

## 层次隐式张量积 B-样条曲面及其在曲面重构中的应用\*

童伟华<sup>+</sup>, 冯玉瑜, 陈发来

(中国科学技术大学 数学系, 安徽 合肥 230026)

### Hierarchical Implicit Tensor-Product B-Spline Surface and Its Application in Surface Reconstruction

TONG Wei-Hua<sup>+</sup>, FENG Yu-Yu, CHEN Fa-Lai

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-551-3601009, Fax: +86-551-3601005, E-mail: tongwh@ustc.edu.cn, <http://www.ustc.edu.cn>

**Tong WH, Feng YY, Chen FL. Hierarchical implicit tensor-product B-spline surface and its application in surface reconstruction. *Journal of Software*, 2006,17(Suppl.):11-20.** <http://www.jos.org.cn/1000-9825/17/s11.htm>

**Abstract:** This paper proposes a hierarchical implicit surface representation which has good adaptability and is very suitable for representing level of detail models. The definition of hierarchical implicit tensor-product B-Spline surface (HITBS) is first given and a mathematical model for surface reconstruction is briefly reviewed. Then an optimization model is proposed based on HITBS and a method is introduced for decomposing the domain in an adaptive fashion. A hierarchical approximation algorithm is proposed to deduce a series of linear equation System. The partition of unity method is introduced to integrate the local approximate functions into a global one. Some examples are given and conclusion remarks are concluded.

**Key words:** hierarchical implicit surface; level of detail; adaptability; partition of unity

**摘要:** 提出一类新的隐式曲面表示形式,它具有良好的层次性与自适应性,特别适合于表示层次细节模型.首先给出层次隐式张量积 B-样条曲面的定义,回顾曲面重构的一般数学模型,然后提出适于求解该类曲面的最优化模型以及定义域自适应分解的方法.在此基础上,提出层次逼近算法来逼近采样点数据集.随后,引入单位分解方法,将其用于融合各个子域上的局部逼近函数,使其成为一个具有整体光滑性的函数.最后基于散乱点数据集,给出曲面重构的实例,并作简单的讨论.

**关键词:** 层次隐式曲面;层次细节模型;自适应;单位分解

在计算机图形学与计算机辅助设计等众多领域里,研究人员常常遇到真实感与速度,逼真度与帧数率,具有丰富细节的图形世界与光滑、流畅的动画序列等之间的冲突,经常面临算法复杂度与性能之间的抉择,层次细节技术应时而生.该技术主要致力于动态调节虚拟世界模型的细节,从而架起沟通算法复杂度与性能之间的桥梁.

早在1976年,Clark<sup>[1]</sup>开创性地将层次细节思想引入到计算机图形学领域.他指出若用众多多边形来表示物

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.60533060, 60473132 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China No.2004CB318000 (国家重点基础研究发展规划(973)); the Outstanding Youth Grant of NSF of China under Grant No.60225002 (国家杰出青年基金); the TRAPOYT in Higher Education Institute of MOE of China (教育部高校青年教师奖励计划)

Received 2006-03-15; Accepted 2006-09-11

体,而绘制该物体却仅得到很少几个像素,那么这种表示是非常冗余的.因此,建议使用细节层次化的模型,依据实际场景的需要,选择合理层次的模型来表示物体.最先大规模使用该技术的是飞行器模拟软件,当时的层次模型通过设计师手工创建.直至20世纪90年代初,才有大批学者研究如何自动生成层次模型,涌现出一批优秀的算法.具代表性的有:Schröder等人<sup>[2]</sup>提出顶点合并算法,使用顶点删除算子,按照一定的标准逐步合并顶点,从而构造出层次模型;Rossignac等人<sup>[3]</sup>基于多边形面积、曲率等为每一个顶点赋权值,然后基于网格顶点族算法来构造层次模型;Funkhouser<sup>[4]</sup>基于层次细节模型,通过求解带限制的优化问题来选择最佳层次,从而实现在规定时间内绘制具有最佳视觉效果场景;Foresy等人<sup>[5]</sup>提出参数层次B-样条曲面,将其用于曲面的多尺度表示与编辑;进而他们在<sup>[6]</sup>中使用参数层次B-样条曲面来拟合网格数据;Garland等人<sup>[7]</sup>通过不断收缩顶点来简化多边形网格,在这过程中使用二次型来度量误差;Cohen等人<sup>[8,9]</sup>提出在指定误差内创建层次模型的算法及保持曲面外观、拓扑的简化算法;Hoppe<sup>[10]</sup>提出有效、无损、连续递进的网格模型,用于解决网格连续过渡、递进传输与压缩等问题;进而他在文献<sup>[11]</sup>提出基于视体、曲面向量和场景的几何误差等标准构造层次模型;最近,他与Losasso<sup>[12]</sup>将层次细节技术用于大型地图的实时绘制.

