

均匀 B 样条基与 DP-NTP 基之间的转换与应用*

成 敏^{1,2}, 王国瑾¹⁺

¹(浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027)

²(浙江工业大学 数学系, 浙江 杭州 310032)

Conversion Between Uniform B-Spline Bases and DP-NTP Bases and Its Application

CHENG Min^{1,2}, WANG Guo-Jin¹⁺

¹(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

²(Department of Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-87951860 ext 8306, E-mail: gjwang@hzcnc.com

Cheng M, Wang GJ. Conversion between uniform B-spline bases and DP-NTP bases and its application. *Journal of Software*, 2006,17(Suppl.):38-45. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s38.htm>

Abstract: B-spline basis is widely used in construction of curves and surfaces for its excellent property of being totally positive and locally adjustable. Uniform B-spline as a special case of B-spline is also worth researching for its convenience in operation in industry modeling. In 2003, Delgado and Peña had given another new form of curve, which is constructed by a new totally positive basis (DP-NTP basis). This kind of curve shows obvious advantage in computing, for the reason that it has linear complexity. Meanwhile, it has good shape preserving property. But regretfully it is not locally adjustable as how B-spline curves do. As to achieve the advantages of both, and as well make exchanging and transferring data possible between various systems, the conversion between uniform B-spline curves and DP-NTP curves is presented. Examples show that this result can be widely used in efficient evaluation of locally adjustable curves and surfaces.

Key words: DP-NTP basis; uniform B-spline basis; dual basis; explicit conversion matrix

摘 要: B 样条基以其标准全正性和局部支柱性的长处,在曲线曲面构造中被广泛应用.而作为其特殊情况的均匀 B 样条,又因其操作简便等长处,对其的研究在工业造型设计方面也十分有意义.2003 年,Delgado 和 Peña 提出了另一类用标准全正基(DP-NTP 基)构造的新曲线表示形式,这种曲线在求值运算中具有线性时间复杂度的明显优势,同时像 B 样条曲线那样具有模拟或保持控制多边形形状的保形性质,但没有形状局部可调性.为了使它们实现优势互补,并在不同的造型系统之间进行数据的交换和传递,给出了均匀 B 样条曲线与 DP-NTP 曲线的相互转换.实例表明,其结果可在 CAD 系统中,尤其在曲线曲面需要快速求值或形状局部可调的场合得到相当广泛的应用.

关键词: DP-NTP 基;均匀 B 样条基;对偶基;显式矩阵转换

众所周知,在计算机辅助几何设计(computer-aided geometric design,简称 CAGD)领域,自由曲线曲面的造型

* Supported by the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2004CB719400 (国家重点基础研究发展规划(973)); the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60373033, 60333010 (国家自然科学基金)

Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

设计经常用控制顶点与相应调配基函数的乘积和来实现.通常比较常见的调配基函数有 Bernstein 基,B 样条基等等.由于不同类型的基具有各自不同的特征,所以由其构造的曲线也会有其特有的性质.因此在 CAGD 中为了充分利用各类基的几何与代数特性,又为了在不同的设计系统之间进行数据的交换和传递,需要对给定的曲线曲面进行形式的转换,这种转换的公式与方法一直是研究的热点问题之一.

研究表明,在 CAGD 中,基的几何特性主要有标准全正(normalized totally positive,简称 NTP)性和局部支柱性,基的代数特性主要有次数的阶梯递减性;由于 TP 矩阵的变差缩减性,基的 NTP 性保证了生成的参数曲线能模仿或保持其控制多边形的形状,即具有保形性;基的局部支柱性保证了生成的参数曲线具有形状局部可调性;而基的次数递减性则保证了生成的参数曲线具有计算敏捷性.

B 样条基具有 NTP 性和局部支柱性,由 B 样条基构造的 B 样条曲线既拥有 Bézier 曲线的保形性,又拥有形状局部可调及连续阶数可调等 Bézier 曲线所没有的特性,因此在实际应用中被广泛采用.而其中均匀 B 样条又因其操作简便等长处经常被应用在造型设计中.不过当广义 Ball 基面世以后,在计算敏捷性方面它似乎稍逊一筹.

