

## 基于有向距离场的代数B-样条曲线重建\*

李云夕<sup>1,2</sup>, 冯结青<sup>1+</sup>, 金小刚<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(浙江大学 CAD&CG国家重点实验室,浙江 杭州 310027)

<sup>2</sup>(浙江大学 数学系,浙江 杭州 310027)

### Algebraic B-Spline Curve Reconstruction Based on Signed Distance Field

LI Yun-Xi<sup>1,2</sup>, FENG Jie-Qing<sup>1+</sup>, JIN Xiao-Gang<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

<sup>2</sup>(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-88206681 ext 506, E-mail: jqfeng@cad.zju.edu.cn

Li YX, Feng JQ, Jin XG. Algebraic B-spline curve reconstruction based on signed distance field. *Journal of Software*, 2007,18(9):2306-2317. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/18/2306.htm>

**Abstract:** An algebraic B-spline curve fitting algorithm based on the signed distance field is proposed in this paper. Given a planar point set, the moving least square (MLS) method is adopted to denoise and resample it so that the resulting point set is with low noise and uniform sampling density. Then the reliable signed distance field of the preprocessed point set is constructed by using the Level Set method. Finally, an algebraic B-spline function is adopted to fit the signed distance field by solving a linear equation system. As a result, an algebraic curve is obtained which is the zero level set of the algebraic function. By using the proposed method, not only the high quality curve is obtained, but also geometric information around the curve. Furthermore, the unwanted branches in implicit curve fitting could be avoided.

**Key words:** curve reconstruction; algebraic B-spline curve; signed distance field; moving least square (MLS) method; Level Set method

**摘要:** 提出了一种以代数B-样条曲线为表达形式、基于有向距离场的隐式曲线重建方法。首先给定一个表示封闭曲线、可能带有噪音且分布不均匀的平面点云,采用移动最小平方(moving least square,简称MLS)方法对点云去噪、重采样,得到一个低噪音、分布均匀的“线状”点云,再通过Level Set方法建立该“线状”点云的离散几何距离场,最后用一个代数B-样条函数光滑拟合该离散距离场,代数函数的零点集即为重建曲线。曲线重建过程可以归结为求解线性方程组问题。这种重建方法不仅可以得到高质量的重建曲线,还可以得到曲线周围的距离场信息。同时,避免了隐式曲线重建中经常出现的多余分支问题。

**关键词:** 曲线重建;代数B-样条曲线;有向距离场;移动最小平方(moving least square,简称MLS)方法;Level Set方法

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60373036, 60333010 (国家自然科学基金); the National Basic Research Program of China under Grant No.2002CB312101 (国家重点基础研究发展计划(973)); the National Research Foundation for the Doctoral Program of Ministry of Education of China under Grant No.20050335069 (国家教育部高等学校博士学位点专项科研基金); the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China under Grant No.R106449 (浙江省自然科学基金)

Received 2006-03-16; Accepted 2006-07-10

中图法分类号: TP391

文献标识码: A

在计算机图形学中,点集曲面(point set surface)日益引起人们广泛的研究兴趣.一个自然的问题是,如何将点集曲面转化为传统的参数曲面或隐式曲面?这就是经典的曲面重建问题,它可以描述为:对数值计算得到的或用获取设备采集的、表示某一几何形状的无序点集,如何重建其内蕴表示的目标曲面,以使得点集离该目标曲面在某种度量意义下偏差最小.曲面重建是计算机图形学、CAD/CAM、科学计算可视化等领域中的重要问题.

平面点云的曲线重建是曲面重建的基础<sup>[1]</sup>.本文讨论曲线重建问题,所给出的方法可以类推至三维点云的曲面重建问题.在曲线重建中,可以根据所得曲线的表示形式,把重建方法分为参数曲线重建和隐式曲线重建两类.与参数曲线重建相比,隐式曲线重建的优势在于:(1) 无须参数化;(2) 容易判断点是否在隐式曲线上;(3) 容易加入其他形状约束.当然,隐式曲线重建也存在如下不足:(1) 目前,商用CAD系统普遍采用参数表示,隐式表示需经参数化才能为CAD系统所用;(2) 参数曲线绘制简单,而隐式曲线绘制需借助等值线抽取算法;(3) 隐式曲线重建中容易出现多余分支,需要设法去除.本文采用隐式的代数B-样条曲线表示重建曲线.

目前,已有大量曲线重建方面的研究.对于参数曲线重建,Pottmann等人<sup>[2]</sup>研究了动曲线上的采样点到目标曲线的平方距离,通过求解一个优化问题,动态调整样条曲线;Yang和Wang等人<sup>[3]</sup>改进了Pottmann的结果,并对方法进行了理论分析;Lee<sup>[4]</sup>采用MLS方法首先对含噪音的点云去噪,再通过最小二乘方法得到拟合结果;Lin等人<sup>[5]</sup>用区间B-样条曲线逼近“厚度”较大的点云,从中抽取B-样条曲线作为重建结果.对于隐式曲线重建,Pratt<sup>[6]</sup>给出了线性约束下代数误差极小的曲线拟合方法;Taubin<sup>[7]</sup>提出了二次约束下代数误差极小化模型,并将其用于目标物体的识别和表面分割;Jüttler等人<sup>[8]</sup>综合考虑代数误差和法向偏差,建立基于代数B-样条函数表示的隐式重建模型,最终通过求解线性方程组得到重建曲线;杨周旺等人<sup>[9]</sup>采用代数B-样条曲线作为表达形式,以近似几何误差和薄板能量极小化为目标,通过动态迭代求解一个优化问题得到重建曲线;由Osher和Sethian<sup>[10]</sup>提出的Level Set方法主要用于处理界面跟踪问题,也可以看作是一种动态隐式重建方法.

曲线重建要解决两个问题.一个问题是重建曲线的表达形式.人们通常采用具有良好分析和计算性质的代数曲线或多项式参数曲线.另一个问题是如何使数据点到重建曲线的“距离”最小.在各种“距离”中,几何距离无疑是最优的,但几何距离难以解析表示,所以人们常采用代数距离<sup>[11]</sup>、代数距离加法向偏差<sup>[8]</sup>或近似几何距离<sup>[9]</sup>等方式逼近几何距离.本文的思路是:先建立原始点云的内蕴几何距离场,将点云信息“无损地”转化为距离场信息,再用一个代数函数拟合该几何距离场,则函数的零等值线就是重建曲线.拟合过程中还可以引入曲线光滑优化项以控制重建曲线的质量.图1给出了本文的曲线重建流程.

