1000-9825/2005/16(07)1197 ©2005 Journal of Software 软 件 学 报 Vol.16, No.7

粗代数研究*

代建华[1,2+], 潘云鹤[1,2]

[1](浙江大学 人工智能研究所,浙江 杭州 310027)
[2](浙江大学 计算机科学与技术学院,浙江 杭州 310027)

On Rough Algebras

DAI Jian-Hua[1,2+], PAN Yun-He[1,2]

[1](Institute of Artificial Intelligence, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)
[2](College of Computer Science and Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)
+ Corresponding author: Phn: +86-571-88215814, E-mail: jhdai@126.com, http://www.zju.edu.cn
Received 2004-05-16; Accepted 2005-02-03

Dai JH, Pan YH. On rough algebras. *Journal of Software*, 2005,16(7):1197−1204. DOI: 10.1360/jos161197

Abstract: Description of the pairs ⟨low approximation, upper approximation⟩ of rough sets is an important aspect in the research of rough set theory by algebraic method. By defining some basic operators on the approximation pairs, rough algebras can be constructed. Then some general algebras can be selected to describe the pairs of rough sets. The most famous rough algebras are Rough Double Stone Algebra, Rough Nelson Algebra and Approximation Space Algebra, and their corresponding general algebra structures are regular double Stone algebra, semi-simple Nelson algebra and pre-rough algebra respectively. This paper establishes the relations between the operators of these rough algebras and proves that: (a) approximation space algebra can be made into semi-simple Nelson algebra or regular double Stone algebra; (b) rough Nelson algebra can be made into pre-rough algebra or regular double Stone algebra; (c) rough double Stone algebra can be made into pre-rough algebra or semi-simple Nelson algebra. Thus, a uniform structure for the famous works from three different aspects is built and the relations among them are established.
Key words: rough set; rough algebras; approximations pair

摘 要: 在粗糙集的代数方法研究中,一个重要的方面是从粗糙集的偶序对(⟨下近似集,上近似集⟩)表示入手,通过定义偶序对的基本运算,从而构造出相应粗代数,并寻找能够抽象刻画偶序对性质的一般代数结构.其中最有影响的粗代数分别是粗双 Stone 代数、粗 Nelson 代数和近似空间代数,它们对应的一般代数结构分别是正则双 Stone 代数、半简单 Nelson 代数和预粗代数.通过建立这些粗代数中算子之间的联系,证明了:(a) 近似空间代数可转化为半简单 Nelson 代数和正则双 Stone 代数;(b) 粗 Nelson 代数可转化为预粗代数和正则双 Stone 代数;

* Supported by the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2002CB312106 (国家重点基础研究发展规划(973)); the China Postdoctoral Science Foundation under Grant No.2004035715 (中国博士后科学基金); the Science-Technology Program of Zhejiang Province of China under Grant No.2004C31098 (浙江省科技计划)

作者简介: 代建华(1977－),男,湖北荆州人,博士,主要研究领域为粗糙集理论及应用,数据挖掘,人工智能,演化计算;潘云鹤(1946－),男,教授,博士生导师,中国工程院院士,主要研究领域为人工智能,形象思维科学,智能计算机辅助设计,计算机美术.

(c) 粗双 Stone 代数可化为预粗代数和半简单 Nelson 代数,从而将 3 个不同角度的研究统一了起来.
关键词: 粗糙集;粗代数;近似偶序对
中图法分类号: TP18 **文献标识码**: A

粗糙集理论作为一种处理含糊和不精确性与不完全数据的数学工具,最初由波兰数学家 Pawlak 提出.粗糙集理论建立在分类机制的基础上,将知识理解成对数据的划分,这种划分是在特定空间上由等价关系构成的[1].近年来,粗糙集理论已被广泛应用到机器学习、模式识别和数据挖掘等多个领域[2,3].

用代数的方法对粗糙集进行研究吸引了大量学者和研究人员[4−12].Cattaneo 注重于用代数的手段建立粗糙集和模糊集的联系[4].用代数方法对粗糙集理论自身进行的研究,似乎可以按照入手角度分为两类.一类从近似(approximations)入手,用算子的观点来抽象地看待近似,从而在一些代数结构中定义出两个近似算子.在 Pawlak 提出的粗糙集理论中,下近似和上近似构成了其核心内容,他最初提出的粗糙集一般用等价关系来定义,近似则是以集合的形式(下近似集与上近似集)来表现.加拿大学者 Yao[5]将粗糙集理论解释为集论的扩展,即把近似算子看成在集论上添加的一元算子,即在基本系统($2^U,\cap,\cup,\sim$)上引入近似算子 L 和 H,从而构造称为粗糙集代数的系统($2^U,\cap,\cup,\sim,L,H$),这种解释与将模态逻辑解释为经典二值逻辑增加两个一元算子而成是一致的.进一步地,将集合代数抽象成布尔代数,挪威学者 Jarvinen 基于原子布尔代数,通过原子定义了下近似和上近似[6].文献[7]还将分子格引入到了粗糙集研究中,构建了基于分子格的粗近似结构,从而实现对粗糙集理论的进一步推广.另一类则是从粗糙集的偶序对(如⟨下近似集,上近似集⟩)表示入手,通过定义偶序对的基本运算,从而构造出相应粗代数,并寻找能够抽象刻画偶序对性质的一般代数结构,如波兰学者 Pomykala 等人的 Stone 代数[8]、Comer 的正则双 Stone 代数[9,10]、印度学者 Banerjee 的预粗代数(pre-rough algebra)[11]和意大利学者 Pagliani 的半简单 Nelson 代数[12]等.