近年来,随着层次细节技术的日趋成熟,它被广泛应用工业产品的设计与开发,譬如微软公司出品的DirectX 9.0中就使用该技术表示层次网格模型.然而隐式曲面的层次表示的研究工作却还少见,随着隐式曲面在计算机图形学领域应用的不断深入,对隐式曲面建立层次细节模型,显得日趋重要.

本文提出用层次隐式张量积B-样条曲面来表示层次细节模型,并给出构造方法.第1节提出层次隐式张量积B-样条曲面的定义及构造该曲面的最优化模型.第2节基于八-叉树结构,利用Taubin距离估计误差,提出定义域自适应分解算法.第3节通过逐层求解最优化问题,给出构造层次隐式张量积B-样条曲面的算法.第4节利用单位分解方法,将各层局部逼近函数合成为整体连续函数.最后第5节给出计算实例,并作了简单讨论.

## 1 层次隐式张量积 B-样条曲面

### 1.1 曲面重构问题

随着激光测距扫描仪、计算机辅助断层扫描仪等三维数字化扫描设备的快速发展,使得获取实物表面的点集采样模型变得日趋简单、便宜与准确.将这些采样数据集转换成几何模型的过程被称为曲面重构(surface reconstruction),该技术被广泛应用于计算机辅助几何设计、计算机图形学、医学图像处理、计算机视觉等众多领域.目前,若按曲面表示形式分类,曲面重构算法大致可分为:网格类方法、参数类方法与隐式类方法.近些年隐式类方法得到了长足的发展,具有代表性的研究工作有:Carr等人<sup>[13]</sup>使用全局支集的多元调和径向基函数(RBF),从点云数据重构出光滑的流形曲面及修复不完全采样的曲面;Zhao和Osher<sup>[14]</sup>提出加权极小曲面模型,使用等势面(level set)方法计算符号距离函数,动态拟合点云数据;Alexa<sup>[15]</sup>发展出一套基于动态最佳拟合(MLS)的投影方法,得到光滑的流形曲面;Ohtake等人<sup>[16]</sup>引入层次单位分解隐式曲面(MPU),设计误差自适应算法来计算符号距离函数.与前述研究工作不同,本文提出的方法能同时用于解决曲面重构问题与构建层次细节模型问题,并取得了较为理想的结果.

曲面重构问题可陈述为:对空间 $R^3$ 中的真实曲面 $S$ 进行采样,可得到无结构散乱点集位置数据 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_U\}$ 及对应的法向量 $N = \{n_1, n_2, \dots, n_U\}$ ,其中法向量用于给曲面向量.我们的目标是:根据采样点集的 $P$ 与 $N$ ,确定曲面 $S'$ 以最大程度逼近未知曲面 $S$ .若使用隐式曲面来表示 $S'$ ,即 $S' = f^{-1}(0) = \{p \in \Omega : f(p) = 0\}$ 为函数 $f$ 对应的隐式曲面或零值面,则需要寻找函数 $f: \Omega \subset R^3 \rightarrow R$ ,使得 $f(p_u) \approx 0$ 且 $\nabla f(p_u) \approx n_u$ ,其中 $u = 1, 2, \dots, U$ .

从数学上看,该问题是病态问题(ill-posed problem),即解是不唯一的.因此,如果期望从众多解中找到满意解,就需要建立合适的数学模型.在过去的十几年间,浮现了众多成熟的模型,比如Muraki<sup>[17]</sup>提出的Blobby模型, Zhao<sup>[14]</sup>提出的加权极小曲面模型, Carr等人<sup>[13]</sup>的插值型隐式曲面(RBF)等.

## 1.2 层次隐式张量积B-样条曲面

众所周知,构造层次模型或多分辨率模型的一个关键是如何选取一组合适的函数空间序列

$$V^1 \subset V^2 \subset V^3 \dots \subset V^N, \quad (1)$$

其中函数空间  $V^n, n=1,2,\dots,N$  通过一组基函数张成,通常称这些基函数为尺度函数,在此我们选用张量积B-样条函数作为尺度函数.

为构造这些尺度函数,我们需将层次函数空间的定义域作自适应分解.不妨设该定义域为  $\Omega$ ,采用第2节中介绍的方法,在第  $n$  层时将定义域作如下分解:

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{M_n} \Omega_j^n$$

其中  $M_n$  为第  $n$  层定义域剖分的个数,初始时取  $M_1 = 1, \Omega_1^1 = \Omega$ .然后可在每个子区域  $\Omega_j^n$  上定义张量积B-样条函数:

$$\phi_j^n(\mathbf{p}) = \sum_{r=1}^u \sum_{s=1}^v \sum_{t=1}^w c_{rst}^n N_r(x) N_s(y) N_t(z), \mathbf{p} = (x, y, z) \in \Omega_j^n.$$