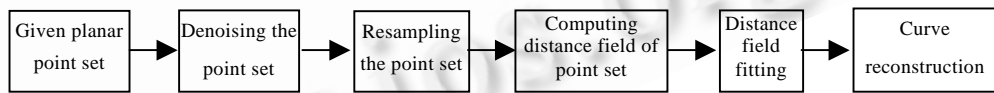


Fig.1 The flowchart of the proposed curve reconstruction method

图1 本文曲线重建方法的流程图

本文第1节是点云预处理,介绍如何用移动最小平方(moving least square,简称MLS)方法对点云去噪和重采样.第2节介绍如何在保持几何细节的前提下,采用Level Set方法建立规则点云的有向距离场.第3节介绍用代数B-样条函数拟合欧氏距离场.第4节给出具体实例,并对结果予以分析讨论.最后对本文的工作进行总结并提出对未来工作的展望.

## 1 点云预处理

本节采用MLS方法对带噪音的点云去噪、重采样,得到一个低噪音、分布均匀的“线状”点云,以便建立精确的有向距离场.本文改进了Lee<sup>[4]</sup>求取MLS中自适应核函数参数的算法,并提出了一种简单、易于控制采样密度的重采样方法.

## 1.1 MLS方法

Levin<sup>[12,13]</sup>提出了MLS方法.以二维点云为例,证明了一个给定的点云隐式定义了一条流形曲线,称之为MLS曲线.为表达MLS曲线,Levin定义了一个投影算子,MLS曲线由这个投影算子的不动点构成.设散乱点云 $P=\{p_i=(x_i,y_i)|1\leq i\leq N\}$ 是曲线 $S$ 上的采样点(通常带有噪音),可以通过如下两步定义投影算子 $\psi(P,r)$ ,将 $r\in\mathbf{R}^2$ 投影到MLS曲线 $S_p=\{x\in\mathbf{R}^2|\psi(P,x)=x\}$ 上:

(1) 计算参考直线.根据散乱点集 $P$ 拟合一个局部参考直线 $H=\{x\in\mathbf{R}^2|x\cdot n-D=0\}$ ,该参考直线满足最小化加权平方距离和函数

$$\sum_{p_i\in P}(p_i\cdot n-D)^2\theta(\|p_i-q\|),$$

其中, $q$ 是 $r$ 在直线 $H$ 上的投影, $\theta$ 是MLS核函数,通常取 $\theta(d)=\exp(-d^2/h^2)$ , $h$ 为核函数参数,它决定了核函数的有效影响范围.

(2) 计算局部拟合多项式.以 $q$ 为原点,参考直线 $H$ 为 $x$ 轴建立一个局部坐标系 $\Delta$ ,将点集 $P$ 内的点变换到 $\Delta$ 中,并用一个局部多项式 $g(x)$ 逼近变换后的点集 $P$ .设 $f_i$ 是 $p_i$ 在 $H$ 上的高度,即 $f_i=n\cdot(p_i-q)$ ,通过最小化加权平方和函数

$$\sum_{i=1}^N(g(x_i)-f_i)^2\theta(\|p_i-q\|),$$

可以得到 $g(x)$ 的系数,其中 $x_i$ 是 $p_i$ 在局部坐标系 $\Delta$ 中的横坐标,那么 $r$ 在MLS曲线 $S$ 上的投影为 $\psi(P,r)=q+g(0)\cdot n$ .

MLS是一种局部拟合方法.由于MLS核函数 $\theta(d)$ 是一个高斯函数,所以离 $q$ 越远的点对投影直线 $H$ 和局部多项式 $g(x)$ 的贡献越小.在实际计算中,为节省计算量,往往设定一个阈值 $\varepsilon$ ,只取满足 $\theta(d)>\varepsilon$ 的点参与计算.

## 1.2 点云去噪

采用MLS方法将点云投影到其MLS曲线上就可以实现点云去噪.但是MLS核函数参数 $h$ 对投影结果影响很大,例子如图2所示.为保证MLS投影去噪的质量,有必要自适应地为每个待投影点确定合适的 $h$ .

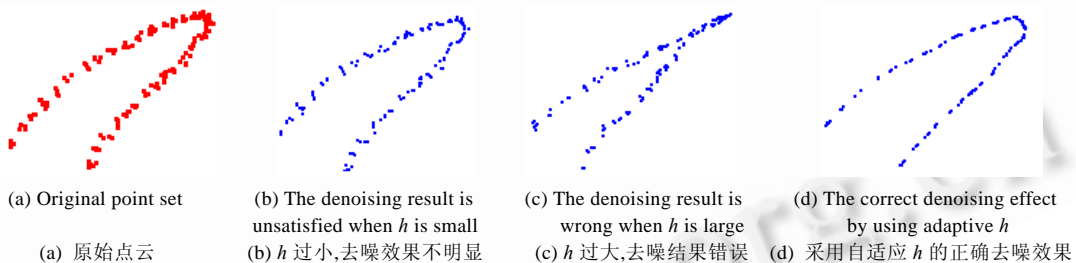


Fig.2 The influence of  $h$  on MLS denoising results

图2 参数  $h$  对 MLS 投影去噪结果的影响

Lee<sup>[4]</sup>提出了一种自适应计算 $h$ 的方法.对任意一点 $p$ ,将 $p$ 附近点集的坐标 $(x_i,y_i)$ 看成两个离散随机变量 $X,Y$ 的分布点,因为 $X,Y$ 的相关系数随 $h$ 变化且反映了局部平面点云的“厚度”,所以 $p$ 点处最优的 $h$ 值应为 $X,Y$ 最优相关系数.具体实现时,先设定一个目标相关系数(如 $\rho_0=0.7$ )、一个较小的初始值 $h$ 和一个步长 $\Delta h$ ,然后逐步增大 $h\rightarrow h+\Delta h$ ,并计算落在以 $p$ 为圆心、 $h$ 为半径的圆内的点集相关系数,若所得的相关系数已经达到目标相关系数,则 $p$ 点的自适应 $h$ 值即为当前的 $h$ .

由于原始点云含有噪音程度不确定,噪音的分布也不均匀,所以Lee的方法难以确定统一的目标相关系数 $\rho_0$ 和合适的初始 $h$ 值. $\rho_0$ 过大容易导致算法失败, $\rho_0$ 过小则需多次迭代投影才能得到低噪音点云.图3中 $A$ 点和 $B$ 点的最佳 $h$ 值为图中所对应黑色圆的半径,最大相关系数分别为 $\rho_A=0.6904$ , $\rho_B=0.8993$ ;若直接采用Lee的方法,如图3(b)( $A$ 点处的外圆半径为初始 $h$ 值,内圆半径为最佳 $h$ 值; $B$ 点处的内圆半径为初始 $h$ 值,外圆半径为最佳 $h$ 值;对应黑色圆的半径),设 $\rho_0=0.7$ ,则在 $A$ 点处,因为设定的初始 $h$ 值大于最优相关系数对应的圆域半径,所以增大的 $h$ 圆域内的点集的相关系数始终达不到 $\rho_0$ ,算法将失败;在 $B$ 点处,因为落在初始 $h$ 对应的圆域内的点集的相关系数 $\rho_1=0.8270$ ,达到了目标相关系数 $\rho_0$ ,所以将停止增大 $h$ ,所得的 $h$ 即为初始 $h$ ,显然此时 $h$ 不是最佳的.