在第 2 类方法中,Banerjee 构造的粗代数称为近似空间代数,她的主要结论是,近似空间代数是一个预粗代数;Pagliani 构造的粗代数称为粗 Nelson 代数,他的主要结论是,粗 Nelson 代数是一个半简单 Nelson 代数;Comer 构造的粗代数称为粗双 Stone 代数,他的主要结论是,粗双 Stone 代数是一个正则双 Stone 代数.一个自然的想法是,既然他们都是研究偶序对的代数刻画,那他们的研究工作彼此之间的有着什么样的联系吗?本文正是试图回答这一问题.

本文将 Banerjee,Pagliani 和 Comer 的工作联系了起来,证明了:(a) 近似空间代数可化为半简单 Nelson 代数和正则双 Stone 代数;(b) 粗 Nelson 代数可化为预粗代数和正则双 Stone 代数;(c) 粗双 Stone 代数可化为预粗代数和半简单 Nelson 代数.

1 几种典型的粗代数

1.1 粗糙集相关概念

设 U 为论域,R 为 U 上的等价关系,则偶序对(U,R)构成近似空间.对每个近似空间(U,R),设 2^U 为 U 的幂集,则基于 2^U 可以定义如下两个算子:

对于任意的 $X\subseteq U$,定义

$$R\_(X)=\bigcup\{[x]_R \mid [x]_R\subseteq X\} \tag{1}$$

$$R^-(X)=\bigcup\{[x]_R \mid [x]_R\cap X\neq\varnothing\} \tag{2}$$

其中 $R_(X)$为 X 的下近似集合,$R^-(X)$为上近似集合.下近似集合是包含在 X 里面的等价类的并集,而上近似集合则是那些与 X 有交的等价类的并集.下近似集被解释为那些一定属于 X 的对象,而上近似集则被解释为那些可能属于 X 的对象集合.

如果 $R\_(X)=R^-(X)$,则 X 是精确的(或称为可定义的),否则是粗糙的.对于一个粗糙集合 X,可用偶序对$\langle R_(X),R^-(X)\rangle$来表示.事实上,精确集可以看做是粗糙集的特殊情况,它也可以用偶序对$\langle R_(X),R^-(X)\rangle$来表示,只不过此时特殊地有 $R\_(X)=R^-(X)=X$.所以,一个粗糙集合也可指偶序对$\langle R_(X),R^-(X)\rangle$,本文中一个粗糙集合就是指

这样一个偶序对.

1.2 近似空间代数和预粗代数[11]

定义 1. 一个代数结构$(P,\le,\vee,\wedge,\neg,L,\Rightarrow,0,1)$被称为一个预粗代数(pre-rough algebra),如果

(PR1) $(P,\le,\vee,\wedge,0,1)$是一个分配格,0,1 分别为其最小元和最大元;

(PR2) $\neg\neg a=a$;

(PR3) $\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$;

(PR4) $La\le a$;

(PR5) $L(a\vee b)= La\wedge Lb$;

(PR6) $LLa=La$;

(PR7) $L1=1$;

(PR8) $MLa=La$;

(PR9) $\neg La\vee La=1$;

(PR10) $L(a\vee b)= La\vee Lb$;

(PR11) $La\le Lb,Ma\le Mb$,则有 $a\le b$;

(PR12) $a\Rightarrow b=(\neg La\vee Lb)\wedge(\neg Ma\vee Mb)$,

其中,$a,b\in P$,且 $Ma=\neg L\neg a$.

值得注意的是,预粗代数是为研究粗糙集而构造的代数,但它与 Stone 代数等一样是一般的代数结构,是由拓扑布尔代数扩充而来的.

定义 2. 设 CS(crisp sets)为近似空间(U,R)的所有精确集的集合,则 $\boldsymbol{C}=(CS,\cup,\cap,^c,\varnothing,U)$称为精确集代数,其中,$\cup,\cap,^c$ 为集合的并、交和补运算.

定义 3. 设 $\boldsymbol{C}=(CS,\cup,\cap,^c,\phi,U)$ 为精确集代数,则 $AS=(A,\le,\vee,\wedge,\neg,L,0,1)$ 称为近似空间代数,其中 $A=\{\langle X,Y\rangle\in CS\times CS|X\subseteq Y\},0=\langle\varnothing,\varnothing\rangle,1=\langle U,U\rangle$,且对于任意的 $X,Y,X_1,Y_1,X_2,Y_2\in CS$,有

$\langle X_1,Y_1\rangle\le\langle X_2,Y_2\rangle$当且仅当 $X_1\subseteq X_2,Y_1\subseteq Y_2$,

$\langle X_1,Y_1\rangle\vee\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cup X_2,Y_1\cup Y_2\rangle$,

$\langle X_1,Y_1\rangle\wedge\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cap X_2,Y_1\cap Y_2\rangle$,

$\neg\langle X,Y\rangle=\langle Y^c,X^c\rangle$,

$L\langle X,Y\rangle=\langle X,X\rangle$.

定理 1. 近似空间代数 $AS=(A,\le,\vee,\wedge,\neg,L,0,1)$是一个预粗代数.

