

Ball 基的推广*

沈莞菁⁺, 汪国昭

(浙江大学 数学系, 浙江 杭州 310027)

Extension of the Ball Basis

SHEN Wan-Qiang⁺, WANG Guo-Zhao

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-87931685, E-mail: wq_shen@163.com, http://www.zju.edu.cn

Received 2004-07-02; Accepted 2005-01-07

Shen WQ, Wang GZ. Extension of the ball basis. *Journal of Software*, 2005,16(11):1992-1999. DOI: 10.1360/jos161992

Abstract: A new series of the generalized Ball bases of degree- n with parameter k ($2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$) are constructed as the transition from Wang-Ball basis ($k=2$) to Said-Ball basis ($k = \lfloor n/2 \rfloor + 1$), and some properties of them are given. Then, the new generalized Ball curves are based on these new bases and the algorithms for recursive evaluation, degree-elevation, and degree-reduction are introduced. Finally, the corresponding trigonal Ball bases are shown and the algorithms for the recursive evaluation and degree-elevation of trigonal Ball surfaces are given.

Key words: Ball basis; Said-Ball basis; Wang-Ball basis; Bernstein basis; Bézier curve

摘要: 构造了一系列次数为 n 且带有参数 k ($2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$) 的新的广义 Ball 基, 作为 Wang-Ball 基 ($k=2$) 到 Said-Ball 基 ($k = \lfloor n/2 \rfloor + 1$) 的过渡, 并给出新基的一些性质. 接着, 由新基定义出新的广义 Ball 曲线, 给出曲线的递归求值、升阶和降阶逼近算法. 最后, 提出相应的三角基, 并给出三角曲面的递归求值和升阶算法.

关键词: Ball 基; Said-Ball 基; Wang-Ball 基; Bernstein 基; Bézier 曲线

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

自 1974 年英国数学家 Ball 在著名的 CONSURF 机身曲面造型系统中创造了一种有理三次参数曲线^[1-3]以来, 广义 Ball 曲线面的研究工作大量展开, 其中以胡事民等人^[4]命名的 Wang-Ball^[5]和 Said-Ball^[6]为主. 2000 年, 郭弘毅提出了两类新的广义 Ball 曲线^[7], 第 1 类介于 Wang 和 Said 之间, 第 2 类介于 Bézier 和 Said 之间. 2003 年, Delgado 和 Pena 为保形定义了一组基^[8], 有人称其为 DP-Ball.

广义 Ball 基与使用更多的 Bernstein 基相比, 前者的次数由两端向中间逐步升高, 而后的次数均相同. 因此, 广义 Ball 曲线面比 Bézier 曲线面的优势在于其求值及升降阶的计算速度, 文献[4]给出了具体系统的对比. 广义 Ball 基可以是多种多样的. 本文将构造一簇新的广义 Ball 基, 并给出相应曲线和三角面片的一些性质.

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60473130 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2004CB318000 (国家重点基础研究发展规划(973))

作者简介: 沈莞菁(1981-), 女, 江苏无锡人, 硕士, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学; 汪国昭(1944-), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 医学图像的三维重建.

1 推广的 Ball 基及其性质

1.1 新基的定义

引入一个整参数 $k(2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1)$, 次数为 n 的新基 $\{U_i^{n,k}(t)\}_{i=0}^n$ 定义如下:

- i) 当 $n \leq 2$ 时为 Bernstein 基;
- ii) 当 $n = 3$ 时为 Ball 基;
- iii) 当 $n > 3$ 时, 若 $k = 2$, 取 Wang-Ball 基; 若 $k = \lfloor n/2 \rfloor + 1$, 取 Said-Ball 基; 当 $2 < k < \lfloor n/2 \rfloor + 1$ 时,

$$U_i^{n,k}(t) = \begin{cases} a_i^{n,k} (1-t)^{i+k} t^i, & 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - k \\ a_i^{n,k} (1-t)^{\lfloor n/2 \rfloor + 1} t^i, & \lfloor n/2 \rfloor - k + 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ a_i^{n,k} (1-t)^{\lfloor n/2 \rfloor} t^{\lfloor n/2 \rfloor}, & i = \lfloor n/2 \rfloor \\ U_{n-i}^{n,k} (1-t), & \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (1)$$

其中, 系数 $a_i^{n,k}$ 由下式对 n 递推求得: 初值:

$$a_i^{2k-2,k} = \begin{cases} \binom{k-1+i}{i}, & 0 \leq i \leq k-2 \\ \binom{2k-2}{k-1}, & i = k-1 \\ a_{2k-2-i}^{2k-2,k}, & k \leq i \leq 2k-2 \end{cases}, \quad a_i^{2k-1,k} = \begin{cases} \binom{k-1+i}{i}, & 0 \leq i \leq k-1 \\ a_{2k-1-i}^{2k-1,k}, & k \leq i \leq 2k-1 \end{cases},$$

$$a_i^{n,k}(t) = \begin{cases} a_i^{n-2,k}, & 0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - k \\ \sum_{j=\lfloor n/2 \rfloor - k + 1}^i a_j^{n-2,k}, & \lfloor n/2 \rfloor - k + 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, \quad n \geq 2k \\ 2 \cdot a_{i-1}^{n,k}, & i = \lfloor n/2 \rfloor \\ a_{n-i}^{n,k}, & \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (2)$$

于是, 当 n 给定后, 每个整数 $k \in [2, \lfloor n/2 \rfloor + 1]$ 都对应一组基, 共有 $\lfloor n/2 \rfloor$ 组不同的广义 Ball 基. 图 1 给出了 $k=4, n=8$ 时基的图像.