本文改进了Lee的方法,根据 $p$ 点的邻近点分布情况自适应确定 $h$ .如图3(c)(A(B)点处的内外两个圆的半径分别为 $h$ 的下界 $h_{\min}$ 和上界 $h_{\max}$ ,中间圆的半径为最佳 $h$ 值)所示,为求 $p$ 点的最优值 $h^*$ ,先给定两个值: $h_{\min}$ 为 $h^*$ 的下界, $h_{\max}$ 为其上界(可取 $h_{\min}, h_{\max}$ 分别为 $p$ 点的 $k_1, k_2$ 个邻近点的包围圆盘的半径,通常取 $k_1=10, k_2=30$ ).然后以 $\Delta h$ 为步长对区间 $[h_{\min}, h_{\max}]$ 采样,即令 $h_i=h_{\min}+i\Delta h$ ,计算落在以 $p$ 为圆心、 $h_i$ 为半径的圆内的点集的相关系数,取其中最接近1的相关系数所对应的 $h_j$ 为 $h^*$ .

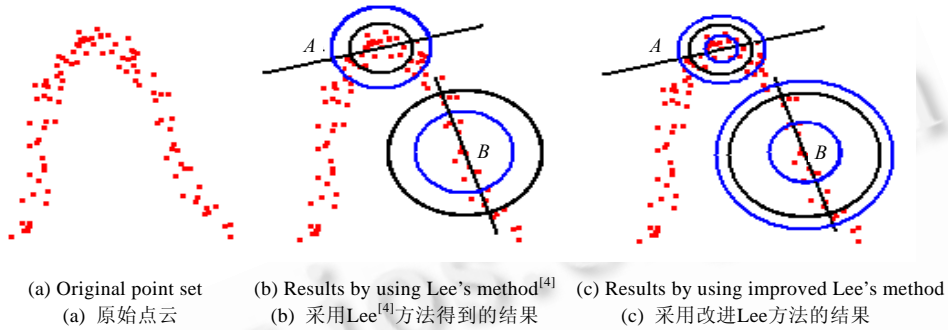


Fig.3 The determination of  $h$  in the MLS method  
图3 MLS方法中参数 $h$ 的确定

我们的方法对任意一点一次即可求得最优的 $h$ ,无须多次迭代投影,比Lee的方法稳定、简单;同时,多次MLS投影势必耗费更多时间,一次投影提高了效率.图4(图4(a)~图4(c)为采用Lee方法进行第1次~第3次的迭代投影去噪结果(时间1.304s),图4(d)为采用改进方法后一次投影去噪结果(时间0.403s))是两种方法对图3中原始点云去噪效果的对比.

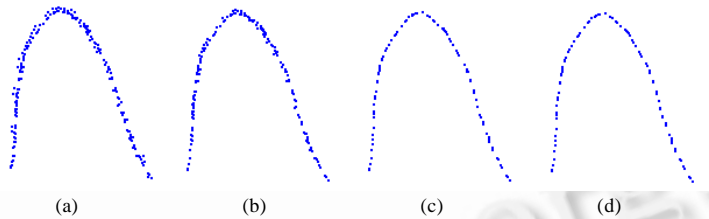


Fig.4 Comparison of point set denoising results  
图4 点云去噪结果比较

### 1.3 点云重采样

由于原始点云通常采样不均匀,用MLS方法投影去噪后的点云采样也会不均匀,很难满足后续建立有向距离场的要求,因此,有必要对去噪点云进行均匀重采样.

Alexa<sup>[14]</sup>提出了一种基于Voronoi图的点云加密采样方法.其基本思想是,在MLS曲线(曲面)上计算当前点云的Voronoi图,在Voronoi顶点处加入新点,直到Voronoi顶点到点云中最近点的距离都小于某一阈值.

Alexa算法主要目的是对分布稀疏的点云加密采样(upsampling),用于高质量地绘制点集曲面(point set surface)<sup>[14]</sup>.但该算法并没有对原始点云作调整,只是不断加入新点,所以,若原点云的某一局部密度很大,要得到均匀点云,则需将其他部分点云加密到相同程度;若要得到密度较小的均匀点云,则还需调用其他稀疏采样(downsampling)算法将部分密度过高点云的密度降低.实验表明,由于频繁计算局部点集在切线(切平面)上的Voronoi图,迭代选取Voronoi顶点并将其投影到MLS曲线(曲面)上,Alexa算法的计算开销较大.

为便于控制采样密度,得到均匀采样的点云,本文提出如下简单的重采样算法.根据MLS曲线投影方法,原始点云中的任意一点 $p_i$ 都存在一个对应的自适应核函数参数 $h_i$ ,设 $p_i$ 的MLS投影点为 $q_i$ ,称以 $q_i$ 为圆心、 $h_i$ 为半径

的圆域 $O_i$ 为 $p_i$ 对应的重采样圆域.原始点云去噪后落在 $p_i$ 的重采样圆域内的点构成一个局部点集 $P_i$ ,则存在拟合 $P_i$ 的多项式 $g_i(x)$ .设 $p_j \in P_i$ 在参考直线 $H_i$ 上的投影为 $x_j$ ,则可以在 $H_i$ 上计算出一个最小的包围盒 $R_i$ 包含 $\{x_j\}$ .对 $R_i$ 进行均匀剖分,每个剖分点 $u_j$ 在局部多项式上对应 $g_i(u_j)$ ,将点 $g_i(u_j)$ 由局部坐标系变换回原坐标系中,记为 $p'_j$ .由MLS投影过程可知, $p'_j$ 位于MLS曲线附近,将 $p'_j$ 用MLS方法投影回MLS曲线上,作为一个新的采样点添加到重采样结果中.图5(a)(直线 $H$ 上的黑点为 $R_i$ 中的均匀剖分点,曲线上的实心点为其在局部多项式 $g_i(u)$ 上的对应点 $p'_j$ ,将 $p'_j$ 投影回MLS曲线上即为重采样点)所示为重采样原理.