1.3 粗Nelson代数和半简单Nelson代数

定义 4. 一个代数结构$(N,\le,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$被称为一个半简单 Nelson 代数(semi-simple Nelson algebra),如果

(SSN1) $(N,\le,\vee,\wedge,0,1)$是一个分配格,0,1 分别为其最小元和最大元;

(SSN2) $\neg\neg p=p$;

(SSN3) $\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q$;

(SSN4) $p\wedge\neg p\le q\vee\neg q$;

(SSN5) $p\wedge c\le(\neg p\vee q)$当且仅当 $c\le p\rightarrow q$;

(SSN6) $(p\wedge q)\rightarrow r=p\rightarrow(q\rightarrow r)$;

(SSN7) $p\vee\sim q=1$.

定义 5. 在近似空间(U,R)中设 $\boldsymbol{C}=(CS,\cup,\cap,^c,\varnothing,U)$为精确集代数,则 $N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$称为粗 Nelson 代数,其中 $RS=\{\langle R\_(X),(R^-(X))^c\rangle|X\subseteq U,0=\langle\varnothing,U\rangle,1=\langle U,\varnothing\rangle$,且对于任意的 $X,Y,X_1,Y_1,X_2,Y_2\in CS$,有

$\langle X_1,Y_1\rangle\vee\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cup X_2,Y_1\cap Y_2\rangle$,

$\langle X_1,Y_1\rangle\wedge\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cap X_2,Y_1\cup Y_2\rangle$,

$\langle X_1,Y_1\rangle\rightarrow\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1^c\cup X_2,Y_1\cup Y_2\rangle$,

$\neg\langle X,Y\rangle=\langle Y,X\rangle$,
$\sim\langle X,Y\rangle=\langle X^c,X\rangle$.

定理 2. 粗 Nelson 代数 $N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$是一个半简单 Nelson 代数.

应该注意到,此时的偶序对是无交的(disjoint)表示,即偶序对型如⟨下近似集,上近似集的补⟩,此时的最小元和最大元也分别为 $0=\langle\varnothing,U\rangle,1=\langle U,\varnothing\rangle$.

还需要说明的是,在文献[12]中,Pagliani 将 $N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$称为是粗糙集系统(rough sets system),在本文中为了统一,将其称为粗 Nelson 代数.定理 2 也是文献[12]中最主要的结论之一.

1.4 粗双Stone代数和正则双Stone代数

定义 6. 一个⟨2,2,1,1,0,0⟩型代数$(S,\vee,\wedge,*,+,0,1)$称为一个正则双 Stone 代数(regular double Stone algebra),如果

(RDS1) $(S,\vee,\wedge,0,1)$是一个有界分配格,0,1 分别为其最小元和最大元,

(RDS2) 如果$\forall m\in S$ 都有一个对应的 m^*,使得对于$\forall n\in L$ 都有 $m\wedge n=0$ iff $n\le m^*$,

(RDS3) $\forall m\in S,m^*\vee m^{**}=1$,

(RDS4) 如果$\forall m\in S$ 都有一个对应的 m^*,使得对于$\forall n\in S$ 都有 $m\vee n=1$ iff $m^+\le n$,

(RDS5) $\forall m\in S,m^+\wedge m^{++}=0$,

(RDS6) $\forall m,n\in S,m\wedge m^+\le n\vee n^*$.

定义 7. 设 $\boldsymbol{C}=(CS,\cup,\cap,^c,\varnothing,U)$为精确集代数,则 $S(CS)=(A,\vee,\wedge,*,+,0,1)$称为粗双 Stone 代数,其中 $A=\{\langle X,Y\rangle\in CS\times CS|X\subseteq Y\},0=\langle\varnothing,\varnothing\rangle,1=\langle U,U\rangle$,且对于任意的 $X,Y,X_1,Y_1,X_2,Y_2\in CS$,有

$\langle X_1,Y_1\rangle\vee\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cup X_2,Y_1\cup Y_2\rangle$,
$\langle X_1,Y_1\rangle\wedge\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cap X_2,Y_1\cap Y_2\rangle$,
$\langle X,Y\rangle^*=\langle Y^c,Y^c\rangle$,
$\langle X,Y\rangle^+=\langle X^c,X^c\rangle$.

定理 3. 粗双 Stone 代数 $S(CS)=(A,\vee,\wedge,*,+,0,1)$是一个正则双 Stone 代数.

本文中,我们将定义 7 中的 $S(CS)=(A,\vee,\wedge,*,+,0,1)$称为粗双 Stone 代数.事实上,Pomykala 等人在文献[8]中已经定义了算子$\vee,\wedge,*$,并证明$(A,\vee,\wedge,*,0,1)$构成 Stone 代数.Comer 的工作是引入了另一个一元算子+,并获得定理 3.

2 粗代数之间的联系

2.1 近似空间代数与半简单Nelson代数

定理 4. 近似空间代数 $AS=(A,\le,\vee,\wedge,\neg,L,0,1)$中构造新的算子$\sim,\rightarrow$,对于$\forall p,q\in A,\sim p\equiv\neg Lp,p\rightarrow q\equiv\neg Lp\vee q$,则$(A,\le,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$构成一个半简单 Nelson 代数.

证明:(a) 由近似空间代数的定义可知 SSN1 成立.

(b) 对于$\forall p\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle$,其中 $X,Y\in CS$ 且 $X\subseteq Y$,则由近似空间代数的定义可知,$\neg\neg p=\neg\langle Y^c,X^c\rangle=\langle X,Y\rangle=p$,所以 SSN2 成立.