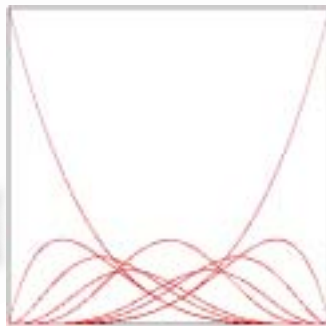


Fig.1 The image of basis when $k=4, n=8$
图 1 $k=4, n=8$ 时基的图像

1.2 新基的性质

对于给定的次数 n , 任意整数 $k \in [2, \lfloor n/2 \rfloor + 1]$, 新基有如下性质:

- 性质 1.1(正性). $0 \leq U_i^{n,k}(t) \leq 1, t \in [0, 1], i=0, 1, \dots, n.$
- 性质 1.2(权性). $\sum_{i=0}^n U_i^{n,k}(t) \equiv 1, t \in [0, 1].$
- 性质 1.3(对称性). $U_i^{n,k}(t) = U_{n-i}^{n,k}(1-t), t \in [0, 1], i=0, 1, \dots, n.$

性质 1.4(线性无关性). 基的必要条件,用数学归纳法易证得.

性质 1.5(与 Bernstein 基的互化). 假设

$$(U_0^{n,k}(t), \dots, U_n^{n,k}(t)) = (B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)) (u_{sl}^B)_{(n+1)}, (B_0^n(t), \dots, B_n^n(t)) = (U_0^{n,k}(t), \dots, U_n^{n,k}(t)) (b_{sl}^U)_{(n+1)}.$$

通过计算易得:

$$u_{sl}^B = \begin{cases} a_l^{n,k} \binom{n-k-2l}{s-l} / \binom{n}{s}, & 0 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor - k, l \leq s \leq n-k-l \\ a_l^{n,k} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - l - 1}{s-l} / \binom{n}{s}, & \lfloor n/2 \rfloor - k + 1 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, l \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ a_l^{n,k} / \binom{n}{s}, & \lfloor n/2 \rfloor \leq l \leq \lceil n/2 \rceil, s = l \\ a_l^{n,k} \binom{l - \lfloor n/2 \rfloor - 1}{l-s} / \binom{n}{s}, & \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor + k - 1, \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq s \leq l \\ a_l^{n,k} \binom{2l-k-n}{l-s} / \binom{n}{s}, & \lfloor n/2 \rfloor + k \leq l \leq n, k+n-l \leq s \leq l \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (3)$$

算法 1.1. Bernstein 基转化为新基.使用式(3)的 u_{sl}^B .

Step 1. 令 $b_{sl}^U = \begin{cases} (-1)^{s-l} \binom{n}{l} \binom{\lfloor n/2 \rfloor - l - 1}{s-l} / a_s^{n,k}, & \lfloor n/2 \rfloor - k + 1 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, l \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \\ \binom{n}{l} / a_l^{n,k}, & \lfloor n/2 \rfloor \leq l \leq \lceil n/2 \rceil, s = l \end{cases}$, 其余 $b_{sl}^U = 0$.

Step 2. 当 $0 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor - k$ 时, $b_{ll}^U = \binom{n}{l} / a_l^{n-2k}$, $b_{n-k-l,l}^U = -\binom{n}{l} / \left(\binom{n}{k+l} u_{l+k,l+k}^B \right)$.

- 当 $s = l+1, l+2, \dots, l+k-1$ 时, $b_{sl}^U = -\sum_{i=l}^{s-1} u_{si}^B \cdot b_{il}^U / u_{ss}^B$;
 若 $n-k-s \geq \lfloor n/2 \rfloor$, $b_{n-k-s,l}^U = -\left(\sum_{i=n-k-l}^{n-k-s+1} u_{n-k-s,i}^B \cdot b_{il}^U + \sum_{i=l}^{s-1} u_{n-k-s,i}^B \cdot b_{il}^U \right) / u_{n-k-s,n-k-s}^B$.
- 当 $s = l+k, l+k+1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ 时, $b_{sl}^U = -\left(\sum_{i=l}^{s-1} u_{si}^B \cdot b_{il}^U + \sum_{i=n-l}^{n+k-s} u_{si}^B \cdot b_{il}^U \right) / u_{ss}^B$;
 若 $n-k-s \geq \lfloor n/2 \rfloor$, $b_{n-k-s,l}^U = -\left(\sum_{i=n-k-l}^{n-k-s+1} u_{n-k-s,i}^B \cdot b_{il}^U + \sum_{i=l}^{s-1} u_{n-k-s,i}^B \cdot b_{il}^U \right) / u_{n-k-s,n-k-s}^B$.

Step 3. 当 $\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq l \leq n, 0 \leq s \leq n$ 时, $b_{sl}^U = b_{n-s,n-l}^U$.