新颖的 Ball 基与广义 Ball 基因其特有的次数递减性,在近年来开始引人注目.1974 年,英国数学家 Ball 在为前英国航空公司开发的 CONSURF 系统中,建立了机身造型的三次曲线模型^[1].王国瑾与 Said 分别在三次 Ball 基的基础上独立地推导出两种广义 Ball 基^[2-4].其后,奚梅成及 Othman 分别独立地对 Ball 基函数的对偶基及其应用进行了研究^[5,6].郭弘毅提出了介于 Wang-Ball 曲线与 Said-Ball 曲线之间或 Bézier 曲线与 Said-Ball 曲线之间的两类新的广义 Ball 曲线^[7,8].2000 年,泰国学者 Phien 等进一步应用 Wang-Ball 曲线理论来进行 Bézier 曲线求值计算^[9],指出 Wang-Ball 曲线的递归求值算法和 Bézier 曲线的 de Casteljau 求值算法相比,时间复杂度可以从曲线次数的平方降低到线性.实际上由于曲线求值是通过基函数进行的,而广义 Ball 基不同于 Bernstein 基,它的次数呈现阶梯变化的递减,这就减少了大量乘法运算^[9-11].

曲线求值是图形显示及绘制的一项基本和经常的操作,随着图形工业对实时交互要求的日益增强,随着虚拟现实技术对画面刷新频率指标的日益看重,曲线或曲面求值已成为整个系统高速运行的一个“瓶颈”.所以,有否较低的计算时间复杂度,对参数曲线而言是至关重要的.然而 Wang-Ball 曲线虽然具有线性的计算时间复杂度,但却不是由 NTP 基生成^[12],故无法完全满足曲线设计中十分重要且基本的保形性要求.所以,是否由 NTP 基生成,对参数曲线而言同样是至关重要的.

2003 年,Delgado 和 Peña 提出一类新的 NTP 基,DP-NTP 基^[12].由于这类基同时具有次数递减性,因此由它生成的参数曲线,DP-NTP 曲线,既拥有 Bézier 曲线或 B 样条曲线的保形性,又拥有广义 Ball 曲线的计算敏捷性.然而,一个不容忽视的事实是,DP-NTP 基缺乏类似于均匀 B 样条基的局部支柱性,反过来,均匀 B 样条基又缺乏类似于 DP-NTP 基的次数递减性.所以,为了在几何造型中应用这两种曲线时实行优势互补,互利双赢,又为了在不同的造型系统之间进行数据的交换和传递,有必要找到 DP-NTP 基与均匀 B 样条基的互化关系.本文将得到上述两种基相互转换的表示;同时用理论分析及实例显示表明,这种转换为把均匀 B 样条曲线转换到 DP-NTP 样条曲线来加快求值速度,以及把 DP-NTP 样条曲线转换到均匀 B 样条曲线来局部调整形状提供了可能.所以,本文结果可在 CAD 系统中,尤其在曲线曲面需要快速求值或形状局部可调的场合得到相当广泛的应用.

1 DP-NTP 基函数及均匀 B 样条基函数

1.1 DP-NTP 基函数

定义 1. 任意给定正整数 n , 在区间 $[0,1]$ 上,我们称由 Delgado 和 Peña 所给出的^[12]一类新的 n 次标准全正基为 DP-NTP 基.它可表示为如下形式:

$$\begin{cases}
 C_0^n(t) = (1-t)^n \\
 C_i^n(t) = t(1-t)^{n-i}, 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\
 C_{\lfloor n/2 \rfloor}^n(t) = (\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/2 \rfloor) t(1-t)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor - \lfloor n/2 \rfloor} [1 - t^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - (1-t)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}] \\
 C_{\lceil n/2 \rceil}^n(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lceil n/2 \rceil - \lfloor n/2 \rfloor} [1 - t^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} - (1-t)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}] + (\lceil n/2 \rceil - \lfloor n/2 \rfloor) t^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} (1-t) \\
 C_i^n(t) = t^i (1-t), \lceil n/2 \rceil + 1 \leq i \leq n-1 \\
 C_n^n(t) = t^n
 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\lfloor n/2 \rfloor$ 表示不大于 $n/2$ 的最大整数, $\lceil n/2 \rceil$ 表示不小于 $n/2$ 的最小整数, 下同.