(c) 对于 $\forall p,q\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle$,则 $\neg(p\vee q)=\neg\langle X\cup X_1,Y\cup Y_1\rangle=\langle(Y\cup Y_1)^c,(X\cup X_1)^c\rangle$,而 $\neg p\wedge\neg q=\langle Y^c,X^c\rangle\wedge\langle Y_1^c,X_1^c\rangle=\langle Y^c\cap Y_1^c,X^c\cap X_1^c\rangle$,显然有$\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q$.所以条件 SSN3 成立.

(d) 类似于(c)可证 $p\wedge\neg p\le q\vee\neg q$,即条件 SSN4 成立.

(e) 对于$\forall p,q\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle,c=\langle X_2,Y_2\rangle$,则 $p\wedge c=\langle X\cap X_2,Y\cap Y_2\rangle,\neg p\vee q=\langle Y^c\cup X_1,X^c\cup Y_1\rangle$,所以 $p\wedge c\le(\neg p\vee q)$等价于

$$X\cap X_2\subseteq Y^c\cup X_1 \tag{3}$$

$$Y\cap Y_2\subseteq X^c\cup Y_1 \tag{4}$$

而 $c\le p\rightarrow q$ 等价于$\langle X_2,Y_2\rangle\le\langle X^c\cup X_1,Y^c\cup Y_1\rangle$,即等价于

$$X_2 \subseteq X^c \cup X_1 \tag{5}$$

$$Y_2 \subseteq X^c \cup Y_1 \tag{6}$$

由定义可知 $X\subseteq Y$,即 $Y^c\subseteq X^c$,再由式(3)可知,$X\cap X_2\subseteq X^c\cup X_1$,所以有 $X\cap X_2\subseteq X_1$,可得 $X^c\cup X_2\subseteq X^c\cup X_1$,于是得到式(5).同理可由式(4)得到式(6).由式(5)得 $X\cap X_2\subseteq X\cap(X^c\cup X_1)=X\cap X_1$,显然可得式(3).同理,可由式(6)得到式(4).所以有 $p\wedge c\le(\neg p\vee q)$当且仅当 $c\le p\to q$,即条件 SSN5 成立.

(f) 对于$\forall p,q,r\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle,r=\langle X_2,Y_2\rangle$,则$(p\wedge q)\to r=\langle X^c\cup X_1{}^c\cup X_2,Y^c\cup Y_1{}^c\cup Y_2\rangle=p\to(q\to r)$.所以条件 SSN6 成立.

(g) 对于$\forall p\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle$,令$\sim p\equiv\neg Lp$,则$\sim p=\langle X^c,X^c\rangle$,于是 $p\vee\sim p=\langle X\cup X^c,Y\cup X^c\rangle$,由 $X\subseteq Y$ 可知 $Y\subseteq X^c=U$,所以有 $p\vee\sim p=1$,即条件 SSN7 成立.

综合(a)~(g),由半简单 Nelson 的定义可知本定理成立. □

2.2 近似空间代数与正则双Stone代数

定理 5. 近似空间代数 $AS=(A,\le,\vee,\wedge,\neg,L,0,1)$中构造两个新的一元算子 $L\neg$和$\neg L$,则$(A,\le,\vee,\wedge,L,\neg,\neg,L,0,1)$构成一个正则双 Stone 代数,其中算子 $L\neg$和$\neg L$ 分别为伪补算子和对偶伪补算子.

证明:(a) 由近似空间代数的定义可知 RDS1 成立.

(b) 对于$\forall m,n\in A$,设 $m=\langle X,Y\rangle,n=\langle X_1,Y_1\rangle$,则由近似空间代数的定义可知 $m\wedge n=0$ 等价于$\langle X,Y\rangle\wedge\langle X_1,Y_1\rangle=\langle X\cap X_1,Y\cap Y_1\rangle\langle\varnothing,\varnothing\rangle$,即 $X\cap X_1=\varnothing$且 $Y\cap Y_1=\varnothing$.由后者知,$Y_1\subseteq Y^c$.又由于 $X_1\subseteq Y_1$,所以有 $X_1\subseteq Y^c$,而由定义可知,$L\neg m=L\langle Y^c,X^c\rangle=\langle Y^c,Y^c\rangle$,所以有 $n=\langle X_1,Y_1\rangle\le\langle Y^c,Y^c\rangle=L-m$.反方向,若 $n\le L\neg m$,可类似证明得到 $m\wedge n=0$,所以 RDS2 成立,$L\neg$为伪补算子.

(c) 对于$\forall m\in A$,设 $m=\langle X,Y\rangle$,则 $L\neg m=L\langle Y^c,X^c\rangle=\langle Y^c,Y^c\rangle$,而 $L\neg L\neg m=\langle Y,Y\rangle$,所以有 $L\neg m\vee L\neg L\neg m=\langle Y^c,Y^c\rangle\vee\langle Y,Y\rangle=\langle U,U\rangle=1$,即 RDS3 成立.

(d) 仿照(b)可证对于$\forall m,n\in A,m\vee n=1$ 当且仅当$\neg Lm\le n$ 时,条件 RDS4 成立,而$\neg L$ 为对偶伪补算子.

(e) 仿照(c)可证$\forall m\in A$,有$\neg Lm\wedge\neg L\neg Lm=0$,即 RDS5 成立.

