

# 带形状参数的双曲多项式均匀 B 样条\*

王文涛<sup>+</sup>, 汪国昭

(浙江大学 数学系 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

## Hyperbolic Polynomial Uniform B-Spline with Shape Parameter

WANG Wen-Tao<sup>+</sup>, WANG Guo-Zhao

(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-571-87931930, E-mail: wwt@zju.edu.cn

Received 2004-04-08; Accepted 2004-07-06

Wang WT, Wang GZ. Hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter. *Journal of Software*, 2005,16(4):625-633. DOI: 10.1360/jos160625

**Abstract:** The basis function of  $n$  order hyperbolic polynomial uniform B-spline with shape parameter is constructed so that the shape of the constructed curve can be adjusted by changing the parameter value. The hyperbola can be represented with this basis function accurately. With elevation of the order, feasible range of the shape parameter value is extended.

**Key words:** uniform B-spline; basis function; CAGD; shape parameter; interpolation

**摘要:** 给出了  $n$  阶带形状参数的双曲多项式均匀 B 样条基函数. 由带形状参数的双曲多项式均匀 B 样条基组成的样条曲线可通过改变形状参数的取值调整曲线的形状, 并且可以精确表示双曲线. 随着阶数的升高, 形状参数的取值范围将扩大.

**关键词:** 均匀 B 样条; 基函数; 计算机辅助几何设计; 形状参数; 插值

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

在计算机辅助几何设计中, 均匀 B 样条是一个很有用的工具. 在此基础上, 人们提出了各种 B 样条, 如均匀三角多项式 B 样条曲线<sup>[1]</sup>, C-B 样条曲线<sup>[2,3]</sup>等. 为了调整曲线的形状或改变曲线的位置, 有理 Bézier 曲线和有理 B 样条曲线<sup>[4,5]</sup>中的权因子的调整可以达到这一目的, 但是它们的计算比较麻烦, 如求导、求积等. 均匀 B 样条曲线也有不足的地方, 如对给定的控制点, 均匀 B 样条曲线的位置是确定的, 如果要调整曲线的形状, 需要调整控制多边形. 文献[6]中构造了带形状参数的曲线, 可以在控制多边形不变时, 通过调节参数大小调整曲线的形状, 而形状参数调整的范围是  $[-1, 1]$ . Barsky 构造了  $\beta$  样条曲线<sup>[7]</sup>, 它具有凸包性、局部性、变差缩减性等 B 样条拥有的若干性质, 并且有两个可调形状参数, 可以达到  $G^2$  连续. 均匀三角多项式 B 样条曲线、C-B 样条曲线、均匀 B

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.10371110 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.G2002CB12101 (国家重点基础研究发展规划(973))

作者简介: 王文涛(1976 - ), 男, 湖南衡阳人, 博士生, 主要研究领域为计算机图形学, 计算机辅助几何设计; 汪国昭(1944 - ), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 医学图像三维重建.

样条曲线、 $\rho$ 样条曲线都不能精确表示双曲线,本文提出的  $k$  阶( $k \geq 2$ )的带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线可以精确地表示双曲线( $k=3$ ),形状参数的范围要大于  $[-1,1]$ , $k$  阶( $k \geq 2$ )带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线有一个可调形状参数,并且有高于  $\rho$ 样条曲线的  $G^2$  连续性( $k > 4$ ),能够达到  $C^{k-2}$  连续.在控制多边形不变的情况下,它能生成不同位置的曲线,同时具有与均匀 B 样条曲线相同的结构和几何性质.随着阶数的升高,带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线的形状参数的可调整范围也越来越大.

### 1 带形状参数双曲多项式均匀 B 样条基函数的构造及其性质

为了得到带形状参数双曲均匀 B 样条基函数,构造非负函数  $h(\lambda, t), t \in [0,2]$  满足条件:

- (1)  $h(\lambda, 0) = h(\lambda, 2) = 0, t \in [0,2], h(\lambda, t) = h(\lambda, 2-t),$
- (2)  $h(\lambda, t)$  是  $C^0$  连续函数,  $h(\lambda, t) = asht + bsh2t, t \in [0,1],$
- (3)  $\int_0^2 h(\lambda, t) dt = 1.$

由条件(1),(2)可得

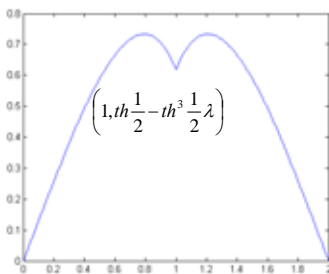
$$h(\lambda, t) = \begin{cases} asht + bsh2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ ash(2-t) + bsh2(2-t), & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

由条件(3)可得  $a \frac{(e-1)^2}{e} + b \frac{(e^2-1)^2}{2e^2} = 1$ , 若令  $a = \frac{e(1+\lambda)}{(e-1)^2}$ , 则  $b = -\frac{2e^2\lambda}{(e^2-1)^2}$ , 从而令