DP-NTP 基函数具有一系列类似于 Bernstein 基函数的性质, 如非负性, 对称性, 递推性等.

1.2 均匀 B 样条基函数

定义 2. 设 $N_j^n(t)$ 为以整数 $j, j+1, \dots, j+n+1$ 为节点的 n 次 ($n+1$ 阶) 均匀 B 样条函数, 将其分段平移到区间 $[0, 1]$, 则 n 次均匀 B 样条基函数 $F_i^n(t)$ 可表示为

$$F_i^n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n-i} (-1)^l \binom{n+1}{l} (t+n-i-l)^n, t \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

2 均匀 B 样条基到 DP-NTP 基的转换

2.1 均匀 B 样条基到 Bernstein 基的转换

引理 1. 存在 n 次均匀 B 样条基 $\{F_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 到同次 Bernstein 基 $\{B_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 的转换矩阵 $G = (g_{i,j})_{i=0}^n \times_{j=0}^n$, 使得

$$(F_0^n(t), F_1^n(t), \dots, F_n^n(t)) = (B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) \cdot G_{(n+1) \times (n+1)}^T \quad (3)$$

其中

$$g_{i,j} = g_{n-i,n-j} = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n-i} (-1)^l \binom{n+1}{l} (n-i-l+1)^j (n-i-l)^{n-j}, i = 0, 1, \dots, n, j = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor \quad (4)$$

其证明可由对均匀 B 样条基作相应的二项展开得到.

2.2 Bernstein 基到 DP-NTP 基的转换

引理 2. 存在 n 次 Bernstein 基 $\{B_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 到同次 DP-NTP 基 $\{C_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 的转换矩阵 $E = (e_{i,j})_{i=0}^n \times_{j=0}^n$, 使得

$$(B_0^n(t), B_1^n(t), \dots, B_n^n(t)) = (C_0^n(t), C_1^n(t), \dots, C_n^n(t)) \cdot E_{(n+1) \times (n+1)}^T \quad (5)$$

其中

$$e_{i,j} = \begin{cases}
 \binom{i-1}{j-1} \binom{n}{i} (-1)^{j-j}, & 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, 1 \leq j \leq i \\
 1, & i = j = 1 \text{ or } i = j = n \\
 \binom{n-1-i}{j-i} \binom{n}{i} (-1)^{j-i}, & \lceil n/2 \rceil + 1 \leq i \leq n-1, i \leq j \leq n-1
 \end{cases} \quad (6)$$

若 n 为偶数, 则

$$e_{(n/2),j} = \begin{cases} 1 - \sum_{i=j}^{(n/2)-1} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \binom{n}{i}, & 1 \leq j \leq (n/2)-1 \\ 1, & j = (n/2) \\ 1 - \sum_{i=(n/2)+1}^j (-1)^{j-i} \binom{n-1-i}{j-i} \binom{n}{i}, & (n/2)+1 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad (7)$$