(f) 对于$\forall m,n\in A$,设 $m=\langle X,Y\rangle,n=\langle X_1,Y_1\rangle$,则 $m\wedge\neg Lm=\langle X,Y\rangle\wedge\langle X^c,X^c\rangle=\langle\phi,Y\cap X^c\rangle$,而 $n\vee L\neg n=\langle X_1,Y_1\rangle\vee\langle Y_1{}^c,Y_1{}^c\rangle=\langle Y_1\cup Y_1{}^c,U\rangle$,显然有 $m\wedge\neg Lm\le n\vee L\neg n$,即 RDS6 成立.

综合(a)~(f),由正则双 Stone 代数的定义可知本定理成立. □

2.3 粗Nelson代数与预粗代数

引理 1. 粗 Nelson 代数 $N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\to,0,1)$,其中 $RS=\{\langle R\_(X),(R^-(X))^c\rangle|X\subseteq U\}$,且对于任意的 $X_1,Y_1,X_2,Y_2\in CS$,有$\langle X_1,Y_1\rangle\le\langle X_2,Y_2\rangle$当且仅当 $X_1\subseteq X_2,Y_2\subseteq Y_1$.

证明:由粗 Nelson 代数中算子的定义可知$\langle X_1,Y_1\rangle\wedge\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cap X_2,Y_1\cup Y_2\rangle$.若$\langle X_1,Y_1\rangle\le\langle X_2,Y_2\rangle$,当且仅当$\langle X_1,Y_1\rangle\wedge\langle X_2,Y_2\rangle=\langle X_1\cap X_2,Y_1\cup Y_2\rangle=\langle X_1,Y_1\rangle$,即 $X_1\cap X_2=X_1$且 $Y_1\cap Y_2=Y_1$,即 $X_1\subseteq X_2,Y_2\subseteq Y_1$.引理得证. □

引理 2. 在粗 Nelson 代数 $N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\to,0,1)$中,合成一元算子$\neg\sim$是保序算子,即$\forall a,b\in R$,若 $a\le b$,则有$\neg\sim a\le\neg\sim b$.

证明:设 $a=\langle X_1,Y_1\rangle,b=\langle X_2,Y_2\rangle$,则$\neg\sim a=\neg\langle X^c{}_1,X_1\rangle=\langle X_1,X_1{}^c\rangle,\neg\sim b=\langle X_2,X_2{}^c\rangle$.令 $a\le b$,由引理 1 可知,$X_1\subseteq X_2,Y_2\subseteq Y_1$,所以有 $X_1\subseteq X_2,X_2{}^c\subseteq X_1{}^c$,又据引理 1 可知,$\neg\sim a\le\neg\sim b$. □

定理 6. 粗 Nelson 代数 $N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\to,0,1)$中构造新的一元算子 L,M 和二元算子$\Rightarrow$,对于$\forall a,b\in A,La\equiv\neg\sim a,Ma\equiv\neg\sim a,a\Rightarrow b\equiv(La\vee Lb)\wedge(\neg Ma\vee Mb)$,则$(R,\le,\vee,\wedge,\neg,L,\Rightarrow,0,1)$构成一个预粗代数.

证明:(a) 由粗 Nelson 代数的定义可知 PR1 成立.

(b) 对于$\forall a\in R$,设 $a=\langle X,Y\rangle$,则由粗 Nelson 代数的定义可知$\neg\neg a=\neg\langle Y,X\rangle=\langle X,Y\rangle=a$,所以 PR2 成立.

(c) 同定理 4,易证$\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$,即 PR3 成立.

(d) 对于$\forall a\in R$,设 $a=\langle X,Y\rangle$,则 $La=\neg\sim a=\langle X,X^c\rangle$,由于这里用的无交表示,即 $X\cap Y=\varnothing$,所以有,$Y\subseteq X^c$,继而有$\langle X,Y\rangle\le\langle X\subseteq X^c\rangle$,即 $La\le a$,所以 PR4 成立.

(e) 对于$\forall a,b\in R$,设$a=\langle X,Y\rangle,b=\langle X_1,Y_1\rangle$,则$L(a\wedge b)=\langle X\cap X_1,(X\cap X_1)^c\rangle$,而$La\wedge Lb=\langle X\cap X_1,X^c\cap X_1{}^c\rangle=\langle X\cap X_1,(X\cup X_1)^c\rangle$.显然有$(X\cup X_1)^c\subseteq(X\cap X_1)^c$,由引理1可知$La\wedge Lb\le L(a\wedge b)$.又有引理2可知,$L(a\wedge b)\le La,L(a\wedge b)\le Lb$,即$L(a\wedge b)\le La\wedge Lb$.所以$L(a\wedge b)=La\wedge Lb$,即PR5成立.

(f) 对于$\forall a\in R$,设$a=\langle X,Y\rangle,La=\neg\sim\langle X,Y\rangle=\langle X,X^c\rangle$,而$LLa=\neg\sim\langle X,X^c\rangle=\langle X,X^c\rangle$,所以$LLa=La$,即PR6成立.

(g) $L1=\neg\sim\langle U,\varnothing\rangle=\langle U,U^c\rangle=\langle U,\varnothing\rangle=1$,所以PR7成立.

(h) 对于$\forall a\in R$,设$a=\langle X,Y\rangle,La=\langle X,X^c\rangle$,而$MLa=\neg L\neg La=\neg\neg\sim\sim\neg\neg\sim a=\sim\sim a=\langle X,X^c\rangle$,所以有$MLa=La$,即PR8成立.