均匀剖分 $R_i$ 时采用的密度是点云的平均密度.设投影后的局部点集 $P_i$ 中含 $K_i$ 个点, $R_i$ 的长度为 $L_i$ ,则 $P_i$ 的密度定义为 $\rho_i=K_i/L_i$ ,投影后点云的平均密度为 $\rho=\sum\rho_i/N$ ,均匀剖分 $R_i$ 的步长 $\Delta L=1/\rho$ .由于原始点云分布不均匀,它们所对应的重采样圆域将相互重叠且圆域各有大小(如图5(b)所示),若对每个圆域都进行重采样,将浪费很多计算资源.所以在重采样前需对重采样圆域集进行简化,保证简化后的圆域集是点云的最小覆盖,并且满足单个圆域最大.圆域简化的方法基于贪婪的思想:先选取圆域集中最大的圆域为当前圆域,记为 $O_{cur}$ ,然后从与 $O_{cur}$ 相交或外切的圆域集中选取往外覆盖范围最大的圆域,记为 $O_{next}$ ,删除与 $O_{cur}$ 有交的其他圆域并令 $O_{cur}$ 为 $O_{next}$ ,重复上述过程直到所有圆域均被处理.图5(c)(圆内点为重采样结果)给出了一个圆域简化后的实例,图6为对一个点云投影去噪后重采样的实例.

由于简化后的重采样圆域个数较少,本文的重采样算法只需对圆域对应的局部多项式均匀剖分并投影,所以比Alexa的方法效率更高;重采样密度则由剖分 $R_i$ 的密度决定,易于控制.

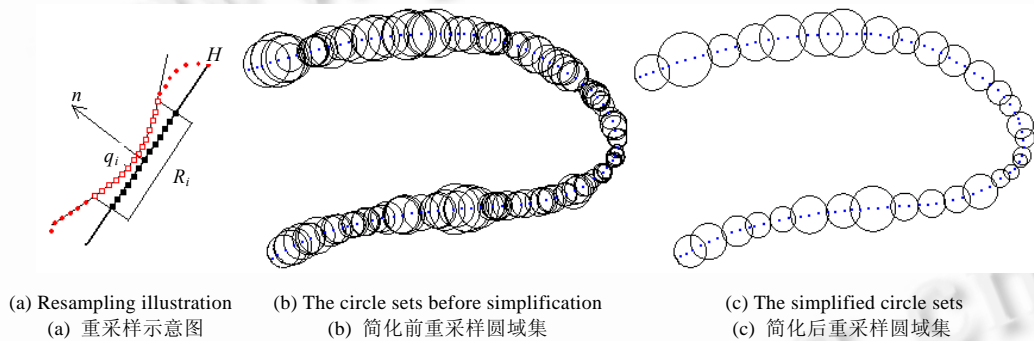


Fig.5 Resampling the point set

图5 点云重采样

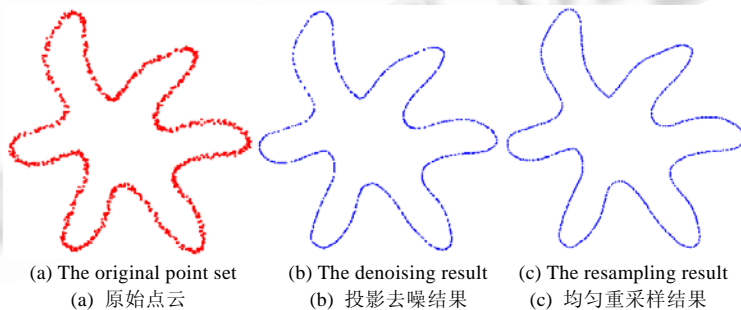


Fig.6 Resampling example

图6 重采样结果

## 2 基于 Level Set 方法计算有向距离场

通过点云去噪重采样,可以得到分布均匀的“线状”点云.本节介绍如何基于Level Set方法建立点云的有向距离场.在现有基于Level Set方法建立距离场的工作<sup>[15]</sup>中,离散距离场的网格剖分密度需交互指定.如果网格稀



疏则会导致几何信息丢失;如果网格稠密则浪费计算资源,并且加大后续拟合的工作量.适当的距离场网格剖分密度应以确保恢复点云所表示的几何细节为宜.所以,本文提出由点云最小曲率半径指导距离场的剖分.这样生成的离散距离场既可以保持原始点云所蕴含的几何细节,同时又可以避免多余的计算.

Osher和Sethian<sup>[13]</sup>提出了依赖于时间的运动界面演化Level Set方法,其主要思想是:把演化的界面作为零等值面嵌入高一维的场函数中,通过嵌入场的演化实现界面的演化,从而解决了传统方法中难以处理的拓扑改变问题.由Sethian<sup>[15]</sup>提出的Fast Marching方法是Level Set方法的一种特殊形式,用于求解速度方向不变的界面演化问题.此时,界面上的点沿着它的法向以速度 $F(F>0)$ 运动,设 $T$ 是界面经过一个三维空间点 $(x,y,z)$ 的时间函数,则 $T$ 满足方程 $|\nabla T|F=1$ .它是Eikonal方程的一种形式,其直观理解是到达时间的梯度和界面的运动速度成反比.对任意一个点集 $S$ ,空间任意点 $x$ 到 $S$ 的距离函数 $d(x)$ 正好满足Eikonal方程 $|\nabla d(x)|=1$ ;且 $d(x)=0, x \in S$ .所以,可以利用Fast Marching方法建立点集 $S$ 的离散有向距离场.

为计算点云的有向距离场,需要估计每个点的法向.本文采用Hoppe<sup>[16]</sup>的邻域协方差方法估计法向,由于投影后点云分布均匀且不含噪音,所以法向估计结果是理想的.建立离散距离场的另一个重要参数是剖分密度,它应该确保能从距离场信息中恢复点云的几何细节.根据数字信号处理中的Nyquist采样定理,若要不失真地恢复点云所表示的几何细节,必须以细节尺度的  $1/2$  为步长对距离场进行采样.点云的最小局部曲率半径反映了点云的细节,所以,应以点云最小局部曲率半径的一半为网格步长对点云所在的空间进行均匀剖分.本文采用Miao等人<sup>[17]</sup>提出的局部密切圆法估计点云的局部曲率.

结合前面的讨论,下面给出用Fast Marching方法建立点云的离散有向距离场的算法.图7(左图为点云的离散距离场初始化结果,黑色网格点标记为ALIVE点;中间图为初始化结果局部放大;右图为计算的最终距离场结果,曲线内部的点距离值为负,外部点距离值为正)为用Fast Marching方法求离散距离场的一个实例.

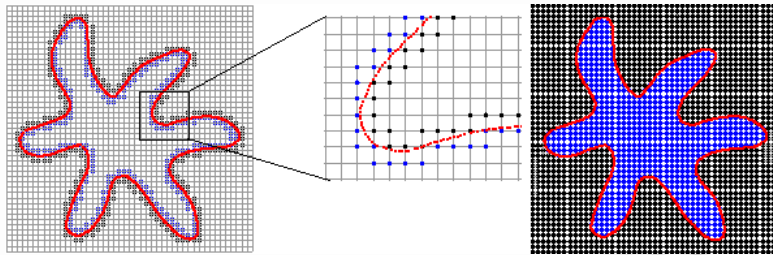


Fig.7 Generation of discrete distance field

图7 离散距离场生成

1) 初始化.