其中  $N_r(x), N_s(y), N_t(z)$  为  $d$  阶规范B-样条基函数,节点序列分别取  $\{\xi_r\}_{r=1}^{u+d}, \{\eta_s\}_{s=1}^{v+d}, \{\zeta_t\}_{t=1}^{w+d}$ ,特别地,常取区域的等距节点序列.不难看出,第  $n+1$  层的子区域必被第  $n$  层的某个子区域所包含,依据  $\phi_j^{n+1}(\mathbf{p})$  的定义,  $\{\phi_j^{n+1}(\mathbf{p})\}_{j=1}^{M_{n+1}}$  是较  $\{\phi_j^n(\mathbf{p})\}_{j=1}^{M_n}$  更为高分辨率的尺度函数,即  $\phi_j^n(\mathbf{p})$  可通过某些  $\phi_j^{n+1}(\mathbf{p})$  的线性组合来表示.因此,按如下方式构造层次函数空间  $V^n$ :

$$V^n = \text{span}\{\phi_j^n, j = 1, 2, \dots, M_n\}.$$

构造层次细节模型的目标就是:分别从函数空间  $V^1 \subset V^2 \subset V^3 \dots \subset V^N$  中,选取某种意义上最佳的函数序列  $\{f^n \in V^n\}_{n=1}^N$ ,逐步逼近欲重构的曲面.我们在Jüttler<sup>[18]</sup>的能量模型基础之上,提出如下模型:设在空间  $V^n$  中求得函数  $f^n$ ,那么欲求

$$f^{n+1}(\mathbf{p}) = f^n(\mathbf{p}) + \phi_j^{n+1}(\mathbf{p}), \mathbf{p} \in \Omega_j^{n+1}, j = 1, 2, \dots, M_{n+1} \quad (2)$$

使得该函数满足:

$$\begin{aligned} \min \left\{ \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} [f^{n+1}(\mathbf{p}_u)]^2 + \omega_1 \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} \|\nabla f^{n+1}(\mathbf{p}_u) - \mathbf{n}_u\|^2 + \omega_2 \iiint_{\Omega_j^{n+1}} [(f_{xx}^{n+1})^2 + (f_{yy}^{n+1})^2 + (f_{zz}^{n+1})^2 \right. \\ \left. + 2(f_{xy}^{n+1})^2 + 2(f_{xz}^{n+1})^2 + 2(f_{yz}^{n+1})^2] dx dy dz \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

其中  $U_j^{n+1}$  为区域  $\Omega_j^{n+1}$  中所含样本点个数,  $\omega_1, \omega_2$  为权值(其作用详见文献[18]).为便于描述,将式(3)中的3项分别记为  $L(\mathbf{c}_j^{n+1}), N(\mathbf{c}_j^{n+1}), G(\mathbf{c}_j^{n+1})$ ,其中  $L(\mathbf{c}_j^{n+1})$  刻画原曲面与目标曲面之间的代数距离,  $N(\mathbf{c}_j^{n+1})$  反映原曲面与目标曲面之间法向偏差,  $G(\mathbf{c}_j^{n+1})$  为光滑项或规则项,该项使得目标曲面保持紧致.通过求解上述最优化问题便得到  $f^{n+1}$ ,在此将通过函数  $\{f^n\}_{n=1}^N$  定义的隐式曲面称为层次隐式张量积B-样条曲面.在后续的章节里,将给出求解该曲面的具体方法.

## 2 定义域的自适应分解

在上一节中,我们描述了层次隐式张量积B-样条曲面的定义.其中一个待解决的问题是:如何将定义域做自适应分解?本文采用的策略是:基于八-叉树结构,对无结构散乱点数据的最小包围盒,依据采样点分布情况(比如单元内样本点个数等)和最大细分层数,以及逼近误差  $\varepsilon$ ,进行逐层细分.在此过程中,使用Taubin距离<sup>[19]</sup>来估计逼近误差  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \max \left\{ \frac{|f(\mathbf{p}_i)|}{|\nabla f(\mathbf{p}_i)|}, \forall \mathbf{p}_i \in \Omega_j^n \right\} \quad (4)$$

当达到最大细分层次或者单元内包含的样本点少于指定个数时或逼近误差小于阈值时,细分过程终止,从而将定义域自适应分解为一系列子域,其二维情形的示意图如图1所示.



Fig.1 The initialization and adaptive decomposition of domain

图1 初始定义域及其自适应分解

### 3 层次逼近算法

基于前述定义域自适应分解方法,通过逐层求解最优化问题(3)则得到层次隐式张量积B-样条曲面,即对  $n=1,2,\dots,N-1$ ,在其每个子区域  $\Omega_j^{n+1}$ ,  $j=1,2,\dots,M^{n+1}$  上求解最优化问题,得到函数  $\phi_j^{n+1}(\mathbf{p})$ ,从而求得函数  $f^{n+1}$ . 依据  $\phi_j^{n+1}(\mathbf{p})$  的定义,需要求解其所有未知系数  $(c_{rst}^{n+1})_{r=1,s=1,t=1}^{u,v,w}$ ,将这些系数按照某种方式(如取  $P:(s_i, s_j, s_k) \rightarrow s$ , 其中  $s_i=1,2,\dots,u$ ,  $s_j=1,2,\dots,v$ ,  $s_k=1,2,\dots,w$ ,  $s=1,2,\dots,M$ ,  $M=u \cdot v \cdot w$ )可排列成一系列向量  $\mathbf{c}^{n+1}=[c_1^{n+1}c_2^{n+1}\dots c_M^{n+1}]$ .