若 n 为奇数,则

$$e_{\lfloor n/2 \rfloor, j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{i=j}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \binom{n}{i} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{j-1} (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor - j} \right], & 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \right], & j = \lfloor n/2 \rfloor \\ \frac{1}{2} \left[1 - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \right], & j = \lceil n/2 \rceil \\ \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^j (-1)^{j-i} \binom{n-1-i}{j-i} \binom{n}{i} - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{j - \lfloor n/2 \rfloor - 1} (-1)^{j - \lfloor n/2 \rfloor - 1} \right], & \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad (8)$$

$$e_{\lceil n/2 \rceil, j} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{i=j}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \binom{n}{i} - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{j-1} (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor - j} \right], & 1 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \frac{1}{2} \left[1 - \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \right], & j = \lfloor n/2 \rfloor \\ \frac{1}{2} \left[1 + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \right], & j = \lceil n/2 \rceil \\ \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{i=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^j (-1)^{j-i} \binom{n-1-i}{j-i} \binom{n}{i} + \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - 1}{j - \lfloor n/2 \rfloor - 1} (-1)^{j - \lfloor n/2 \rfloor - 1} \right], & \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq j \leq n-1 \end{cases} \quad (9)$$

其余的 $e_{i,j} = 0$.

证明:该引理可通过 Bernstein 基函数与 DP-NTP 基函数之间的多项式转换显式得证.

若当 $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$ 时,

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} (1-(1-t))^{i-1} t \\ &= \sum_{j=1}^i \binom{i-1}{j-1} \binom{n}{i} (-1)^{i-j} (1-t)^{n-j} t \\ &= \sum_{j=1}^i \binom{i-1}{j-1} \binom{n}{i} (-1)^{i-j} C_j^n(t). \end{aligned}$$

此时即得到式(6)中 $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, 1 \leq j \leq i$ 一部分.其他情况可一一推导出,不再赘述.

2.3 均匀B样条基到DP-NTP基的转换

根据前面给出的均匀 B 样条基到 Bernstein 基的转换以及 Bernstein 基到 DP-NTP 基的转换,我们可以很自然地得到均匀 B 样条基到 DP-NTP 基的转换公式.

定理 1. 设 $\{F_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 为 n 次均匀 B 样条基, $\{C_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 为 n 次 DP-NTP 基, 则存在均匀 B 样条基到 DP-NTP 的转换矩阵 $W = (w_{i,j})_{i,j=0}^n$, 使得

$$(F_0^n(t), F_1^n(t), \dots, F_n^n(t)) = (C_0^n(t), C_1^n(t), \dots, C_n^n(t)) \cdot W_{(n+1) \times (n+1)}^T \quad (10)$$

其中

$$W = (w_{i,j})_{i,j=0}^n = G_{(n+1) \times (n+1)} \cdot E_{(n+1) \times (n+1)} \quad (11)$$

3 DP-NTP 基到均匀 B 样条基的转换

3.1 均匀 B 样条基的对偶基函数

引理 3. n 次均匀 B 样条基函数 $N_{j-n}^n(t)$ 的对偶基函数为

$$\sigma_j[f_i^n(t)] = \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} f_i^{(k)}(0), \quad j=0,1,\dots,n \quad (12)$$

其中 $\text{Sym}_{j,n-k}$ 为经典对称函数

$$\text{Sym}_{j,n-k} = \text{Sym}(t_{j+l_1} t_{j+l_2} \dots t_{j+l_k}) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \sum_{1 \leq l_1 \leq \dots \leq l_k \leq n} t_{j+l_1} t_{j+l_2} \dots t_{j+l_k}, & k=1,2,\dots,n \end{cases} \quad (13)$$

注: 因为 $t_{j+l} = j-n+l, l=1,2,\dots,n$, 上式可进一步展开成

$$\sum_{1 \leq l_1 \leq \dots \leq l_k \leq n} t_{j+l_1} t_{j+l_2} \dots t_{j+l_k} = \sum_{l_1=1}^{n-k+1} (j-n+l_1) \sum_{l_2=l_1+1}^{n-k+2} (j-n+l_2) \dots \sum_{l_k=l_{k-1}+1}^n (j-n+l_k) \quad (14)$$

3.2 DP-NTP 基到均匀 B 样条基的转换

定理 2. 设 $\{C_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 为如定义 1 所给出的 n 次 DP-NTP 基, $\{F_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 为 n 次均匀 B 样条基, 则存在 DP-NTP 基到均匀 B 样条基的显式转换矩阵 $H = (h_{i,j})_{i,j=0}^n$, 使得

$$(C_0^n(t), C_1^n(t), \dots, C_n^n(t)) = (F_0^n(t), F_1^n(t), \dots, F_n^n(t)) \cdot H_{(n+1) \times (n+1)}^T \quad (15)$$