性质 1.6(与幂基的互化). 假设 $(U_0^{n,k}(t), \dots, U_n^{n,k}(t)) = (1, \dots, t^n) (u_{sl}^F)_{(n+1)}$, $(1, \dots, t^n) = (U_0^{n,k}(t), \dots, U_n^{n,k}(t)) (f_{sl}^U)_{(n+1)}$. 计算

后易得:

$$u_{sl}^F = \begin{cases} (-1)^{s-l} a_l^{n,k}, & \{0 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor - k, l \leq s \leq k+2l\} \cup \{\lfloor n/2 \rfloor - k + 1 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1, l \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor + l + 1\} \\ & \cup \{\lfloor n/2 \rfloor \leq l \leq \lceil n/2 \rceil, l \leq s \leq n\} \\ (-1)^{s-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} a_l^{n,k}, & \{\lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor + k - 1, \lfloor n/2 \rfloor + 1 \leq s \leq n-l + \lfloor n/2 \rfloor + 1\} \\ (-1)^{s-n+l-k} a_l^{n,k}, & \{\lfloor n/2 \rfloor + k \leq l \leq n, k+n-l \leq s \leq k+2n-2l\} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

算法 1.2. 幂基转化为新基.

Step 1. 对于 $0 \leq l \leq \lfloor n/2 \rfloor$, $f_{ll}^U = 1/a_l^{n,k}$; 其余 $f_{sl}^U = 0$.

Step 2. 当 $0 \leq l \leq n$ 时,

- 当 $l+1 \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor - k$ 时, $f_{sl}^U = - \left(\sum_{i=\max\{l, \lfloor (s-k)/2 \rfloor\}}^{s-1} a_i^{n,k} \binom{i+k}{s-i} (-1)^{s-i} f_{il}^U \right) / a_s^{n,k}$.
- 当 $\max\{\lfloor n/2 \rfloor - k + 1, l\} \leq s \leq \lfloor n/2 \rfloor$ 时, $f_{sl}^U = - \left(\sum_{i=l}^{s-1} a_i^{n,k} \binom{\lfloor n/2 \rfloor + 1}{s-i} (-1)^{s-i} f_{il}^U \right) / a_s^{n,k}$.
- 当 $n \geq s \geq \lceil n/2 \rceil + k$ 时, $f_{sl}^U = \left(\binom{l}{n-s} - (-1)^{n-s} \sum_{i=s+1}^{\min\{n, \lfloor (n+s+k)/2 \rfloor\}} a_i^{n,k} \binom{n-i+k}{i-s} (-1)^{n-i} f_{il}^U \right) / a_s^{n,k}$.
- 当 $\min\{n, \lfloor n/2 \rfloor + k + 1\} \geq s \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ 时, $f_{sl}^U = \left(\binom{l}{n-s} - (-1)^{n-s} \sum_{i=s+1}^n a_i^{n,k} \binom{\lfloor n/2 \rfloor + 1}{i-s} (-1)^{n-i} f_{il}^U \right) / a_s^{n,k}$.

2 新曲线的性质

设 $\{Q_i\}_{i=0}^n \in \mathbb{R}^3$, 对于给定的任意整数 $k \in [2, \lfloor n/2 \rfloor + 1]$, 由新基给出新曲线:

$$U_k(t) = \sum_{i=0}^n U_i^{n,k}(t) Q_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \tag{4}$$

由新基的性质可知, 新曲线具有几何不变性、对称性、端点插值性、凸包性、变差缩减性、可离散性等几何性质, 适用于参数化几何造型设计.

当次数 n 给定后, 变动 k , 共能产生 $\lfloor n/2 \rfloor$ 条曲线. 图 2 给出当 $n=8$ 时, k 分别为 2, 3, 4, 5 时的新曲线. $k=2$ 和 5 时分别是 Wall-Ball 和 Said-Ball 曲线. 图中自上而下 k 值分别为 5, 4, 3, 2, 由图 2 可知, 这一系列曲线位于 Wall-Ball 和 Said-Ball 曲线之间. 并且, k 值越接近 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$, 曲线越接近控制多边形.



Fig.2 New curves when $k=2, \dots, 5$ and $n=8$
图 2 $n=8, k=2, \dots, 5$ 时的曲线

2.1 递归求值

算法 2.1. 递归求值. 仿照 Wang-Ball 和 Said-Ball 曲线, 给出新曲线的递归求值算法.

Step 1. 若 n 为奇数, 取 $\tilde{Q}_i = \begin{cases} Q_i, & 0 \leq i \leq (n-3)/2 \\ (1-t)Q_{(n-1)/2} + tQ_{(n+1)/2}, & i = (n-1)/2 \\ Q_{i+1}, & (n+1)/2 \leq i \leq n-1 \end{cases};$

若 n 为偶数, 取 $Q_i^* = \begin{cases} Q_i, & 0 \leq i \leq n/2 - k, n/2 + k \leq i \leq n \\ Q_{n/2}, & i = n/2 \\ (1-t)Q_i + tQ_{i+1}, & n/2 - 1 \geq i \geq n/2 - k + 1 \\ (1-t)Q_{i-1} + tQ_i, & n/2 + 1 \leq i \leq n/2 + k - 1 \end{cases}$, 进一步取 $\tilde{Q}_i = \begin{cases} Q_i^*, & 0 \leq i \leq n/2 - 1 \\ Q_{i+1}^*, & n/2 \leq i \leq n-1 \end{cases};$

最后, 以 $\{\tilde{Q}_i\}_{i=0}^{n-1}$ 为控制顶点, 得到 $n-1$ 次的新曲线, 代替原 n 次的曲线.