下面,将最优化问题(3)写成等价的矩阵形式,然后通过求解线性方程组得到所有未知系数.

#### 3.1 $L(\mathbf{c}^{n+1})$ 项的矩阵形式

$L(\mathbf{c}^{n+1})$  项可写成:

$$L(\mathbf{c}^{n+1}) = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} [f^n(\mathbf{p}_u) + \phi_j^{n+1}(\mathbf{p}_u)]^2$$

$$= [c_1^{n+1}c_2^{n+1}\dots c_M^{n+1}] \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{M1} & L_{M2} & \dots & L_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} + 2[f_1 f_2 \dots f_M] \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} + \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} [f^n(\mathbf{p}_u)]^2 \quad (5)$$

其中  $s, t=1,2,\dots,M$ ,  $P(s_i, s_j, s_k) = s$ ,  $P(t_i, t_j, t_k) = t$ ,

$$L_{st} = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} N_{s_i}(\mathbf{p}_{ux})N_{s_j}(\mathbf{p}_{uy})N_{s_k}(\mathbf{p}_{uz}) \cdot N_{t_i}(\mathbf{p}_{ux})N_{t_j}(\mathbf{p}_{uy})N_{t_k}(\mathbf{p}_{uz}),$$

$$f_s = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} N_{s_i}(\mathbf{p}_{ux})N_{s_j}(\mathbf{p}_{uy})N_{s_k}(\mathbf{p}_{uz}) \cdot f^n(\mathbf{p}_u).$$

#### 3.2 $N(\mathbf{c}^{n+1})$ 的矩阵形式

$N(\mathbf{c}^{n+1})$  项可写成:

$$N(\mathbf{c}^{n+1}) = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} \|\nabla f^n(\mathbf{p}) + \nabla \phi_j^{n+1}(\mathbf{p}) - \mathbf{n}_u\|^2 = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} \|\nabla \phi_j^{n+1}(\mathbf{p}) - \Delta \mathbf{n}_u\|^2$$

$$= [c_1^{n+1}c_2^{n+1}\dots c_M^{n+1}] \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1M} \\ N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{M1} & N_{M2} & \dots & N_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} - 2[b_1 b_2 \dots b_M] \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} + \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} (\Delta n_{ux}^2 + \Delta n_{uy}^2 + \Delta n_{uz}^2) \quad (6)$$

其中  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ,  $P(s_i, s_j, s_k) = s$ ,  $P(t_i, t_j, t_k) = t$ ,  $\Delta \mathbf{n}_u = \mathbf{n}_u - \nabla f^n(\mathbf{p})$ ,

$$N_{st} = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} (d_{su} \cdot d_u + e_{su} \cdot e_u + f_{su} \cdot f_u),$$

$$d_{su} = \frac{\partial N_{s_i}(p_{ux})}{\partial x} N_{s_j}(p_{uy}) N_{s_k}(p_{uz}), d_u = \frac{\partial N_{t_i}(p_{ux})}{\partial x} N_{t_j}(p_{uy}) N_{t_k}(p_{uz}),$$

$$e_{su} = N_{s_i}(p_{ux}) \frac{\partial N_{s_j}(p_{uy})}{\partial y} N_{s_k}(p_{uz}), e_u = N_{t_i}(p_{ux}) \frac{\partial N_{t_j}(p_{uy})}{\partial y} N_{t_k}(p_{uz}),$$

$$f_{su} = N_{s_i}(p_{ux}) N_{s_j}(p_{uy}) \frac{\partial N_{s_k}(p_{uz})}{\partial z}, f_u = N_{t_i}(p_{ux}) N_{t_j}(p_{uy}) \frac{\partial N_{t_k}(p_{uz})}{\partial z},$$

$$b_s = \sum_{u=1}^{U_j^{n+1}} (d_{su} \cdot \Delta \mathbf{n}_{ux} + e_{su} \cdot \Delta \mathbf{n}_{uy} + f_{su} \cdot \Delta \mathbf{n}_{uz}).$$