其中 $h_{i,j}$

$$h_{i,j} = \begin{cases} \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} (-1)^k C_n^{k-i} \cdot k!, & i=0 \\ \sum_{k=0}^{n-i+1} \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} (-1)^k C_{n-i}^{k-1} \cdot k!, & 0 < i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \\ \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor + 2} \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} * \\ \left\{ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{k-1} (-1)^{k-1} \cdot k! + \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)} \left[C_0^k - C_0^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot k! - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^k (-1)^k \cdot k! \right] \right\}, & i = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor + 2} \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} * \\ \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)} \left[C_0^k - C_0^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot k! - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^k (-1)^k \cdot k! \right] + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) C_1^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot k! \right\}, & i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \sum_{k=i}^{n-i} \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} (-1)^{k-i} C_1^{k-i} \cdot k!, & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq i < n \\ \text{Sym}_{j,0} (-1)^n, & i = n \end{cases} \quad (16)$$

证明: 按 DP-NTP 基和均匀 B 样条基的转换关系, 记 $C_i^n(t) = \sum_{j=0}^n h_{i,j} F_j^n(t)$.

应用式(12)中 B 样条基的对偶基,可得

$$h_{i,j} = \sigma_j C_i^n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(n-k)!}{n!} \text{Sym}_{j,n-k} \frac{d^k}{dt^k} [C_i^n(t)] \Big|_{t=0} \quad (17)$$

下面来求 DP-NTP 基函数 $C_i^n(t)$ 在 $t=0$ 点的 k 阶导数.

当 $i=0; 0 \leq k \leq n$ 时, $C_i^n(0)^{(k)} = (-1)^k C_n^k \cdot k!$.

当 $0 < i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1; 0 \leq k \leq n-i+1$ 时, $C_i^n(0)^{(k)} = (-1)^k C_{n-i}^{k-1} \cdot k!$.

当 $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor; 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ 时,

$$C_i^n(0)^{(k)} = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{k-1} (-1)^{k-1} \cdot k! + \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)} \left[C_0^k - C_0^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot k! - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^k (-1)^k \cdot k! \right].$$

当 $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor; 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ 时,

$$C_i^n(0)^{(k)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)} \left[C_0^k - C_0^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot k! - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^k (-1)^k \cdot k! \right] + \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) C_1^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (-1)^{k-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \cdot k!.$$

当 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq i < n; i \leq k \leq i+1$ 时, $C_i^n(0)^{(k)} = (-1)^{k-i} C_i^{k-i} \cdot k!$.

当 $i=n; k=n$ 时, $C_i^n(0)^{(k)} = n!$. 当 $i; k$ 取其他值时, $C_i^n(0)^{(k)} = 0$. 将以上各式代入式(17)即得证本定理.

4 转换矩阵的应用与实例

在实际工业造型设计中大量用到次数不太高的样条曲线. 此时我们可以事先将前一节所示的各类低次的 (诸如 3~6 次) 基函数之间的转换矩阵计算好, 存储在系统中以备调用, 以加快实时效应.

4.1 转换矩阵(11)及(16)的实例

利用转换矩阵公式(11)与(16)可分别得到三次均匀 B 样条基函数到三次 DP-NTP 基函数的转换矩阵 $W_{4 \times 4}$ 与三次 DP-NTP 基函数到三次均匀 B 样条基函数的转换矩阵 $H_{4 \times 4}$ 为

$$W_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad H_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.2 转换关系(10)及(15)的应用