- (a) 取点云的矩形包围盒的  $k(k>1)$ 倍为距离场的范围,点云最小曲率半径的  $1/2$  为步长将距离场范围剖分成正规网格.记网格步长为 $\Delta x$ .
- (b) 初始化网格点的距离值和符号.设  $r = \sqrt{3} \cdot \Delta x$ ,则以采样点为中心、 $r$  为半径的圆构成了包围目标曲线的一条窄带 $\Omega$ ,它保证了Fast Marching方法的有效实现.对落在 $\Omega$ 内的网格点,设定其距离值为它到最近采样点的有向距离的绝对值,符号为有向距离的符号,其余网格点距离值为无穷大.
- (c) 将所有距离值小于 $\Delta x$ 的网格点标记为ALIVE,其他网格点标为FAR.
- (d) 记ALIVE中符号为正的网格点集为Plus\_Band,符号为负的网格点集为Minus\_Band.

2) 向外演化,求得所有符号为正的网格点的距离值.

- (a) 将Plus\_Band中任意一点 $(i,j)$ 的邻点(即 $(i-1,j),(i+1,j),(i,j-1),(i,j+1)$ )中不为ALIVE的标记为CLOSE.
- (b) 设TRIAL为CLOSE中距离值最小的网格点,将其从CLOSE中删除,并标为ALIVE,符号设为正.
- (c) 将与TRIAL相邻且属于FAR的网格点标记为CLOSE,并将其从FAR中删除;更新与TRIAL相邻且标记为CLOSE的网格的距离值.
- (d) 回到(b)循环,直到标记为CLOSE的点为空.

3) 向内演化,求得所有符号为负的网格点的距离值.

用 Minus\_Band 代替 Plus\_Band,类似上一步演化,直到所有网格都标记为 ALIVE.

### 3 基于有向距离场的曲线重建

点云的离散有向距离场是连续几何距离场在离散网格点处的一组采样值.我们用一个代数 B-样条函数  $f(x,y)$  拟合这组采样值,使  $f(x,y)$  表征几何距离场,则该函数的零点集  $f(x,y)=0$  就是重建的目标曲线.

#### 3.1 代数B-样条曲线

一条代数曲线定义为一个多项式函数  $F(x,y)$  的零点集  $V(F)=\{(x,y)\in R^2|F(x,y)=0\}$ .例如,单位圆可以表示为一条代数曲线,它是多项式函数  $F(x,y)=x^2+y^2-1$  的零点集  $\{(x,y)\in R^2|x^2+y^2-1=0\}$ . 双  $d(d\geq 2)$  次代数 B-样条曲线 (algebraic B-spline curve)<sup>[18]</sup> 是代数曲线的一种,它表达为张量积 B-样条形式,定义为

$$f(X) = f(x, y) = \sum_{r,s} c_{rs} M_r(x) N_s(y) = 0 \quad (1)$$

其中,  $c_{rs} \in R$  是控制系数,  $r=1\dots m, s=1\dots n$ , 基函数  $M_r(x), N_s(y)$  是分别对应于节点序列  $\zeta=\{\zeta_r\}(r=1\dots m+d+1), \eta=\{\eta_s\}(s=1\dots n+d+1)$  的  $d$  次 B-样条函数<sup>[18]</sup>; 函数  $f(X)$  称为代数 B-样条函数,它是一个以 B-样条基表示的分片多项式.重建曲线时,取矩形区域  $\Omega=[\zeta_1, \zeta_{m+d+1}] \times [\eta_1, \eta_{n+d+1}]$  为包含距离场并略微扩大的矩形区域,并令  $\zeta, \eta$  为内部等距节点序列,且满足  $\{\zeta_1=\dots=\zeta_{d+1}, \zeta_{m+1}=\dots=\zeta_{m+d+1}\}, \{\eta_1=\dots=\eta_{d+1}, \eta_{n+1}=\dots=\eta_{n+d+1}\}$ .

采用代数 B-样条曲线表达目标曲线有以下优势:实现简单,求解最终归结为解一个线性方程组,且在一定条件下,目标函数是张量积的,可以实现分方向的快速拟合(下一节将给出详细分析);曲线是全局光滑的;判断空间点是否在曲线上极为简单;曲线灵活,其控制系数具有良好的几何性质<sup>[19]</sup>.

记  $\mathbf{c}=(c_{11}, \dots, c_{L})^T$  为代数 B-样条函数  $f(x,y)$  的控制系数拉直向量,  $\mathbf{q}=(q_1, \dots, q_L)^T$  为  $f(x,y)$  中  $x, y$  方向上 B-样条基函数乘积的拉直向量,其中  $L=m \cdot n, c_j=c_{r(n-1)+s}=c_{rs}, q_j=q_{r(n-1)+s}=M_r(x) \cdot N_s(y), j=1, \dots, L$ . 那么,空间点  $X=(x,y)$  处张量积 B-样条函数值可表达为  $f(X)=f(x,y)=\sum_{r,s} c_{rs} M_r(x) N_s(y) = \mathbf{q}^T \mathbf{c}$ . 它是关于控制系数的线性函数,其梯度向量为

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} \partial f(x,y)/\partial x \\ \partial f(x,y)/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r,s} c_{rs} M'_r(x) N_s(y) \\ \sum_{r,s} c_{rs} M_r(x) N'_s(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^T \mathbf{c} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{c} \end{pmatrix} \quad (2)$$

$f(x,y)$  在区域  $\Omega$  上的薄板能量定义为

$$T(\mathbf{c}) = \iint_{\Omega} f_{xx}^2(x,y) + 2f_{xy}^2(x,y) + f_{yy}^2(x,y) dx dy = \mathbf{c}^T \mathbf{H} \mathbf{c} \quad (3)$$

其中,矩阵  $\mathbf{H}$  的元素对应于 B-样条基函数及其相应阶导数在区域  $\Omega$  上的积分.由于 B-样条基函数本质上是多项式,且具有局部支撑性,所以  $\mathbf{H}$  的元素可以通过数值高斯积分精确求得.

#### 3.2 基于有向距离场的曲线重建

##### 3.2.1 目标函数

设  $x, y$  方向上距离场网格剖分点分别为  $\{x_i\}(i=1, \dots, N_x), \{y_j\}(j=1, \dots, N_y), d_{ij}$  是网格点  $(x_i, y_j)$  处的有向距离值,则代数 B-样条函数  $f(x,y)$  在离散距离场中与采样值的偏差为  $Err_g(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (f(x_i, y_j) - d_{ij})^2$ . 在实际问题中通常要考虑重建曲线的光顺性,而薄板能量  $T(\mathbf{c})$  反映了曲线的光顺性.因此本文给出的目标函数是

$$\min R(\mathbf{c}) = Err_g(\mathbf{c}) + w \cdot T(\mathbf{c}) \quad (4)$$

其中,  $w$  是光顺项的权重系数,一般取较小的正实数.