### 3.3 $G(\mathbf{c}_j^{n+1})$ 的矩阵形式

$G(\mathbf{c}_j^{n+1})$  项可写成:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{c}_j^{n+1}) &= \iiint_{\Omega_j^{n+1}} [(f_{xx}^{n+1})^2 + (f_{yy}^{n+1})^2 + (f_{zz}^{n+1})^2 + 2(f_{xy}^{n+1})^2 + 2(f_{xz}^{n+1})^2 + 2(f_{yz}^{n+1})^2] dx dy dz \\ &= [c_1^{n+1} c_2^{n+1} \dots c_M^{n+1}] \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{M1} & G_{M2} & \dots & G_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} + 2[g_1 g_2 \dots g_M] \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} + \\ &\iiint_{\Omega_j^{n+1}} [(f_{xx}^n)^2 + (f_{yy}^n)^2 + (f_{zz}^n)^2 + 2(f_{xy}^n)^2 + 2(f_{xz}^n)^2 + 2(f_{yz}^n)^2] dx dy dz \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ,  $P(s_i, s_j, s_k) = s$ ,  $P(t_i, t_j, t_k) = t$ ,

$$G_{st} = o_{st} + p_{st} + q_{st} + 2u_{st} + 2v_{st} + 2w_{st},$$

$$o_{st} = \int_{\Omega_x^{n+1}} \frac{\partial^2 N_{s_i}(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_{t_i}(x)}{\partial x^2} dx \cdot \int_{\Omega_y^{n+1}} N_{s_j}(y) N_{t_j}(y) dy \cdot \int_{\Omega_z^{n+1}} N_{s_k}(z) N_{t_k}(z) dz,$$

$$p_{st} = \int_{\Omega_x^{n+1}} N_{s_i}(x) N_{t_i}(x) dx \cdot \int_{\Omega_y^{n+1}} \frac{\partial^2 N_{s_j}(y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_{t_j}(y)}{\partial y^2} dy \cdot \int_{\Omega_z^{n+1}} N_{s_k}(z) N_{t_k}(z) dz,$$

$$q_{st} = \int_{\Omega_x^{n+1}} N_{s_i}(x) N_{t_i}(x) dx \cdot \int_{\Omega_y^{n+1}} N_{s_j}(y) N_{t_j}(y) dy \cdot \int_{\Omega_z^{n+1}} \frac{\partial^2 N_{s_k}(z)}{\partial z^2} \frac{\partial^2 N_{t_k}(z)}{\partial z^2} dz,$$

$$u_{st} = \int_{\Omega_x^{n+1}} \frac{\partial N_{s_i}(x)}{\partial x} \frac{\partial N_{t_i}(x)}{\partial x} dx \cdot \int_{\Omega_y^{n+1}} \frac{\partial N_{s_j}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{t_j}(y)}{\partial y} dy \cdot \int_{\Omega_z^{n+1}} N_{s_k}(z) N_{t_k}(z) dz,$$

$$v_{st} = \int_{\Omega_x^{n+1}} \frac{\partial N_{s_i}(x)}{\partial x} \frac{\partial N_{t_i}(x)}{\partial x} dx \cdot \int_{\Omega_y^{n+1}} N_{s_j}(y) N_{t_j}(y) dy \cdot \int_{\Omega_z^{n+1}} \frac{\partial N_{s_k}(z)}{\partial z} \frac{\partial N_{t_k}(z)}{\partial z} dz,$$

$$w_{st} = \int_{\Omega_x^{n+1}} N_{s_i}(x) N_{t_i}(x) dx \cdot \int_{\Omega_y^{n+1}} \frac{\partial N_{s_j}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{t_j}(y)}{\partial y} dy \cdot \int_{\Omega_z^{n+1}} \frac{\partial N_{s_k}(z)}{\partial z} \frac{\partial N_{t_k}(z)}{\partial z} dz,$$

$$g_s = \iiint_{\Omega_j^{n+1}} \left[ \frac{\partial^2 N_{s_i}(x)}{\partial x^2} N_{s_j}(y) N_{s_k}(z) \cdot f_{xy}^n + N_{s_i}(x) \frac{\partial^2 N_{s_j}(y)}{\partial y^2} N_{s_k}(z) \cdot f_{xy}^n + N_{s_i}(x) N_{s_j}(y) \frac{\partial^2 N_{s_k}(z)}{\partial z^2} \cdot f_{xz}^n + \right.$$

$$\left. 2 \frac{\partial N_{s_i}(x)}{\partial x} \frac{\partial N_{s_j}(y)}{\partial y} N_{s_k}(z) \cdot f_{xy}^n + 2 \frac{\partial N_{s_i}(x)}{\partial x} N_{s_j}(y) \frac{\partial N_{s_k}(z)}{\partial z} \cdot f_{xz}^n + 2 N_{s_i}(x) \frac{\partial N_{s_j}(y)}{\partial y} \frac{\partial N_{s_k}(z)}{\partial z} \cdot f_{yz}^n \right] dx dy dz.$$

注意到  $g_s$  项为三维积分,急剧增加总计算量,而事实上该项值相对较小,因此实际计算中常常忽略该项.

### 3.4 矩阵复合

回顾最优化问题(3),该问题可通过如下方程组求解:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ \vdots \\ c_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 + \omega_1 b_1 - \omega_2 g_1 \\ -f_2 + \omega_1 b_2 - \omega_2 g_2 \\ \vdots \\ -f_M + \omega_1 b_M - \omega_2 g_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ,  $A_{st} = L_{st} + \omega_1 N_{st} + \omega_2 G_{st}$ .