Step 2. $n \leftarrow n-1$. 若 $n \geq 3$, 则置 $Q_i = \tilde{Q}_i, i = 0, 1, \dots, n$, 返回 Step 1.

Step 3. 执行 $Q = (1-t)\tilde{Q}_0 + t\tilde{Q}_1, R = (1-t)\tilde{Q}_1 + t\tilde{Q}_2, U_k(t) = (1-t)Q + tR$.

这一算法的正确性依赖于等式 $\sum_{i=0}^n U_i^{n,k}(t) Q_i = \sum_{i=0}^{n-1} U_i^{n-1,k}(t) \tilde{Q}_i, n \geq 3$. 当 n 为奇数时, 由式(1)很容易得到. 当 $n \geq 4$ 为偶数时, 利用对称性和恒等式 $(1-t)^{s+1}t^l + (1-t)^s t^{l+1} = (1-t)^s t^l$ 可知算法正确.

图 3 给出 $k=3, n=6$ 时的情况. 容易看出, 算法 2.1 中, 当 n 为奇数或偶数时, 生成新点的个数分别为 $(n+1)/2 + (k-1)(n-k+1)$ 和 $n/2 + (k-1)(n-k+2)$, 即所需加法数等于新点个数, 而乘法数则是加法的两倍. 因此, 随着 k 的增大, 递归求值的时间复杂度增加.

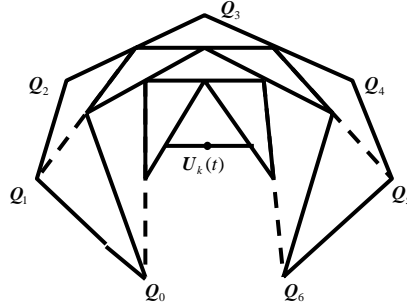


Fig.3 Recursively evaluating when $k=3, n=6$

图3 $k=3, n=6$ 时的递归求值

2.2 升阶和降阶

算法 2.2. 升阶.

- 若 n 为偶数, 取 $\hat{Q}_i = \begin{cases} Q_i, & 0 \leq i \leq 2 \\ Q_{n/2}, & i = n/2 + 1 \\ Q_{i-1}, & n/2 + 2 \leq i \leq n + 1 \end{cases}$.
- 若 n 为奇数, 设 $\lambda_i^k = a_i^{n,k} / \sum_{j=(n+1)/2-k+1}^i a_j^{n,k}, (n+1)/2 - k + 1 \leq i \leq (n-1)/2$, 取 $\hat{Q}_i = \begin{cases} Q_i, & 0 \leq i \leq (n+1)/2 - k \\ Q_{i-1}, & (n+1)/2 + k \leq i \leq n + 1 \\ \lambda_i^k Q_i + (1 - \lambda_i^k) \hat{Q}_{i-1}, & (n+1)/2 - k + 1 \leq i \leq (n-1)/2. \\ \lambda_{n+1-i}^k Q_{i-1} + (1 - \lambda_{n+1-i}^k) \hat{Q}_{i+1}, & (n-1)/2 + k \geq i \geq (n+3)/2 \\ (\hat{Q}_{(n-1)/2} + \hat{Q}_{(n+3)/2})/2, & i = (n+1)/2 \end{cases}$.

则 $U_k(t) = \sum_{i=0}^{n+1} U_i^{n+1,k}(t) \hat{Q}_i$ 是式(4)所表示曲线的升阶曲线.

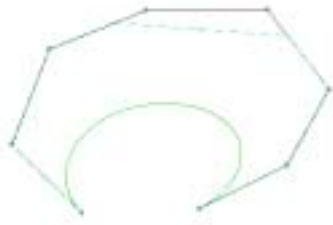


Fig.4 Degree elevating when $n=7, k=3$

图4 $n=7, k=3$ 时的升阶情况

图4 给出 $n=7, k=3$ 时曲线升阶的情况, 升阶后的控制顶点, 控制多边形用虚线表示.

对于降阶, 首先给出精确降阶的充要条件: $Q_{n/2-1} + Q_{n/2+1} - 2Q_{n/2} = 0, n$ 为偶数; $Q_{(n-1)/2} - Q_{(n+1)/2} = 0, n$ 为奇数. 为了

实现降阶逼近, 可对原曲线(3.1)的每个控制顶点 Q_i 加一个小扰动 ε_i , 使得新曲线 $\bar{U}_k(t) = \sum_{i=0}^n U_i^{n,k}(t)(Q_i + \varepsilon_i)$ 满足降阶条件,

再用 $\sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|^2 = \min$ 确定 ε_i .

算法 2.3. 降阶逼近.