##### 3.2.2 求解过程

目标函数式(4)是一个关于控制系数  $c_{rs}$  的二次函数,其最优解由以下线性方程组决定:

$$\frac{\partial}{\partial c_{rs}} R(\mathbf{c}) = 0, r=1\dots m, s=1\dots n \quad (5)$$

求解该线性方程组可以采用数值方法中 LU 分解方法.

值得注意的是,当薄板能量项的权重系数  $w=0$  时,目标函数具有张量积的特点,可以分方向拟合以节省

计算量.此时,原目标函数变为 $\min R(\mathbf{c}) = \text{Err}_g(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} (f(x_i, y_j) - d_{ij})^2$ . 由于代数B-样条函数 $f(x, y)$ 可以改写成 $f(x, y) = \sum_{r=1}^m M_r(x) (\sum_{s=1}^n c_{rs} N_s(y)) = \sum_{r=1}^m C_r M_r(x)$ , 我们可以用如下方式进行分方向拟合:先用一个一维 $d$ 次的B-样条代数函数 $g_i(y) = \sum_{s=1}^n a_{is} N_s(y)$ 拟合 $x$ 坐标相同的一列网格点的距离值,目标函数为 $\min F(\mathbf{a}_i) = \sum_{j=1}^{N_y} (g_i(y_j) - d_{ij})^2 = \sum_{j=1}^{N_y} (\sum_{s=1}^n a_{is} N_s(y_j) - d_{ij})^2, i=1, \dots, N_x$ , 其中 $\mathbf{a}_i$ 为一列长为 $n$ 的系数,其最优解由一个 $n$ 维线性方程组 $\partial F(\mathbf{a}_i) / \partial a_{is} = 0 (s=1, \dots, n)$ 决定;然后用一个一维 $d$ 次B-样条代数函数 $h_j(x) = \sum_{r=1}^m c_{jr} M_r(x)$ 拟合所得的每一列系数 $\mathbf{a}_i$ ,目标函数为 $\min G(\mathbf{c}_j) = \sum_{i=1}^{N_x} (h_j(x_i) - a_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{N_x} (\sum_{r=1}^m c_{jr} M_r(x_i) - a_{ij})^2, j=1, \dots, n$ , 其中 $\mathbf{c}_j$ 为最终双 $d$ 次张量积B-样条函数的一列长为 $m$ 的系数,其最优解由一个 $m$ 维的线性方程组 $\partial G(\mathbf{c}_j) / \partial c_{jr} = 0 (r=1, \dots, m)$ 决定.

决定最终代数函数的控制系数个数为 $L = m \cdot n$ 个,整体拟合时需求解一个 $L$ 维的线性方程组,而分方向拟合时需求解 $N_x$ 个 $n$ 维和 $n$ 个 $m$ 维的线性方程组.当 $m$ 和 $n$ 较大时,与整体拟合相比,分方向拟合的时间和空间开销大为降低,我们的实验结果也验证了这一论断.

#### 4 算法实现与讨论

我们在Windows XP环境下(PentiumIV, 2.4G, 512M)实现了本文的曲线重建方法和Jüttler<sup>[8]</sup>基于代数距离和场向偏差的拟合方法,并进行了比较.以下称本文的方法为场拟合, Jüttler的方法为点拟合.场拟合和点拟合都以一个代数B-样条函数 $f(x, y)$ 表达目标曲线所在的某个标量场,并以 $f(x, y) = 0$ 作为目标曲线.

在实现场拟合和点拟合时,需要指定一些参数.在MLS投影中,局部多项式次数和代数B-样条函数次数一般取为 2 或 3;在点拟合中,样条函数控制系数个数 $m$ 和 $n$ 需交互指定,而在场拟合中, $x, y$ 方向上网格点数分别为 $N_x, N_y$ ,因为网格是均匀的,而 $x, y$ 方向上B-样条节点区间数为 $m-d$ 和 $n-d$ ,为了保证拟合过程没有奇异性,每个节点区间内分布两个网格点,所以取 $m, n$ 满足关系 $m-d = N_x/2, n-d = N_y/2$ .得到样条函数后,用二维等值线抽取算法抽取其零点集作为目标曲线.

由于Fast Marching方法保证了距离场的质量,本文拟合的距离场是原始点云几何距离场高质量逼近,与其他隐式重建方法相比,具有以下优势:(1) 所得到代数B-样条函数 $f(X)$ 具有几何意义,它表达了空间点 $X$ 到目标曲线欧氏距离的良好逼近.这便于后续基于距离场的几何处理,如求曲线的等距线、基于距离场的变形等.图 8(a)~图 8(d)用颜色映射方式显示了场拟合和点拟合所得的标量场,并抽取了场函数的部分等值线.可见,场拟合中等值线是目标曲线的等距线逼近,点拟合中偏离目标曲线稍远处场函数值已经没有几何意义;(2) 不会出现多余分支.隐式曲线重建中易出现不必要的分支,其原因在于将一个标量场函数的零点集 $f(X) = 0$ 作为重建结果,而该标量场在远离目标数据点处往往没有几何意义,故其零点集可能不仅包括目标曲线,而且包括其他点.图 8(e)为采用Jüttler<sup>[8]</sup>方法时出现分支的一个例子.而场拟合方法的代数B-样条函数 $f(X)$ 表达了空间点 $X$ 到目标曲线的几何距离,其零点集只包括到目标曲线距离为 0 的点(即目标曲线本身),所以不会出现多余分支.

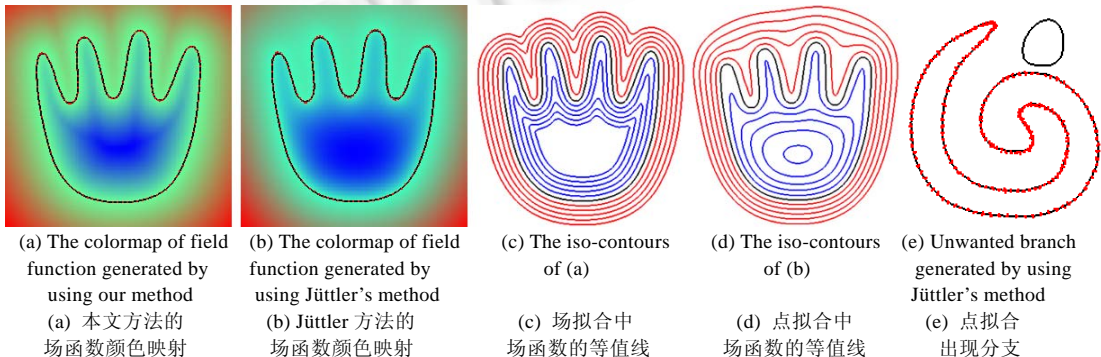


Fig.8 The example of the curve reconstruction

图 8 曲线重建的实例



目标函数中,光滑项的作用是使结果曲线光滑.评价曲线重建结果的主要标准是原始点云到结果曲线的误差和结果曲线的光顺性.但这两者之间存在矛盾,当光滑项系数过大时,原始点云的一些细节会被过滤掉,导致拟合误差增大.所以,应根据实际需求指定合适的光顺项系数.当光滑项系数为 0 时,场拟合方法可以应用分方向快速拟合,算法的效率大为提高;当光滑项不为 0 时,场拟合方法算法效率低于点拟合方法,因为它需要整体求解.