### 3.5 求解复合矩阵

对于一般线性方程组,有众多有效的数值解法,比如,对规模较小的方程组(如  $M \leq 2000$ ),可选用带列主元技巧的高斯消去法或 LU 分解法.若矩阵  $A$  正定,则可选用更为有效的 Cholesky 分解法.若矩阵是奇异的或数值奇异的,那么应使用 QR 分解或 SVD 分解法.

而对于大规模的稀疏线性方程组,则应采用更为有效的数值算法.因 B-样条函数具有局部支集性,故系数矩阵  $(A_{st})_{s,t=1}^M$  为稀疏矩阵,特别是当子域剖分数较大时.因此,我们推荐使用稳定双共扼梯度方法(BiCGSTAB)或广义最小冗余法(GMRES),结合不完全分解预条件方法,来求解线性方程组(8),详见文献[20].

## 4 单位分解方法

通过上节的算法,在第  $n$  层求得局部函数集  $\{f_j^n: \Omega_j^n \rightarrow R\}_{j=1}^{M_n}$ ,但若将这些函数直接合成为函数  $f: \Omega \rightarrow R$ ,将不能保证其整体的连续性,因此需采用某种特殊的合成方法,在此我们选用单位分解法.

作为一类特殊的域分解方法,单位分解法首先被 Franke 和 Nielson<sup>[21]</sup>融入有限元方法,用于解决网格构造时遇到的拓扑问题.近年来,该方法成为主流的研究方向之一,详见文献[22,23].Ohtake<sup>[16]</sup>创新性地将该方法应用于构造隐式函数.但本文方法与他的方法有所不同,本文构造的是层次隐式函数.单位分解法的作用是将局部逼近函数合成整体逼近函数,使得整体函数继承局部函数原有的属性,比如最大误差、收敛阶等,其基本思想是将定义域分解成若干个子区域,在每个子区域上分别作局部逼近,然后使用光滑、局部及单位化的权函数将各个子域上的局部逼近函数合成为整体连续函数.

具体地,设给定空间区域  $\Omega$  和非负紧支函数序列  $\{\varphi_j\}$  满足:

$$\sum_j \varphi_j(\mathbf{p}) = 1, \quad \forall \mathbf{p} \in \Omega,$$

若对  $\text{supp}(\varphi_j)$  赋予局部逼近函数集  $V_j$ ,那么函数  $f$  可按如下方式逼近:

$$f(\mathbf{p}) \approx \sum_j \varphi_j(\mathbf{p}) Q_j(\mathbf{p}),$$

其中  $Q_j \in V_j$ .

在第 2 节中,基于八-叉树结构,已给出定义域自适应分解算法,在此基础上,对第  $n$  层的每个单元  $\Omega_j^n, j = 1, 2, \dots, M_n$  可定义非负紧支函数:

$$w_j(\mathbf{p}) = b\left(\frac{3|\mathbf{p} - \mathbf{c}_j|}{2R_j}\right),$$

其中  $b(t)$  为二次规范 B-样条基函数,  $\mathbf{c}_j$  为单元中心,  $R_j$  为球形支集的半径.那么可构造如下单位分解函数:

$$\varphi_j(\mathbf{p}) = \frac{w_j(\mathbf{p})}{\sum_{i=1}^{M_n} w_i(\mathbf{p})}.$$

此时,若取  $Q_j = f_j^n$ ,那么使用单位分解方法可将局部函数集  $\{f_j^n\}_{j=1}^{M_n}$  合成为整体连续函数  $f^n$ .

## 5 计算实例与讨论

隐式曲面的常用可视化方法包括:多边形化、等值面提取、光线跟踪、体绘制等,详见文献[24].本文选用 Bloomenthal<sup>[25]</sup>的多边形化算法,因该方法不仅简单且具有良好的连续性.对于高质量的绘制,推荐自适应多边形化算法<sup>[26-28]</sup>或光线跟踪算法<sup>[29]</sup>.

本文提出构造层次隐式张量积 B-样条曲面的算法,不仅可被用于构建层次细节模型,而且可被用于曲面重构问题.下面,依据采样特性,给出计算实例并作简单讨论.

### 5.1 均匀稠密采样

以 Igea 人脸数据集为例,如图 2 所示.取最大细分层次为 5, Taubin 距离误差限为 0.0001, 在每个子区域上取等距节点序列与二次 B-样条基函数,每个单元最多样本数为 16,  $u=10$ ,  $v=10$ ,  $w=10$ , 分层逼近结果如图 3~图 7 所示.