(i) 对于$\forall a\in R$,设$a=\langle X,Y\rangle,La=\langle X,X^c\rangle$,而$\neg La=\langle X^c,X,\rangle$,所以$\neg La\vee La=\langle X\cup X^c,X\cap X^c\rangle=\langle U,\varnothing\rangle=1$,所以PR9成立.

(j) 同(e)可证$L(a\vee b)=La\vee Lb$,即PR10成立.

(k) 对于$\forall a,b\in R$,设$a=\langle X,Y\rangle,b=\langle X_1,Y_1\rangle$,则$La=\langle X,X^c\rangle,Lb=\langle X_1,X_1{}^c\rangle$,令$La\le Lb$,则由引理1可知,$X\subseteq X_1$,类似地,由$Ma\le Mb$可知,$Y_1\subseteq Y$,继而由引理1可知,$a\le b$,即PR11成立.

(l) 算子$\Rightarrow$定义为$\forall a,b\in R,a\Rightarrow b\equiv(\neg La\vee Lb)\wedge(\neg Ma\vee Mb)$.

综合(a)~(l),由预粗代数的定义可知本定理成立. □

2.4 粗Nelson代数与正则双Stone代数

定理7. 在粗Nelson代数$N(CS)=(RS,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$中构造新的一元算子$\neg\sim\neg$,则$(R,\le,\vee,\wedge,\neg\sim\neg,\sim,0,1)$构成一个正则双Stone代数,其中算子$\neg\sim\neg$和$\sim$,分别为伪补算子和对偶伪补算子.

证明:(a) 由粗Nelson代数的定义可知RDS1成立.

(b) 对于$\forall m,n\in R$,设$m=\langle X,Y\rangle,n=\langle X_1,Y_1\rangle$,则由粗Nelson代数的定义知$m\wedge n=0$等价于$\langle X,Y\rangle\wedge\langle X_1,Y_1\rangle=\langle X\cap X_1,Y\cup Y_1\rangle=\langle\varnothing,U\rangle$,即$X\cap X_1=\varnothing$且$Y\cup Y_1=U$.由后者知,$Y^c{}_1\subseteq Y$,又由无交表示可知$X_1\subseteq Y_1{}^c$,所以有$X_1\subseteq Y$.由式$Y\cup Y_1=U$还可得$Y^c\subseteq Y_1$.继而由引理1和定义可知,$\langle X_1,Y_1\rangle\le\langle Y,Y^c\rangle$,而由定义可知$\neg\sim\neg m=\neg\sim\langle Y,X\rangle=\neg\langle Y^c,Y\rangle=\langle Y,Y^c\rangle$,所以有$n=\langle X_1,Y_1\rangle\le\langle Y,Y^c\rangle=\neg\sim\neg m$.反方向,若$n\le\neg\sim\neg m$,可类似证明得到$m\wedge n=0$,所以RDS2成立,$\neg\sim\neg$为伪补算子.

(c) 对于$\forall m\in R$,设$m=\langle X,Y\rangle$,则$\neg\sim\neg m=\langle Y,Y^c\rangle$,而$\neg\sim\neg\neg\sim\neg m=\neg\sim\neg\langle Y,Y^c\rangle=\langle Y^c,Y\rangle$,所以有$\neg\sim\neg m\vee\neg\sim\neg\neg\sim\neg m=\langle Y,Y^c\rangle\vee\langle Y^c,Y\rangle=\langle Y\cup Y^c,Y^c\cap Y\rangle=\langle U,\varnothing\rangle=1$,即RDS3成立.

(d) 仿照(b)可证对于$\forall m,n\in R,m\vee n=1$当且仅当$\sim m\le n$时,条件RDS4成立,而$\sim$为对偶伪补算子.

(e) 仿照(c)可证$\forall m\in R$,有$\sim m\wedge\sim\sim m=0$,即RDS5成立.

(f) 对于$\forall m,n\in R$,设$m=\langle X,Y\rangle,n=\langle X_1,Y_1\rangle$,则$m\wedge\sim m=\langle X,Y\rangle\wedge\langle X^c,X\rangle=\langle\varnothing,Y\cup X\rangle$,而$n\vee\neg\sim\neg n=\langle X_1,Y_1\rangle\vee\langle Y_1,Y_1{}^c\rangle=\langle X_1\cup Y_1,\varnothing\rangle$,由引理1显然有$m\wedge\sim m\le n\vee\neg\sim\neg n$,即RDS6成立.

综合(a)~(f),由正则双Stone代数的定义可知本定理成立. □

2.5 粗双Stone代数与预粗代数

定理8. 在粗双Stone代数$S(CS)=(A,\vee,\wedge,*,+,0,1)$中,构造新的一元算子$L,M,\neg$和二元算子$\Rightarrow$,对于$\forall a,b\in A,La\equiv a^{++},Ma\equiv a^{**},\neg a\equiv a^+\wedge(a\vee a^*),a\Rightarrow b\equiv(\neg La\vee Lb)\wedge(\neg Ma\vee Mb)$,则$(A,\le,\vee,\wedge,\neg,L,\Rightarrow,0,1)$构成一个预粗代数.

证明:(a) 由粗双Stone代数的定义可知PR1成立.

(b) 对于$\forall a\in A$,设$a=\langle X,Y\rangle$,则由粗双Stone代数的定义可知$a^+=\langle X^c,X^c\rangle,a^*=\langle Y^c,Y^c\rangle$,则$\neg a=a^+\wedge(a\vee a^*)=\langle X^c\cap(X\cup Y^c),X^c\cap(Y\cup Y^c)\rangle=\langle X^c\cap Y^c,X^c\rangle$.由于$X\subseteq Y$,有$Y^c\subseteq X^c$,即有$X^c\cap Y^c=Y^c$和$\neg a=\langle Y^c,X^c\rangle$.继而$\neg\neg a=\langle Y^c,X^c\rangle=\langle X,Y\rangle=a$,即PR2成立.