4.2.1 时间复杂度分析

下面我们就均匀 B 样条曲线及 DP-NTP 曲线求值算法的时间复杂度做个简单的分析. 容易知道这两种剖角求值算法中所需加法次数各为其乘法次数之半. 假设在一段 n 次均匀 B 样条曲线及 DP-NTP 曲线上求一点之值共需执行的乘法次数分别为 $M(B)$, $M(DP)$, 则根据均匀 B 样条曲线求值的 de Boor 算法及 DP-NTP 曲线求值的剖角算法^[12]易知

$$M(B) = n \times (n+1) \quad (18)$$

$$M(DP) = \begin{cases} 4n, & n \text{ 为奇数} \\ 4n-2, & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (19)$$

由此可见,若利用 DP-NTP 曲线求值具有线性复杂度这一特性来对工业设计中大量应用的均匀 B 样条曲线进行求值,可以大大降低计算复杂度.

4.2.2 应用实例

B 样条曲线因具有局部形状可调等特点,在设计领域一直得到相当广泛的应用;而 DP-NTP 曲线因具有保形及求值的线性复杂度等特点,近年来在曲线求值计算中也受到了相当的重视.本文的研究结果正是将两者优势充分结合起来.具体地说,基于 B 样条曲线的局部形状可调性,当改变某个控制顶点时,只有相应的子曲线会发生变化,而其余的子曲线不变.利用该特性,当 B 样条曲线控制顶点发生改变时,我们只需更新相应发生变化的子曲线的 DP-NTP 表示的控制顶点,而其余段子曲线对应的 DP-NTP 的控制顶点无须做任何改动.该特性可有效地应用于造型系统实时交互设计应用中.下面我们给出一个例子来做进一步的说明.

图 1 曲线(实线)所示是一条以 $\{(1,0),\{0,2\},\{1,4\},\{3,4\},\{4,0\},\{10,4\},\{4,5\}\}$ 为控制顶点的 4 次均匀 B 样条曲线,它由 3 段子曲线组成.由(11)可知,4 次均匀 B 样条基到四次 DP-NTP 基的转换矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{24} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ \frac{11}{24} & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{11}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{11}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

利用这一矩阵,可求得转换所得的 3 段 DP-NTP 子曲线的控制顶点(图 2 实线表示相应的控制多边形),具体数值如下:

DP-NTP 子曲线 1:

$\{(0.625,2.91667),\{-0.166667,2.333333\},\{1.166667,3.66667\},\{2.833333,4.333333\},\{2,3.75\}\}$

DP-NTP 子曲线 2:

$\{\{2,3.75\},\{1.166667,4.66667\},\{2.833333,3.333333\},\{4.166667,0.666667\},\{3.666667,2.16667\}\}$

DP-NTP 子曲线 3:

$\{\{3.666667,2.16667\},\{2.166667,2.66667\},\{4.833333,1.333333\},\{9.166667,2.66667\},\{6.70833,2.20833\}\}$

对该曲线进行局部形状调整,即把第 2 个控制顶点调整为 $\{-3,1\}$,则此时 4 次均匀 B 样条曲线的控制顶点变为 $\{(1,0),\{-3,1\},\{1,4\},\{3,4\},\{4,0\},\{10,4\},\{4,5\}\}$.图 1 虚线表示新的控制多边形与新的曲线.

基于 B 样条曲线的局部形状可调性,可知此时仅有第一、二段子曲线发生变化,其余子曲线保持不变,因此只需重新计算第一、二段 DP-NTP 子曲线的控制顶点(见图 2 虚线控制多边形),而其余无须再计算,最后得到 DP-NTP 的控制顶点为:

新 DP-NTP 子曲线 1:

$\{\{-0.75,2.45833\},\{-2.66667,1.5\},\{0.666667,3.5\},\{3.33333,4.5\},\{1.875,3.70833\}\}$

新 DP-NTP 子曲线 2:

$\{\{1.875,3.70833\},\{1.166667,4.66667\},\{2.83333,3.33333\},\{4.16667,0.666667\},\{3.66667,2.16667\}\}$

新 DP-NTP 子曲线 3:保持不变.