Fig.2 134345 sampling points  
图 2 134345 个样本点



Fig.3 The 1st level of surface  
图 3 第 1 层曲面



Fig.4 The 2nd level of surface  
图 4 第 2 层曲面



Fig.5 The 3rd level of surface  
图 5 第 3 层曲面



Fig.6 The 4th level of surface  
图 6 第 4 层曲面



Fig.7 The 5th level of surface  
图 7 第 5 层曲面

### 5.2 自适应采样

以雕塑数据集为例,如图 8 所示.取最大细分层次为 5, Taubin 距离误差限为 0.0001, 在每个子区域上取等距节点序列与二次 B-样条基函数,每个单元最多样本数为 16,  $u=10$ ,  $v=12$ ,  $w=8$ , 计算结果如图 9~图 13 所示.



Fig.8 29171 sampling points

图 8 29171 个样本点



Fig.9 The 1st level of surface

图 9 第 1 层曲面



Fig.10 The 2nd level of surface

图 10 第 2 层曲面



Fig.11 The 3rd level of surface

图 11 第 3 层曲面



Fig.12 The 4th level of surface

图 12 第 4 层曲面



Fig.13 The 5th level of surface

图 13 第 5 层曲面

### 5.3 不完全或分布不均匀采样

取最大细分层次为 5, Taubin 距离误差限为 0.0001, 在每个子区域上取等距节点序列与二次 B-样条基函数, 每个单元最多样本数为 32,  $u=8$ ,  $v=8$ ,  $w=8$ , 分别以不完全采样与分布不均匀采样的数据集为例, 原始数据集如图 14、图 16 所示, 计算结果如图 15、图 17 所示. 结果表明本文的方法能够有效地处理这类数据集.



Fig.14 72545 points

图 14 72545 个样本点



Fig.15 The 5th level of surface

图 15 第 5 层曲面



Fig.16 28060 points

图 16 28060 个样本点



Fig.17 The 5th level of surface

图 17 第 5 层曲面

本文方法的计算复杂度不仅与样本点的个数, 逼近层次及逼近误差等相关, 且在每个局部子区域上与样条的次数及参数  $u$ ,  $v$ ,  $w$  的选取等相关, 涉及因数较多, 故目前未能给出理论上的分析. 我们使用 C++ 语言, 在 Windows XP 操作系统平台下实现了算法, 具体的计算时间参见表 1. 计算结果表明, 本文方法不仅能够很好地构



建层次细节模型,还能高质量地重构出原始曲面,并适用于各种采样特性的无结构散乱点数据集.

**Table 1** Computation cost, computation platform: P4 2.4 GHz CPU and 1GB DDR RAM PC

表 1 计算时间表,计算平台: P4 2.4GHz CPU 与 1GB DDR RAM 的普通微机

模型	样本点个数	$d$	$u, v, w$	层次逼近时间(s)	多边形化时间(s)	结果图表
Igea	134345	3	10,10,10	230.76	4.70	图 7
Sculpture	29171	3	10,12,8	97.28	4.70	图 13
Igea	72545	3	8,8,8	106.24	2.12	图 15
Bunny	28060	3	8,8,8	50.78	2.30	图 17

## 6 总 结

本文提出层次隐式张量积 B-样条曲面及其最优化模型,采用基于误差控制的细分方法对定义域作自适应分解,然后通过逐层求解最优化问题得到局部逼近函数,最后利用单位分解方法将各层局部逼近函数合成为整体连续函数.本文的方法不仅可被用于构建层次细节模型,而且可被用于解决曲面重构问题.计算结果表明该方法灵活、有效,具有良好的层次性与自适应性.然而,仍然存在如下一些问题有待进一步研究:

- 该方法中需要人为设定许多参数,譬如样条阶数  $d$ ; 剖分数  $u, v, w$ ; 权值  $\omega_1$  和  $\omega_2$ ; 支集半径  $R_j$  等,部分参数缺乏直观解释,如何自动或者较为直观的选取参数.
- 如何提高算法的自适应性、稳定性及计算效率.
- 尝试对样本数据做预处理,分析其几何性质,比如尖锐特征与边界特征的提取、曲率信息等,以提高细节层次化模型的质量.

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的中国科学技术大学数学系应用几何实验室的邓建松、杨周旺、徐晨东等以及给本文提出宝贵意见的评审专家表示感谢.同时,对无私提供三维扫描数据的斯坦福计算机图形学实验室、Cyberware 公司等致谢!

