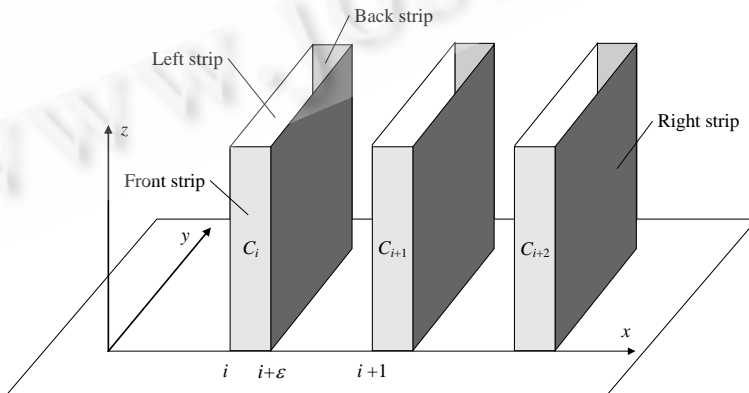


Fig.10 Clause representations

图 10 子句模型

图 11(a)由一组平行于 xy 平面的矩形首尾相连所构成,包含“左转”和“右转”两种基本结构,并且两者相继出现;而图 11(b)中则含有一个“U 型”结构,该结构由相邻的两个同为“左转”或“右转”的基本结构所组成,包含 3 个首尾相连的矩形,这 3 个矩形被称为“U 矩形”,而不属于“U 型”结构的矩形则被称为“LR 矩形”.类似于文献[25],为满足多面体剖分的要求,同样需要在“U 型”结构上加入两个矩形的“小突起(tabs)”,同时,“U 型”结构的分布需要满足如下条件:同一个“U 矩形”不能同时属于两个“U 型”结构,并且在两个“U 型”结构之间至少要存在两个“LR 矩形”.

为了便于下面的讨论,采用一组“圆点” d_1, d_2, \dots, d_{2n} 来代替每一个矩形,使得每一个“U型”结构的中间“圆点”的下标为偶数,而前后两个“圆点”的下标都为奇数.然后,将图 11(a)和图 11(b)所示的两个模型的边界线沿着 z 轴向上平移一段微小的距离 ε ,得到图 11(a')和图 11(b')所示的两个基本结构,需要指出的是,这两个结构均只有侧面,没有顶面和底面.变量模型 X_k 是由这两种基本结构所组成的一个环状模型,它包含的“圆点”的个数为偶数,并且 X_k 被放置在平面 $z=k$ 到 $z=k+\varepsilon$ 的区间内.图 12(a)给出了一个变量模型 X_k 的示例在 xy 平面上的投影.