- 若 n 为偶数, $Q_{n/2-1} \leftarrow Q_{n/2-1} - (Q_{n/2-1} + Q_{n/2+1} - 2Q_{n/2})/6, Q_{n/2+1} \leftarrow Q_{n/2+1} - (Q_{n/2-1} + Q_{n/2+1} - 2Q_{n/2})/6,$

$$Q_{n/2} \leftarrow Q_{n/2} + \frac{Q_{n/2-1} + Q_{n/2+1} - 2Q_{n/2}}{3}; \bar{Q}_i = \begin{cases} Q_i, & 0 \leq i \leq n/2 - k + 1 \\ \frac{a_i^{n,k}}{a_i^{n,k} - a_{i-1}^{n,k}} Q_i - \frac{a_{i-1}^{n,k}}{a_i^{n,k} - a_{i-1}^{n,k}} Q_{i-1}, & n/2 - k + 2 \leq i \leq n/2 - 1 \\ \frac{a_{n-i}^{n,k}}{a_{n-i-1}^{n,k} - a_{n-i-2}^{n,k}} Q_{i+1} - \frac{a_{n-i-2}^{n,k}}{a_{n-i-1}^{n,k} - a_{n-i-2}^{n,k}} Q_{i+2}, & n/2 \leq i \leq n/2 + k - 3 \\ Q_{i+1}, & n/2 + k - 2 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

- 若 n 为奇数, $\bar{Q}_i = \begin{cases} Q_i, & 0 \leq i \leq (n-3)/2 \\ (Q_{(n-1)/2} + Q_{(n+1)/2})/2, & i = (n-1)/2 \\ Q_{i+1}, & (n+1)/2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$.

于是, $\bar{U}_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} U_i^{n-1,k}(t) \bar{Q}_i$ 是式(4)所表示曲线的降阶逼近曲线.

图 5、图 6 分别给出 $n=7, k=3$ 和 $n=8, k=4$ 时的降阶情况.降阶后的控制多边形和曲线用虚线表示.

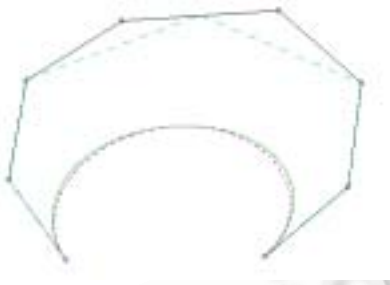


Fig.5 Degree reducing when $n=7, k=3$

图 5 $n=7, k=3$ 时的降阶情况

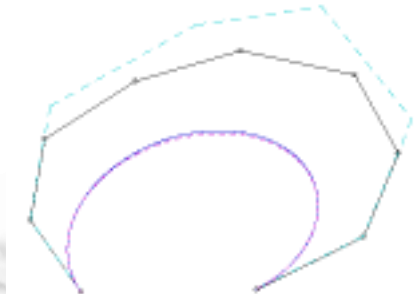


Fig.6 Degree reducing when $n=8, k=4$

图 6 $n=8, k=4$ 时的降阶情况

3 新三角曲面性质

3.1 新三角基

相应于 Bézier 三角面片的控制网格 $\{Q_{m,s,l}, m+s+l=n\}$, 构造新三角基, 以产生新三角 Ball 曲面:

$$U_k(u, v, w) = \sum_{m+s+l=n} U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w) Q_{m,s,l}, \quad u, v, w \geq 0, \quad u+v+w=1 \quad (5)$$

新基 $U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w)$ (以下简称为 $U_{m,s,l}^{n,k}$) 需满足以下条件:

- (1) $0 \leq U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w) \leq 1, u, v, w \geq 0, u+v+w=1$;
- (2) $\sum_{m+s+l=n} U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w) \equiv 1, u, v, w \geq 0, u+v+w=1$;
- (3) 当 u, v, w 之一为 0 时, $U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w)$ 退化为单元新基.

定义. 三角基 $U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w)$ (以下简称为 $U_{m,s,l}^{n,k}$). 对于给定的任意整数 $k \in [2, \lfloor n/2 \rfloor + 1]$, 令 $U_{100}^{1,k} = u, U_{010}^{1,k} = v, U_{001}^{1,k} = w$.

• n 为奇数时,

- ◇ 当 m 或 s 或 $l = n, n-1, \dots, (n+3)/2$ 时, 分别有 $U_{m,s,l}^{n,k} = U_{m-1,s,l}^{n-1,k}, U_{m,s,l-1}^{n-1,k}, U_{m,s,l-1}^{n-1,k}$;
- ◇ 当 m 或 s 或 $l = (n+1)/2$ 时, 分别有 $U_{m,s,l}^{n,k} = uU_{m-1,s,l}^{n-1,k}, vU_{m,s-1,l}^{n-1,k}, wU_{m,s,l-1}^{n-1,k}$;
- ◇ 否则, 当全部 $m, s, l \leq (n-1)/2$ 时, $U_{m,s,l}^{n,k} = uU_{m-1,s,l}^{n-1,k} + vU_{m,s-1,l}^{n-1,k} + wU_{m,s,l-1}^{n-1,k}$.