## References:

- [1] Clark J. Hierarchical geometric models for visible surface algorithms. *Communications of the ACM*, 1976,19(10):547–554.
- [2] Schröder WJ, Zarge JA, Lorensen WE. Decimation of triangle meshes. In: Catmull EE, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'92*. New York: ACM Press, 1992. 65–70.
- [3] Rossignac JR, Borrel P. Multi-Resolution 3D approximations for rendering complex scenes. In: Falcidieno B, Kunii TL, eds. *Geometric Modeling in Computer Graphics*. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 455–465.
- [4] Funkhouser TA, Séquin CH. Adaptive display algorithm for interactive frame rates during visualization of complex virtual environments. In: James TK, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'93*. New York: ACM Press, 1993. 247–254.
- [5] Foley D, Bartels R. Hierarchical B-spline refinement. In: John D, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'88*. New York: ACM Press, 1988. 205–212.
- [6] Foley D, Bartels R. Surface fitting with hierarchical splines. *ACM Trans. on Graphics*, 1995,14(2):134–161.
- [7] Garland M, Heckbert PS. Surface simplification using quadric error metrics. In: Turner W, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'97*. New York: ACM Press, 1997. 209–216.
- [8] Cohen J, Varshney A, Manocha D, Turk G, Weber H, Agarwal P, Brooks F, Wright W. Simplification envelopes. In: Rushmeier H, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'96*. New York: ACM Press, 1996. 119–128.
- [9] Cohen J, Olano M and Manocha D. Appearance-Preserving simplification. In: Rockwood A, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'98*. New York: ACM Press, 1998. 115–122.
- [10] Hoppe H. Progressive meshes. In: Rushmeier H, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'96*. New York: ACM Press, 1996. 99–108.
- [11] Hoppe H. View-Dependent refinement of progressive meshes. In: Turner W, ed. *Proc. of the SIGGRAPH'97*. New York: ACM Press, 1997. 189–198.

- [12] Losasso F, Hoppe H. Geometry clipmaps: Terrain rendering using nested regular grids. ACM Trans. on Graphics (Proc. of the SIGGRAPH 2004), 2004,23(3):769–776.
- [13] Carr JC, Beatson RK, Cherrle JB, Mitchell TJ, Fright WR, McCallum BC, Evans TR. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions. In: Lynn P, ed. Proc. of the SIGGRAPH 2001. New York: ACM Press, 2001. 67–76.
- [14] Zhao H, Osher S. Visualization, analysis and shape reconstruction of unorganized data sets. In: Osher S, Paragios N, eds. Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [15] Alexa M, Behr J, Cohen-Or D, Fleishman S, Levin D, Silva C. Point set surfaces. In: Hanspeter P, ed. Proc. of the Conf. on Visualization 2001. New York: IEEE Press, 2001. 21–28.
- [16] Ohtake Y, Belyaev A, Alexa M, Turk G, Seidel HP. Multi-Level partition of unity implicits. ACM Trans. on Graphics (Proc. of the SIGGRAPH 2003), 2003,22(3):463–470.
- [17] Muraki S. Volumetric shape description of range data using “Blobby Model”. In: Sederberg TH, ed. Proc. of the SIGGRAPH’91. New York: ACM Press, 1991. 227–235.
- [18] Jüttler B, Felis A. Least-Squares fitting of algebraic spline surfaces. Advances in Computational Mathematics, 2002,17(1): 135–152.
- [19] Taubin G. Estimation of planar curves, surfaces, and nonplanar space curves defined by implicit equations, with applications to edge and range image segmentation. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991,13(11):1115–1138.
- [20] Golub G, Van Loan CF. Matrix Computations. 3rd ed., Baltimore: John Hopkins University Press, 1996.
- [21] Franke R, Nielson G. Smooth interpolation of large sets of scattered data. Int’l Journal for Numerical Methods in Engineering, 1980, 15(11):1691–1704.
- [22] Griebel M, Schweitzer MA. Particle-Partition of unity method for the solution of elliptic, parabolic and hyperbolic PDE. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000,22(3):853–890.
- [23] Griebel M, Schweitzer MA. Particle-Partition of unity method-part III: A multilevel solver. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002,24(2):377–490.
- [24] Bloomenthal J, Bajaj C, Blinn J, Cani-Gascuel MP, Rockwood A, Wyvill, B, Wyvill G. Introduction to Implicit Surfaces. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 1997.
- [25] Bloomenthal J. An implicit surface polygonizer. In: Heckbert P, ed. Graphics Gems IV. San Diego: Academic Press Professional, 1994. 324–349.
- [26] Ju T, Losasso F, Schaefer S, Warren J. Dual contouring of hermite data. ACM Trans. on Graphics (Proc. of the SIGGRAPH 2002), 2002, 21(3):339–346.
- [27] Ohtake Y, Belyaev AG. Dual primal mesh optimization for polygonized implicit surfaces. In: Seidel HP, ed. Proc of the 7th ACM Symp. on Solid Modeling and Applications. New York: ACM Press, 2002.171–178.
- [28] Ronald JB, Kevin GS. Visualization of implicit surfaces. Computers & Graphics, 2001,25(1):89–107.
- [29] Hart JC. Sphere tracing: A geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces. The Visual Computer, 1996, 12(10):527–545.



童伟华(1978 - ),男,浙江衢州人,博士,讲师,主要研究领域为计算机图形学,计算机辅助几何设计.



陈发来(1966 - ),男,博士,教授,博士生导师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机图形学.



冯玉瑜(1940 - ),男,教授,博士生导师,主要研究领域为多变量逼近论,计算机辅助几何设计.