(c) 由(b)中结论$\neg a=\langle Y^c,X^c\rangle$,易证$\neg(a\vee b)=\neg a\wedge\neg b$,即PR3成立.

(d) 对于$\forall a\in A$,设$a=\langle X,Y\rangle$,则$La=a^{++}=\langle X^c,X^c\rangle^+=\langle X,X\rangle$,显然有$La\le a$,即PR4成立.

(e) $\forall a,b\in A$,设$a=\langle X,Y\rangle,b=\langle X_1,Y_1\rangle$,则$L(a\wedge b)=\langle X\cap X_1,X\cap X_1\rangle$,而$La\wedge Lb=\langle X\cap X_1,X\cap X_1\rangle$,所以有$L(a\wedge b)=La\wedge Lb$,即PR5成立.

(f) 对于$\forall a\in A$,设$a=\langle X,Y\rangle$,则$La=\langle X,X\rangle$,而$LLa=L\langle X,X\rangle=\langle X,X\rangle$,所以$LLa=La$,即PR6成立.

(g) $L1=L\langle U,U\rangle=\langle U,U\rangle=1$,即PR7成立.

(h) 对于$\forall a\in A$,设$a=\langle X,Y\rangle$,则$La=\langle X,X\rangle$,而$MLa=M\langle X,X\rangle=\langle X,X\rangle^{**}=\langle X,X\rangle$,所以有$MLa=La$,即PR8成立.

(i) 对于$\forall a\in A$,设$a=\langle X,Y\rangle$,则$La=\langle X,X\rangle$,而$\neg La=\neg\langle X,X\rangle=\langle X^c,X^c\rangle$,显然$\neg La\vee La=1$,即PR9.

(j) 同(e)可证 $L(a\vee b)=La\vee Lb$,即 PR10 成立.

(k) $\forall a,b\in A$,设 $a=\langle X,Y\rangle,b=\langle X_1,Y_1\rangle$,若 $La\le Lb,Ma\le Mb$,即$\langle X,X\rangle\le\langle X_1,X_1\rangle,\langle Y,Y\rangle\le\langle Y_1,Y_1\rangle$,显然有$\langle X,Y\rangle\le\langle X_1,Y_1\rangle$,即 $a\le b$,所以 PR11 成立.

(l) 由$\Rightarrow$的定义可知满足 PR12.

综合(a)~(l),由预粗代数的定义可知本定理成立. □

2.6 粗双Stone代数与半简单Nelson代数

定理 9. 在粗双 Stone 代数 $S(CS)=(A,\vee,\wedge,*,+,0,1)$中,构造新的一元算子$\neg,\sim$,二元算子$\rightarrow$,对于$\forall p,q\in A,\neg p\equiv p^+\wedge(p^*\vee p),\sim p\equiv\neg(p^{++}),p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$,则$(A,\vee,\wedge,\neg,\sim,\rightarrow,0,1)$构成一个半简单 Nelson 代数.

证明:(a) 由粗 Nelson 代数的定义可知 SSN1 成立.

(b) 对于$\forall p\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle$,则$\neg p\equiv p^+\wedge(p^*\vee p)=\langle X^c\cap(Y^c\cup X,X^c\cap(Y^c\cup Y=\langle X^c\cap Y,X\rangle$,由 $X\subseteq Y$ 可知 $Y^c\subseteq X^c$,所以$\neg p=\langle Y^c,X^c\rangle$,继而$\neg\neg p=\neg\langle Y^c,X^c\rangle=\langle X,Y\rangle$,所以$\neg\neg p=\neg p$,即 SSN2 成立.

(c) $\forall p,q\in A,p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle$,则由(b)中证明可知$\neg p\wedge\neg q=\langle Y^c,X^c\rangle\wedge\langle Y_1^{\,c},X_1^{\,c}\rangle=\langle Y^c\cap Y_1^{\,c},X^c\cap X_1^{\,c}\rangle$.而$\neg(p\vee q)=\neg\langle X\cup X_1,Y\cup Y_1\rangle=\langle Y^c\cap Y_1^{\,c},X^c\cap X_1^{\,c}\rangle$,所以$\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q$,即 SSN3 成立.

(d) $\forall p,q\in A,p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle$,则 $p\wedge\neg p=\langle X\cap Y^c,Y\cap X^c\rangle$,由 $X\subseteq Y$ 可知 $X\cap Y^c=\varnothing$,所以 $p\wedge\neg p=\langle\varnothing,Y\cap X^c\rangle$.而$q\vee\neg q=\langle X_1\cap Y_1^{\,c},Y_1\cap X_1^{\,c}\rangle$,由 $X_1\subseteq Y_1$ 则知 $Y_1\cup X_1^{\,c}=U$.显然有 $p\wedge\neg p=q\vee\neg q$,即 SSN4 成立.