• n 为偶数时,

- ◇ 当 $n/2+k \leq m$ 或 s 或 $l \leq n$ 时, 分别有 $U_{m,s,l}^{n,k} = U_{m-1,s,l}^{n-1,k}, U_{m,s-1,l}^{n-1,k}, U_{m,s,l-1}^{n-1,k}$;
- ◇ 当 m 或 s 或 $l = n/2+k-1$ 时, 分别有 $U_{m,s,l}^{n,k} = uU_{m-1,s,l}^{n-1,k}, vU_{m,s-1,l}^{n-1,k}, wU_{m,s,l-1}^{n-1,k}$;
- ◇ 令 $i = n/2+k-2, n/2+k-3, \dots, n/2+1$, 依次分别有 $\{U_{i,s,l}^{n,k} = uU_{i-1,s,l}^{n-1,k} + vU_{i+1,s-1,l}^{n-1,k} + wU_{i+1,s,l-1}^{n-1,k}, U_{m,i,l}^{n,k} = vU_{m,i-1,l}^{n-1,k} + uU_{m,i+1,l}^{n-1,k} + wU_{m,i,l-1}^{n-1,k}, U_{m,s,i}^{n,k} = wU_{m,s,i-1}^{n-1,k} + uU_{m-1,s,i+1}^{n-1,k} + vU_{m,s-1,i+1}^{n-1,k}\}$;
- ◇ 当 m 或 s 或 $l = n/2$ 时, 设常数 $C = n/2$, 则

$$U_{C,C,0}^{n,k}, U_{0,C,C}^{n,k}, U_{C,0,C}^{n,k} = \frac{v}{u} U_{C+1,C-1,0}^{n,k} + \frac{u}{v} U_{C-1,C+1,0}^{n,k}, \frac{v}{w} U_{0,C-1,C+1}^{n,k} + \frac{w}{v} U_{0,C+1,C-1}^{n,k}, \frac{w}{u} U_{C+1,0,C-1}^{n,k} + \frac{u}{w} U_{C-1,0,C+1}^{n,k}$$

$$\text{其余, } U_{C,s,l}^{n,k} = uU_{C-1,s,l}^{n-1,k} + v/uU_{C+1,s-1,l}^{n,k} + w/uU_{C+1,s,l-1}^{n,k}, U_{m,C,l}^{n,k} = vU_{m,C-1,l}^{n-1,k} + u/vU_{m-1,C+1,l}^{n,k} + w/vU_{m,C+1,l-1}^{n,k},$$

$$U_{m,s,C}^{n,k} = wU_{m,s,C-1}^{n-1,k} + u/wU_{m-1,s,C+1}^{n,k} + v/wU_{m,s-1,C+1}^{n,k};$$

◇ 当全部 $m, s, l \leq n/2 - 1$ 时, $U_{m,s,l}^{n,k} = uU_{m-1,s,l}^{n-1,k} + vU_{m,s-1,l}^{n-1,k} + wU_{m,s,l-1}^{n-1,k}$.

这样递归得到的 $\{U_{m,s,l}^{n,k}(u, v, w), m + s + l = n\}$ 即为满足条件(1)~(3)的新三角基.

3.2 三角曲面的递归求值

算法 3.1. 递归求值. 对 n 次三角曲面(式(5)), 令 $Q_{m,s,l}^{(n)} = Q_{m,s,l}$.

Step 1. 若 n 为奇数, 对 $s + m + l = n - 1$,

◇ 当 m 或 s 或 $l \geq (n + 1)/2$ 时, 分别取 $Q_{m,s,l}^{(n-1)} = Q_{m+1,s,l}^{(n)}, Q_{m,s+1,l}^{(n)}, Q_{m,s,l+1}^{(n)}$;

◇ 否则, 当全部 $m, s, l \leq (n - 1)/2$ 时, $Q_{m,s,l}^{(n-1)} = uQ_{m+1,s,l}^{(n)} + vQ_{m,s+1,l}^{(n)} + wQ_{m,s,l+1}^{(n)}$.

若 n 为偶数, 对 $s + m + l = n - 1$,

◇ 当全部 $m, s, l \leq n/2$ 时, $Q_{m,s,l}^{(n-1)} = uQ_{m+1,s,l}^{(n)} + vQ_{m,s+1,l}^{(n)} + wQ_{m,s,l+1}^{(n)}$;

◇ 当 $n/2 + k - 1 \leq m$ 或 s 或 $l \leq n - 1$ 时, 分别取 $Q_{m,s,l}^{(n-1)} = Q_{m+1,s,l}^{(n)}, Q_{m,s+1,l}^{(n)}, Q_{m,s,l+1}^{(n)}$;

◇ 否则, 当 m 或 s 或 $l = n/2 + 1, n/2 + 2, \dots, n/2 + k - 2$ 时, 分别取

$$Q_{m,s,l}^{(n-1)} = uQ_{m+1,s,l}^{(n)} + vQ_{m-1,s+1,l}^{(n-1)} + wQ_{m-1,s,l+1}^{(n-1)}, uQ_{m+1,s-1,l}^{(n-1)} + vQ_{m,s+1,l}^{(n-1)} + wQ_{m,s-1,l+1}^{(n-1)}, uQ_{m+1,s,l-1}^{(n-1)} + vQ_{m,s+1,l-1}^{(n-1)} + wQ_{m,s,l+1}^{(n-1)}.$$

Step 2. $n \leftarrow n - 1$. 若 $n=0$ 时停止, 否则返回 Step 1.