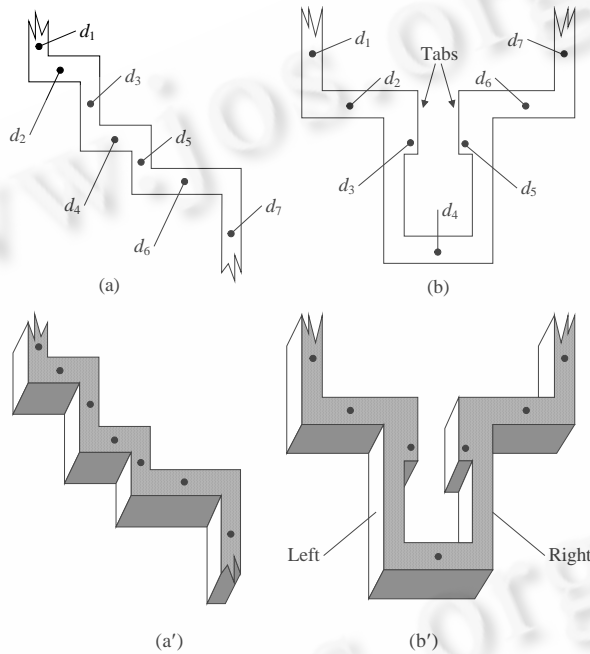


Fig.11 Sub-Models used to represent variables

图 11 构造变量模型所采用的基本结构

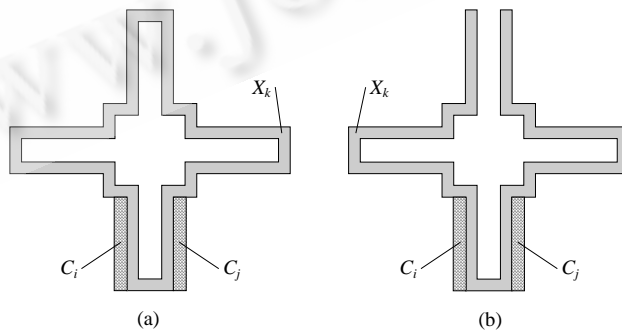


Fig.12 The projection of geometric model onto xy -plane

图 12 几何模型在 xy 平面上的投影

容易验证,对于图 11(a')和图 11(b')所示的模型,剖分出来的同一个地形多面体最多只能包含两个相邻的“圆

点”。因此,要将变量模型 X_k 分割成多个地形多面体,只有两种最优的剖分方式:一种为“奇分割”,剖分结果为 $d_{2n}d_1, d_2d_3, \dots$;另外一种为“偶分割”,剖分结果为 d_1d_2, d_3d_4, \dots 。图 13(a)显示了子句模型和变量模型的连接方式,其中一种剖分方式将得到图 13(b)所示的结果,而另外一种剖分方式将得到图 13(c)所示的结果。图 13(c)是一个地形多面体,而图 13(b)则不是。具体的连接方法和采用的剖分方式描述如下:

如果 c_i 包含 x_k ,则将 C_i 连接到 X_k 的一个“U型”结构的右侧;如果 c_i 包含 \bar{x}_k ,则将 C_i 连接到 X_k 的一个“U型”结构的左侧。

如果 x_k 为真,则对 X_k 采用奇分割的剖分方式;如果 x_k 为假,则对 X_k 采用偶分割的剖分方式。

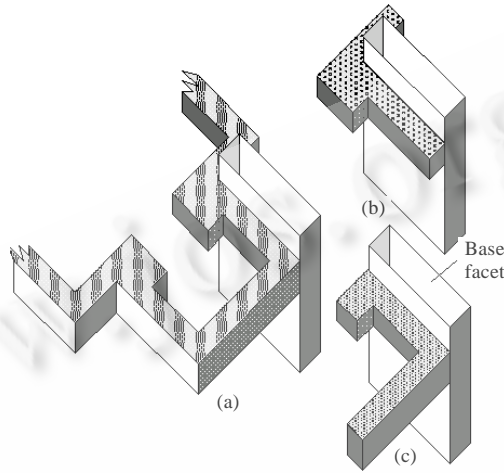


Fig.13 Attaching a clause representation to a variable representation

图 13 连接子句模型和变量模型

类似地,可以得出下面的定理:

定理 4. SAT 问题的表达式可满足的条件是,当且仅当所构造的几何模型能够被剖分成 $N = \sum_k |X_k|/2$ 个地形多面体,其中, $|X_k|$ 是 X_k 所包含的“圆点”的个数。

证明:证明过程与定理 1 相似,这里不再赘述。 □

定理 5. k -TPD 问题是 NP 完全的。

定理 6. MTPD 问题是 NP-hard 的。

利用上述的几何模型可以证明,对于带洞的多面体,定理 5 和定理 6 是成立的。为证明这两个定理对于简单多面体来说也是正确的,需要对上述几何模型进行简单的改动:移除变量模型 X_k 的最后一个“圆点” d_{2n} 及其对应的矩形,使得 X_k 不再是一个环形结构,然后按照同样的方式将子句模型和变量模型连接起来,具体的证明过程与前面相似。至此,定理的证明已经完成。

4 总结

本文主要讨论了三维多面体的最小表面单调剖分问题和最小地形多面体剖分问题,证明了这两个最优剖分问题都是 NP-hard 的,与之对应的判定问题则是 NP 完全的。但是,文中所讨论的单调片必须是连通的,而将多面体表面剖分成最小数量的不连通的单调片的问题,其难度尚未界定。而且,目前还没有较为有效的表面单调剖分算法和地形多面体剖分算法。

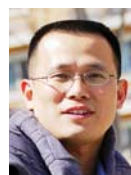
References:

- [1] Biederman I. Recognition-by-Components: A theory of human image understanding. *Psychological Review*, 1987,94(2):115-147.
- [2] Biederman I. Visual cognition and action. *An Invitation to Cognitive Science*, 1990,2(2):41-72.