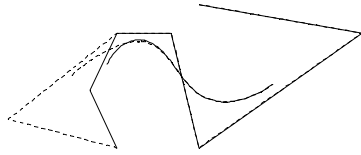


Fig.1 Uniform B- spline curve of degree 4 and its control polygon

图 1 4 次均匀 B 样条曲线及控制多边形



Fig.2 DP-NTP spline curve of degree 4 and its control polygon

图 2 4 次 DP-NTP 样条曲线及控制多边形

5 结 论

本文推导出了 DP-NTP 基与均匀 B 样条基的互换表达式.众所周知,DP-NTP 基与均匀 B 样条基都是 NTP 基,它们所生成的参数曲线都具模拟控制多边形形状的保形性.DP-NTP 样条曲线与均匀 B 样条曲线所不同的是,前者具有求值仅为线性复杂度的敏捷性,但没有形状局部可调性;后者具有形状局部可调性,但没有求值敏捷性,因此利用求出的互换矩阵,既可使均匀 B 样条曲线能够加快求值速度,又可使 DP-NTP 样条曲线能够局部调整形状,还可在不同的造型系统之间进行数据的交换和传递,在工程实际中大有用武之地.本文结果无疑可全部推广到 DP-NTP 样条曲面与均匀 B 样条曲面的场合.

References:

- [1] Ball AA. Consurf Part : Introduction of conic lofting tile. Computer Aided Design, 1974,6(4):243-249.
- [2] Said HB. A generalized Ball curve and its recursive algorithm. ACM Trans. on Graph, 1989,8(4):360-371.
- [3] Wang GJ. Ball curve of high degree and its geometric properties. Appl. Math. Journal of Chinese Universities, 1987,2(1):126-140 (in Chinese with English abstract).
- [4] Hu SM, Wang GZ, Jin TG. Properties of two types of generalized Ball curves. Computer Aided Design, 1996,28(2):125-133.
- [5] Xi MC. Conjugate basis of ball basis function and its application. Mathematica Numerica Sinica, 1997,19(2):147-153 (in Chinese with English abstract).
- [6] Othman W, Goldman RN. The dual basis functions for the generalized Ball basis of odd degree. Computer Aided Geometric Design, 1997,14(6):571-582.
- [7] Wu HY. Two new types of generalized Ball curves. Acta Mathematicae applicatae Sinica, 2000,23(2):196-205 (in Chinese with English abstract).
- [8] Jiang P, Wu HY. Dual basis functions for Wang-Ball basis and its application. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2004,16(4):454-458 (in Chinese with English abstract).
- [9] Huynh NP, Nattawit D. Efficient algorithms for Bézier curves. Computer Aided Geometric Design, 2000,17(3):247-250.
- [10] Wang GJ, Cheng M. New algorithms for evaluating parametric surfaces, Progress in Natural Science, 2001,11(2):142-148.
- [11] Wang GJ, Wang GZ, Zheng JM. Computer Aided Geometric Design. Beijing: CHEP-Springer, 2001 (in Chinese).
- [12] Delgado J, Pena JM. A shape preserving representation with an evaluation algorithm of linear complexity. Computer Aided Geometric Design, 2003,14(6):1-10.

附中文参考文献:

- [3] 王国瑾.高次 Ball 曲线及其几何性质.高校应用数学学报,1987,2(1):126-140.
- [5] 奚梅成.Ball 基函数的对偶基及其应用.计算数学,1997,19(2):147-153.
- [7] 邬弘毅.两类新的广义 Ball 曲线.应用数学学报,2000,23(2):196-205.
- [8] 江平,邬弘毅.Wang-Ball 基函数的对偶基及其应用.计算机辅助设计与图形学学报,2004,16(4):454-458.
- [11] 王国瑾,汪国昭,郑建民.计算机辅助几何设计.北京:高等教育出版社;林德博格:施普林格出版社,2001.



成敏(1978 -),女,浙江杭州人,博士生,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



王国瑾(1944 -),男,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学,数字几何处理.