Step 3. $U_k(u, v, w) = Q_{000}^{(0)}$.

3.3 三角曲面的升阶

算法 3.2. 求 n 次三角基的系数 $\{C_{m,s,l}^{n,k}, m + s + l = n\}$.

Step 1. 设 $C_{100}^{1,k} = C_{010}^{1,k} = C_{001}^{1,k} = 1$.

Step 2. 对于 $m + s + l = n, n = 2, 3, \dots$,

➢ 当 n 为奇数时,

◇ 当 $(n + 1)/2 \leq m$ 或 s 或 $l \leq n$ 时, 分别取 $C_{m,s,l}^{n,k} = C_{m-1,s,l}^{n-1,k}, C_{m,s-1,l}^{n-1,k}, C_{m,s,l-1}^{n-1,k}$;

◇ 当全部 $m, s, l \leq (n - 1)/2$ 时, $C_{m,s,l}^{n,k} = C_{m-1,s,l}^{n-1,k} + C_{m,s-1,l}^{n-1,k} + C_{m,s,l-1}^{n-1,k}$.

➢ 当 n 为偶数时,

◇ 当 $n/2 + k - 1 \leq m$ 或 s 或 $l \leq n$ 时, 分别取 $C_{m,s,l}^{n,k} = C_{m-1,s,l}^{n-1,k}, C_{m,s-1,l}^{n-1,k}, C_{m,s,l-1}^{n-1,k}$;

◇ 当 m 或 s 或 $l = n/2 + k - 2, n/2 + k - 3, \dots, n/2$ 时, 依次分别取

$$C_{m,s,l}^{n,k} = C_{m-1,s,l}^{n-1,k} + C_{m+1,s-1,l}^{n,k} + C_{m+1,s,l-1}^{n,k}, C_{m-1,s+1,l}^{n,k} + C_{m,s-1,l}^{n-1,k} + C_{m,s+1,l-1}^{n,k}, C_{m-1,s,l+1}^{n,k} + C_{m,s-1,l+1}^{n,k} + C_{m,s,l-1}^{n-1,k};$$

◇ 然后, 令 $C = n/2$, 有

$$C_{C,C,0}^{n,k}, C_{C,0,C}^{n,k}, C_{0,C,C}^{n,k} = C_{C+1,C-1,0}^{n,k} + C_{C-1,C+1,0}^{n,k}, C_{C+1,0,C-1}^{n,k} + C_{C-1,0,C+1}^{n,k}, C_{0,C+1,C-1}^{n,k} + C_{0,C-1,C+1}^{n,k};$$

◇ 否则, 当全部 $m, s, l \leq n/2 - 1$ 时, $C_{m,s,l}^{n,k} = C_{m-1,s,l}^{n-1,k} + C_{m,s-1,l}^{n-1,k} + C_{m,s,l-1}^{n-1,k}$.

算法 3.3. 升阶. 设三角曲面(式(5))升阶到 $n+1$ 次的新三角曲面, 升阶后的控制顶点为 $\{\hat{Q}_{m,s,l}, m + s + l = n + 1\}$.

➢ 当 n 为偶数时,

◇ 当 $n/2 \leq m$ 或 s 或 $l \leq n + 1$ 时, 分别取 $\hat{Q}_{m,s,l} = Q_{m-1,s,l}, Q_{m,s-1,l}, Q_{m,s,l-1}$;

◇ 否则, 当全部 $m, s, l \leq n/2 - 1$ 时, $\hat{Q}_{m,s,l} = (C_{m-1,s,l}^{n,k} Q_{m-1,s,l} + C_{m,s-1,l}^{n,k} Q_{m,s-1,l} + C_{m,s,l-1}^{n,k} Q_{m,s,l-1}) / C_{m,s,l}^{n+1,k}$.

➢ 当 n 为奇数时,

◇ 当 $(n + 1)/2 + k - 1 \leq m$ 或 s 或 $l \leq n + 1$ 时, 分别取 $\hat{Q}_{m,s,l} = Q_{m-1,s,l}, Q_{m,s-1,l}, Q_{m,s,l-1}$;

◇ 当 $(n+1)/2 \leq m$ 或 s 或 $l \leq (n+1)/2 + k - 2$ 时,依次分别取

$$\hat{Q}_{m,s,l} = C_{m-1,s,l}^{n,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} Q_{m-1,s,l} + C_{m+1,s-1,l}^{n+1,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} \hat{Q}_{m+1,s-1,l} + C_{m+1,s,l-1}^{n+1,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} \hat{Q}_{m+1,s,l-1},$$

$$\hat{Q}_{m,s,l} = C_{m-1,s+1,l}^{n+1,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} \hat{Q}_{m-1,s+1,l} + C_{m,s-1,l}^{n,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} Q_{m,s-1,l} + C_{m,s+1,l-1}^{n+1,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} \hat{Q}_{m,s+1,l-1},$$

$$\hat{Q}_{m,s,l} = C_{m-1,s,l+1}^{n+1,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} \hat{Q}_{m-1,s,l+1} + C_{m,s-1,l+1}^{n+1,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} \hat{Q}_{m,s-1,l+1} + C_{m,s,l-1}^{n,k} / C_{m,s,l}^{n+1,k} Q_{m,s,l-1};$$