- [3] Hoffman DD, Richards W. Parts of recognition. *Cognition*, 1984,18(1):65–96.
- [4] Hoffman DD, Singh M. Saliency of visual parts. *Cognition*, 1997,63(1):29–78.
- [5] Gregory AD, State A, Lin MC, Manocha D, Livingston MA. Feature-Based surface decomposition for correspondence and morphing between polyhedra. In: Proc. of the 15th Annual Symp. on Computational Geometry (SCG'99). ACM Press, 1999. 415–416. <http://ieeexplore.ieee.org/Xplore/login.jsp?url=/iel4/5596/14988/00681909.pdf?temp=x>
- [6] Shlafman S, Tal A, Katz S. Metamorphosis of polyhedral surfaces using decomposition. *Computer Graphics Forum (Proc. of the Eurographics)*, 2002,21(3):219–228.
- [7] Alexa M. Recent advances in mesh morphing. *Computer Graphics Forum*, 2002,21(2):173–196.
- [8] Zhao Y, Ong HY, Tan TS, Xiao Y. Interactive control of component-based morphing. In: Proc. of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer animation (SCA 2003). Eurographics Association, 2003. 339–348. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=846324>
- [9] Ehmann SA, Lin MC. Accurate and fast proximity queries between polyhedra using convex surface decomposition. *Computer Graphics Forum (Proc. of the Eurographics)*, 2001,20(3):500–510.
- [10] Li X, Deng J, Paul JC. Realtime collision detection based on monotone clusters. In: Proc. of the Pacific Graphics. Macau, 2005. 61–63.
- [11] Li X, Woon TW. Decomposing polygon meshes for interactive applications. In: Proc. of the 2001 Symp. on Interactive 3D Graphics (SI3D 2001). ACM Press, 2001. 35–42. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=364338.364343>
- [12] Katz S, Tal A. Hierarchical mesh decomposition using fuzzy clustering and cuts. *ACM Trans. on Graphics*, 2003,22(3):954–961.
- [13] Maillot J, Yahia H, Verroust A. Interactive texture mapping. In: Proc. of the 20th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH'93). ACM Press, 1993. 27–34. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=166120>
- [14] Leeb V, Radetzky A, Auer LM. Interactive texturing by polyhedron decomposition. In: IEEE Proc. of the Virtual Reality. 2001. 165–171. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=580521.835856>
- [15] Sander PV, Snyder J, Gortler SJ, Hoppe H. Texture mapping progressive meshes. In: Computer Graphics Proc. of the Annual Conf. Series, ACM SIGGRAPH. Los Angeles, 2001. 409–416. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=383307>
- [16] Lévy B, Petitjean S, Ray N, Maillot J. Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. In: Proc. of the 29th Annual Conf. on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH 2002). San Antonio: ACM Press, 2002. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=566654.566590>
- [17] Garland M, Willmott A, Heckbert PS. Hierarchical face clustering on polygonal surface. In: Proc. of the ACM Symp. on Interactive 3D Graphics, Research Triangle Park. North Carolina, 2001. 49–58. <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=364345>
- [18] Zuckerberger E, Tal A, Shlafman S. Polyhedral surface decomposition with applications. *Computers and Graphics*, 2002,26(5):733–743.
- [19] Lingas A. The power of non-rectilinear holes. *Languages and Programming (Proc. of the 9th Colloquium on Automata)*, 1982,140:369–383.
- [20] Chazelle B. Convex partitions of polyhedra: A lower bound and worst-case optimal algorithm. *SIAM Journal on Computing*, 1984,13(3):488–507.
- [21] Chazelle B, Palios L. Decomposing the boundary of a non-convex polyhedron. *Algorithmica*, 1997,17(3):245–265.
- [22] Chazelle B, Dobkin DP, Shouraboura N, Tal A. Strategies for polyhedral surface decomposition: An experimental study. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 1997,7:327–342.
- [23] Cormen TH, Leiserson CE, Rivest RL, Stein C. Introduction to Algorithms. 2nd ed., The MIT Press, 2001.
- [24] Zhang C, Chen T. Efficient feature extraction for 2D/3D objects in mesh representation. In: Proc. of the IEEE Int'l Conf. on Image Processing. Thessaloniki, 2001. 935–938. http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=958278
- [25] Fekete SP, Mitchell JSB. Terrain decomposition and layered manufacturing. *Int'l Journal of Computational Geometry & Applications*, 2001,11(6):647–668.



田延军(1982—),男,河南郑州人,硕士,主要研究领域为计算机图形学,计算几何。



邓俊辉(1970—),男,博士,副教授,主要研究领域为计算机图形学,科学计算可视化,计算几何。