(e) 对于$\forall p,q\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle,c=\langle X_2,Y_2\rangle$,则 $p\wedge c=\langle X\cap X_2,Y\cap Y_2\rangle,\neg p\vee q=\langle Y^c\cup X_1,X^c\cup Y_1\rangle$,所以 $p\wedge c\le(\neg p\vee q)$等价于

$$X\cap X_2\subseteq Y^c\cup X_1 \tag{7}$$

$$Y\cap Y_2\subseteq X^c\cup Y_1 \tag{8}$$

而 $c\le p\rightarrow q$ 等价于$\langle X_2,Y_2\rangle\le\langle X^c\cup X_1,X^c\cup Y_1\rangle$,即等价于

$$X_2\subseteq X^c\cup X_1 \tag{9}$$

$$Y_2\subseteq X^c\cup Y_1 \tag{10}$$

由定义可知 $X\subseteq Y$,即 $Y^c\subseteq X^c$,再由式(7)可知 $X\cap X_2\subseteq X^c\cup X_1$,所以有 $X\cap X_2\subseteq X_1$,可得 $X^c\cup X_2\subseteq X^c\cup X_1$,于是得到式(9).同理,可由式(8)得到式(10).由式(9)得到 $X\cap X_2\subseteq X\cap(X^c\cup X_1)=X\cap X_1$,显然可得式(7).同理,可由式(10)得到式(8).所以有 $p\wedge c\le(\neg p\vee q)$当且仅当 $c\le p\rightarrow q$,即条件 SSN5 成立.

(f) 对于$\forall p,q\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle,q=\langle X_1,Y_1\rangle,r=\langle X_2,Y_2\rangle$,则$(p\wedge q)\rightarrow r=\langle X^c\cup X_1^{\,c}\cup X_2,Y^c\cup Y_1^{\,c}\cup Y_2\rangle=p\rightarrow(q\rightarrow r)$.所以条件 SSN6 成立.

(g) 对于$\forall p\in A$,设 $p=\langle X,Y\rangle$,令$\sim p\equiv\neg Lp$,则$\sim p=\langle X^c,X^c\rangle$,于是 $p\vee\sim p=\langle X\cup X^c,Y\cup X^c\rangle$,由 $X\subseteq Y$ 可知 $Y\cup X^c=U$,所以有 $p\vee\sim p=1$,即条件 SSN7 成立.

综合(a)~(g),由半简单 Nelson 的定义可知本定理成立. □

3 结束语

在粗糙集的代数研究方面,一类很重要的方法是从粗糙集的偶序对(如〈下近似集,上近似集〉)表示入手,通过定义偶序对的基本运算,即定义出了偶序对上的算子,从而构造出相应粗代数,并寻找能抽象表示偶序对性质的一般代数结构,如波兰学者 Pomykala 等人的 Stone 代数[8]、Comer 的正则双 Stone 代数[9,10]、印度学者 Banerjee 的预粗代数(pre-rough algebra)[11]和意大利学者 Pagliani 的半简单 Nelson 代数[12]等.Banerjee 构造了称为近似空间代数的粗代数,她证明了近似空间代数是一个预粗代数;Pagliani 构造的粗代数称为粗 Nelson 代数,他证明了粗 Nelson 代数是一个半简单 Nelson 代数;基于 Pomykala 等人非常重要的工作,Comer 构造了称为粗双 Stone 代数的粗代数,证明了粗双 Stone 代数是一个正则双 Stone 代数.本文建立了上述工作的内在联系,证明了:(a) 近似空间代数可化为半简单 Nelson 代数和正则双 Stone 代数;(b) 粗 Nelson 代数可化为预粗代数和正则双 Stone 代数;(c) 粗双 Stone 代数可化为预粗代数和半简单 Nelson 代数.进一步的工作用多值逻辑的手段对粗糙集理论进行研究,构建基于代数语义的逻辑系统.

References:

[1] Pawlak Z. Rough Sets—Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[2] Pawlak Z, Grzymala-Busse J, Slowinski R, Ziarko W. Rough sets. Communications of the ACM, 1995,38(11):89−95.

[3] Ziarko W. Introduction to the special issue on rough sets and knowledge discovery. Int'l Journal of Computational Intelligence, 1995,11(2):223−226.

[4] Cattaneo G, Ciucci D. Heyting Wajsbreg algebras as an abstract environment linking fuzzy and rough sets. In: Alpigini JJ, *et al*., eds. Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC 2002). LNAI 2475, Malvern, 2002. 77−84.

[5] Yao YY. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets. Information Sciences, 1998,109(1-4):21−47.

[6] Jarvinen J. On the structure of rough approximations. In: Alpigini JJ, Peters JF, Skowron A, Zhong N, eds. Proc. of the 3rd Int'l Conf. on Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC 2002). LNAI 2475, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. 123−230.

[7] Dai JH. Generalization of rough set theory using molecular lattices. Chinese Journal of Computers, 2004,27(10):1436−1440 (in Chinese with English abstract).

[8] Pomykala J, Pomykala JA. The Stone algebra of rough sets. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics, 1988,36(7-8):495−508.

[9] Comer S. An algebraic approach to the approximation of information. Fundamenta Informaticae, 1991,14(5-6):492−502.

[10] Duntsch I. A logic for rough sets. Theoretical Computer Science, 1997,179(1-2):427−436.

[11] Bangerjee M. Rough sets through algebraic logic. Fundamenta Informaticae, 1996,28(3-4):211−221.

[12] Pagliani P. Rough sets and Nelson algebras. Fundamenta Informaticae, 1996,27(2-3):205−219.

附中文参考文献:

[7] 代建华.利用分子格对粗糙集理论进行推广.计算机学报,2004,27(10):1436−1440.