图 9~图 11 是几个光滑项系数  $w$  为 0 的重建实例,表 1 中列出了这些实例的计算开销.可以看出,在拟合误差大致相等的情况下,场拟合的计算速度比点拟合速度更快,这是因为采用了分方向快速拟合,而点拟合则无法实现分方向拟合.

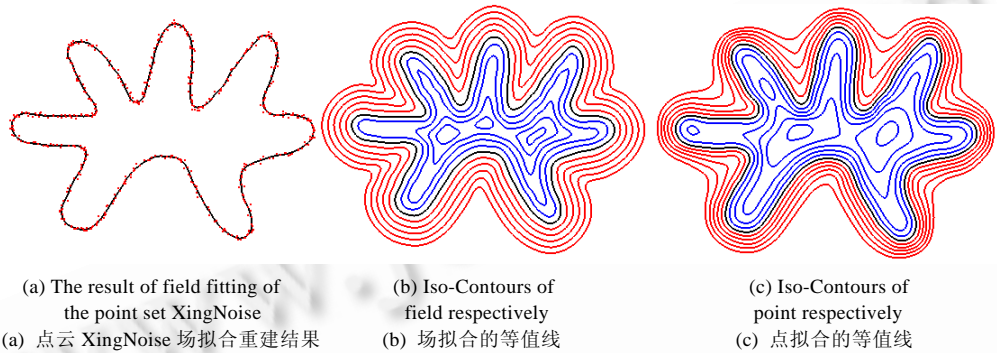


Fig.9 The example of the curve reconstruction

图 9 曲线重建的实例

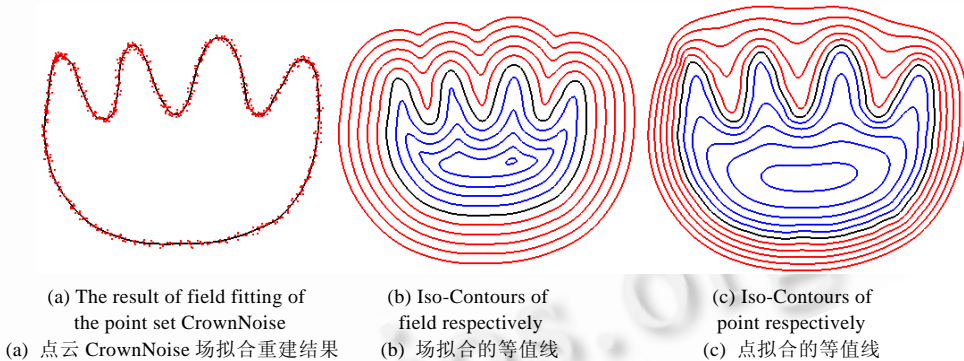


Fig.10 The example of the curve reconstruction

图 10 曲线重建的实例

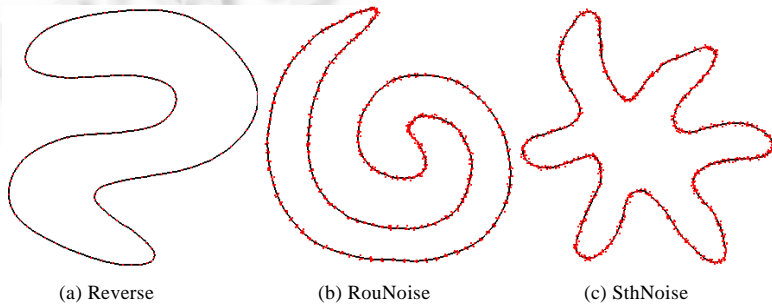


Fig.11 More curve reconstruction examples based on distance field fitting

图 11 几个基于距离场重建的例子

**Table 1** Computational costs comparison of two curve fitting methods

**表 1** 两种曲线重建的计算时间比较

Point set	Number of points	Fitting point set		Fitting distance field				
		Fitting error	Runtime (s)	Fitting error	Runtime (s)			Total
					Preprocessing	Distance field	Fitting distance field	
Reverse	132	0.000 7	5.968	0.000 5	0.876	0.094	0.016	0.986
XingNoise	526	0.176 4	6.813	0.135 2	2.891	0.125	0.031	3.047
CrownNoise	796	0.486 6	7.672	0.450 0	4.204	0.047	0.015	4.267
RuoNoise	940	0.276 5	7.882	0.241 3	5.688	0.125	0.030	5.844
SthNoise	969	0.355 7	7.687	0.300 6	4.328	0.062	0.015	5.311

图 12、图 13 反映了光滑项权系数  $w$  对拟合结果的影响。表 2 给出了  $w$  取不同值时拟合的计算时间和误差。从表 2 中可以看出:(1)  $w$  越大,拟合结果的误差越大,当  $w$  足够小时( $w \leq 0.00001$ ),光滑项对拟合结果影响几乎为 0。为得到较光滑的重建曲线且拟合误差较小,应选取合适的  $w$ (如  $w=0.0001$ );(2) 拟合的时间主要由距离场的剖分密度决定,因为它决定了求解的线性方程组的维数;(3) 当  $w=0$  时应该进行分方向拟合,与整体拟合相比,分方向拟合大大提高了效率,同时未引入更多误差。

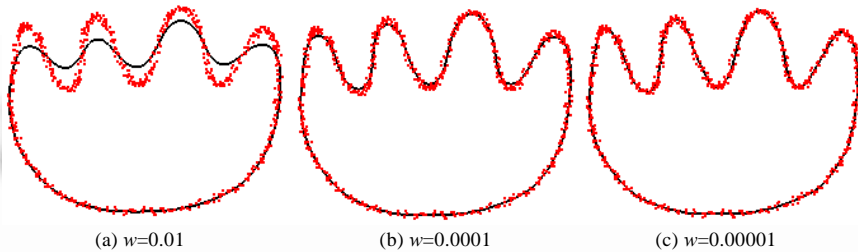


Fig.12 The curve reconstruction results of the point set CrownNoise with different  $w$ s