◇ 然后,令 $\hat{Q}_{(n+1)/2,(n+1)/2,0} = (C_{(n+3)/2,(n-1)/2,0}^{n+1,k} \hat{Q}_{(n+3)/2,(n-1)/2,0} + C_{(n-1)/2,(n+3)/2,0}^{n+1,k} \hat{Q}_{(n-1)/2,(n+3)/2,0}) / C_{(n+1)/2,(n+1)/2,0}^{n+1,k}$,
 $\hat{Q}_{(n+1)/2,0,(n+1)/2} = (C_{(n+3)/2,0,(n-1)/2}^{n+1,k} \hat{Q}_{(n+3)/2,0,(n-1)/2} + C_{(n-1)/2,0,(n+3)/2}^{n+1,k} \hat{Q}_{(n-1)/2,0,(n+3)/2}) / C_{(n+1)/2,0,(n+1)/2}^{n+1,k}$,
 $\hat{Q}_{0,(n+1)/2,(n+1)/2} = (C_{0,(n+3)/2,(n-1)/2}^{n+1,k} \hat{Q}_{0,(n+3)/2,(n-1)/2} + C_{0,(n-1)/2,(n+3)/2}^{n+1,k} \hat{Q}_{0,(n-1)/2,(n+3)/2}) / C_{0,(n+1)/2,(n+1)/2}^{n+1,k}$;

◇ 当全部 $m, s, l \leq (n+1)/2 - 1$ 时, $\hat{Q}_{m,s,l} = (C_{m-1,s,l}^{n,k} Q_{m-1,s,l} + C_{m,s-1,l}^{n,k} Q_{m,s-1,l} + C_{m,s,l-1}^{n,k} Q_{m,s,l-1}) / C_{m,s,l}^{n+1,k}$.

4 结 论

本文引入了一个依赖于次数 n 的整参数 $k \in [2, \lfloor n/2 \rfloor + 1]$, 构造了一簇新的广义 Ball 基. 当 k 为 2 和 $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ 时, 分别是 Wall-Ball 基和 Said-Ball 基. 因此, 这一系列广义 Ball 基可以看作是 Wall-Ball 基到 Said-Ball 基的过渡. 类似于文献[9]中的第 2 簇基 $NB_2^n(u; L)$, 都可以应用在综合考虑曲线的位置及计算效率都比较重要的情况下. 具体来说, 相同的是都从两端 k 次出发, 总共可以得到 $\lfloor n/2 \rfloor$ 组相异的基; 不同的是, NB_2^n 先升 1 次, 后升 2 次, 而这里采用先升 2 次, 后升 1 次的方法来产生新基簇.

在图 7 中, $n=8$, 本文的曲线用实线表示, 自上而下 k 分别为 5, 4, 3, 2; 邬弘毅的 NB_2^n 用虚线表示, 自上而下 L 分别为 0, 1, 2, 3. 其中, $k=5$ 与 $L=0$ 重合, 为 Said-Ball 曲线; $k=2$ 与 $L=3$ 重合, 为 Wang-Ball 曲线. 从图中可以看出, 中间部分本文的曲线较接近控制多边形, 两端部分 NB_2^n 曲线较接近控制多边形.

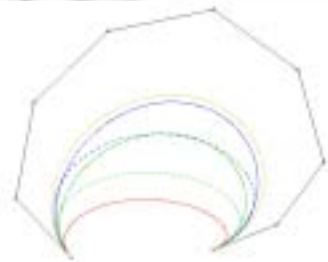


Fig.7 Comparing with Wu's curves
图 7 与邬的曲线进行比较

致谢 在此,我们向对本文的工作给予支持和建议的编辑和审稿人表示感谢.

References:

[1] Ball AA. CONSURF, Part 1: Introduction to the conic lofting title. Computer Aided Design, 1974,6(4):243-249.
 [2] Ball AA. CONSURF, Part 2: Description of the algorithms. Computer Aided Design, 1975,7(4):237-242.
 [3] Ball AA. CONSURF, Part 3: How the program is used. Computer Aided Design, 1977,9(1):9-12.
 [4] Hu SM, Wang GZ, Jin TG. Properties of two types of generalized Ball curves. Computer Aided Design, 1996,28(2):125-133.
 [5] Wang GJ. Ball curve of high degree and its geometric properties. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 1987, 2(1):126-140 (in Chinese with English abstract).
 [6] Said HB. Generalized Ball curve and its recursive algorithm. ACM Trans. on Graphics, 1989,8(4):360-371.
 [7] Wu HY. Two new types of generalized Ball curves. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2000,23(2):196-205 (in Chinese with English abstract).
 [8] Delgado J, Pena JM. A shape preserving representation with an evaluation algorithm of linear complexity. Computer Aided Geometric Design, 2003,20(1):1-10.
 [9] Wu HY. Unifying representation of Bézier curve and generalized Ball curves. Applied Mathematics: A Journal of Chinese Universities, 2000,15(1):109-121.

附中中文参考文献:

[5] 王国瑾. 高次 Ball 曲线及其几何性质. 高校应用数学学报, 1987, 2(1): 126-140.
 [7] 邬弘毅. 两类新的广义 Ball 曲线. 应用数学学报, 2000, 23(2): 196-205.