图 12  $w$  取不同值时点云 CrownNoise 的重建结果

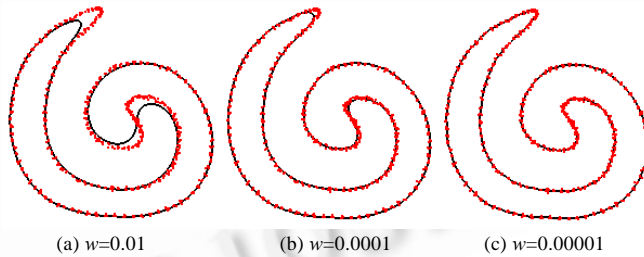


Fig.13 The curve reconstruction results of the point set RuoNoise with different  $w$ s

图 13  $w$  取不同值时点云 RuoNoise 的重建结果

**Table 2** The influences of  $w$  to the results of reconstruction

**表 2** 光滑项权系数  $w$  对拟合结果的影响

Point set	Preprocessing time (s)	Runtime of distance field computation	Weight $w$	Fitting time (s)	Fitting error
CrownNoise	4.057	0.125	0.000 1	30.406	0.912 3
			0.000 01	30.406	0.476 8
			0	30.031	0.476 8
			0 (Fitting along parametric directions)	0.016	0.476 8
RouNoise	5.801	0.172	0.000 1	29.969	0.804 1
			0.000 01	29.875	0.271 5
			0	29.781	0.271 5
			0 (Fitting along parametric directions)	0.016	0.271 5

## 5 总结与展望

本文给出了一种基于有向距离场的代数 B-样条曲线重建方法.该方法以代数 B-样条曲线为表达形式,通过一个代数 B-样条函数拟合原始点云的内蕴有向距离场,然后抽取其零点集作为目标曲线.为保证所建立的有向距离场精确反映目标曲线,我们先用 MLS 方法对原始点云进行去噪、重采样等预处理,使点云落在 MLS 曲线上并分布均匀,然后用 Level Set 方法建立预处理后点云的有向距离场.最后采用一个代数 B-样条函数拟合有向距离场,并考虑目标曲线的光顺性,得到一个线性方程组,可以快速求解.该方法不仅获得了高质量的重建曲线,而且得到了表征该曲线的有向距离场的代数 B-样条函数,可以方便后续的基于有向距离场的工作;同时,还避免了隐式曲线重建中容易出现的不必要分支.第 4 节中给出的实例验证了上述特点.

目前,本文方法的一个不足是暂时只能处理表示封闭曲线的点云重建.若原始点云表示的是一条开曲线,则目前方法难以建立起蕴含目标曲线信息的有向距离场,基于有向距离场的重建也就无从实现.在下一步的工作中,我们将设法把表示开曲线的点云构造成为表示封闭曲线的点云的一部分,用本文的方法重建该封闭曲线,最后取该封闭曲线的对应部分作为原始点云的重建结果.这种平面曲线的隐式重建方法可以很自然地推广到三维空间中曲面重建的情形.在未来的工作中,我们也将对此进行讨论.

**致谢** 感谢中国科学技术大学杨周旺老师给予的帮助.

### References:

- [1] Bajaj C, Bernardini F, Xu G. Reconstructing surfaces and functions on surfaces from unorganized 3D data. *Algorithmica*, 1997,19(1-2): 243-261.
- [2] Pottmann H, Leopoldsdeder S, Hofer M. Approximation with active B-spline curves and surfaces. In: Coquillart S, Hu SM, Shum HY, eds. *Proc. of the 10th Pacific Conf. on Computer Graphics and Applications*. Beijing: IEEE Press, 2002. 8-25.
- [3] Yang HP, Wang W, Sun JG. Control point adjustment for B-spline curve approximation. *Computer-Aided Design*, 2004,36(7): 639-652.
- [4] Lee IK. Curve reconstruction from unorganized points. *Computer Aided Geometric Design*, 2000,17(2):161-177.
- [5] Lin HW, Chen W, Wang GJ. Curve reconstruction based on an interval B-spline curve. *The Visual Computer*, 2005,21(6):418-427.
- [6] Pratt V. Direct least-squares fitting of algebraic surface. *Computer Graphics*, 1987,21(4):145-152.
- [7] 予 Taubin G. Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations with applications to edge and range image segmentation. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1991,13(11):1115-1138.
- [8] Jüttler B, Felis A. Least-Squares fitting of algebraic spline surfaces. *Advances in Computational Mathematics*, 2002,17(1): 135-152.
- [9] Yang ZW, Deng JS, Chen FL. Active implicit curve reconstruction based on approximate geometric error. *Journal of Software*, 2004,15:264-272.
- [10] Osher S, Sethian J. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 1988,79(1):12-49.
- [11] Bajaj C, Ihm I, Warren J. Higher-Order interpolation and least-squares approximation using implicit algebraic surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 1993,12(4):327-347.
- [12] Levin D. The approximation power of moving least-squares. *Mathematics of Computation*, 1998,67(224):1517-1531.
- [13] Levin D. Mesh-Independent surface interpolation. In: *Proc. of the Geometric Modeling for Scientific Visualization*. Springer-Verlag, 2003. 37-49.
- [14] Alexa M, Behr J, Cohen-Or D, Fleishman S, Levin D, Silva CT. Point set surfaces. In: Thomas E, Kenneth J, Amitabh V, eds. *Proc. of the IEEE Visualization*. San Diego: IEEE Computer Society, 2001. 21-28.
- [15] Sethian JA. Fast marching methods. *SIAM Review*, 1999,41(2):199-235.
- [16] Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, McDonald J, Stuetzle W. Surface reconstruction from unorganized points. *Computer Graphics*, 1992,26(2):71-78.

- [17] Miao YW, Feng JQ, Peng QS. Curvature estimation of point-sampled surfaces and its applications. In: Gervasi O, *et al*, eds. Proc. of the Int'l Conf. of Computational Science and its Applications. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 1023–1032.
- [18] Schumaker LL. Spline Functions: Basic Theory. Origin ed. New York: John Wiley and Sons, 1981.
- [19] Patrikalakis NM, Kriezis GA. Representation of piecewise continuous algebraic surface in terms of B-splines. *The Visual Computer*, 1989,5(6):360–374.

附中文参考文献:

- [9] 杨周旺,邓建松,陈发来.基于近似几何误差的动态隐式曲线重构.软件学报,2004,15:264–272.



李云夕(1981—),男,硕士生,主要研究领域为计算机图形学,计算机辅助几何设计.



金小刚(1969—),男,博士,研究员,博士生导师,主要研究领域为隐式曲面造型和动画,衣服动画,群组动画,基于草图造型,网格融合,Morphing.



冯结青(1970—),男,博士,研究员,博士生导师,CCF 高级会员,主要研究领域为计算机图形学,几何造型,科学数据可视化.

www.jos.org.cn