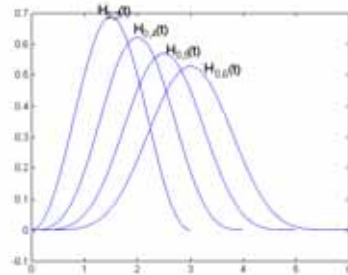
$$H_{0,2}(t) = \begin{cases} \frac{e}{(e-1)^2} \left[ (1+\lambda)sh t - \frac{2e}{(e+1)^2} \lambda sh 2t \right], & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{e}{(e-1)^2} \left[ (1+\lambda)sh(2-t) - \frac{2e}{(e+1)^2} \lambda sh 2(2-t) \right], & 1 \leq t < 2, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq cth^2 \frac{1}{2}$ ,  $H_{i,2}(t) = H_{0,2}(t-i), i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 当  $k \geq 3$  时,  $H_{0,k}(t) = \int_{t-1}^t H_{0,k-1}(x) dx, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots, H_{i,k}(t) = H_{i,k}(t-i).$

当  $k \geq 2$  时,根据  $H_{i,k}(t)$  的定义,很容易达到  $H_{i,k}(t) (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  所具有的性质.由于  $H_{i,k}(t)$  的非零区间有  $k$  个,我们称  $H_{i,k}(t) (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  为  $k$  阶带形状参数双曲多项式均匀基函数,其中  $\lambda$  为形状参数.图 1 显示了 2 阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条基函数和 3~6 阶的带形状参数双曲多项式均匀 B 样条基函数的形状图,其中,  $\lambda=2$ .



(a) 2 order basis function of hyperbolic polynomial B-Spline with shape parameter  
(a) 2 阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条基函数



(b) 3~6 order basis function of hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter  
(b) 3~6 阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条基函数

Fig.1 All kind figures of basis function of hyperbolic polynomial uniform B-spline with shape parameter ( $\lambda=2$ )

图 1 各阶形状参数双曲多项式均匀 B 样条基函数的形状图( $\lambda=2$ )

性质 1. 非负性.

$$H_{i,k}(t) \geq 0, t \in (-\infty, +\infty).$$

证明:由  $H_{i,k}(t)$  的定义,易知  $H_{0,2}(t) \geq 0$ , 则  $H_{0,3}(t) = \int_{t-1}^t H_{0,2}(x)dx \geq 0$ ,  $H_{0,4}(t) = \int_{t-1}^t H_{0,3}(x)dx \geq 0 \dots$  这样下去可得  $H_{0,k}(t) = \int_{t-1}^t H_{0,k-1}(x)dx \geq 0$ , 从而  $H_{i,k}(t) = H_{i,k}(t-i) \geq 0$ .

性质 2. 局部支集性.  $H_{i,k}(t) \begin{cases} > 0 & t \in (i, i+k) \\ = 0 & \text{其他} \end{cases}$ .

性质 3. 归一性.  $\sum_i H_{i,k}(t) \equiv 1 (k \geq 3)$ .

证明:当  $k=3$  时,显然成立,当  $k>3$  时,由  $H_{i,k}(t)$  的定义可知

$$\begin{aligned} \sum_i H_{i,4}(t) &= \sum_i \int_{t-1}^t H_{i,3}(x)dx = \int_{t-1}^t \sum_i H_{i,3}(x)dx = \int_{t-1}^t dx \equiv 1 \\ \sum_i H_{i,5}(t) &= \sum_i \int_{t-1}^t H_{i,4}(x)dx = \int_{t-1}^t \sum_i H_{i,4}(x)dx = \int_{t-1}^t dx \equiv 1 \dots \end{aligned}$$

这样就得到

$$\sum_i H_{i,k}(t) = \sum_i \int_{t-1}^t H_{i,k-1}(t) \equiv 1.$$

性质 4. 求导公式:

$$H'_{i,k}(t) = H_{i,k-1}(t) - H_{i+1,k-1}(t).$$

证明:由  $H_{i,k}(t)$  的定义可知  $H_{i,k}(t) = \int_{t-1}^t H_{i,k-1}(x)dx$ , 两边同时求导可得:

$$H'_{i,k}(t) = H_{i,k-1}(t) - H_{i,k-1}(t-1) = H_{i,k-1}(t) - H_{i+1,k-1}(t).$$

性质 5. 线性无关性.  $H_{i,k}(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上线性无关,特别地,  $H_{i,k}(t), H_{i+1,k}(t), \dots, H_{i+k,k}(t)$ ,  $(n \geq k)$  在区间  $[i+k-1, i+n+1]$  上线性无关.

证明:当  $k=2$  时,显然成立.假设  $k=n$  时,  $H_{i,k}(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上线性无关,则当  $k=n+1$  时,令  $\sum_i \alpha_i H_{i,n+1}(t) = 0$ , 两边同时求导得到:  $\sum_i \alpha_i H'_{i,n+1}(t) = 0$ , 由性质 4 可得:  $\sum_i [\alpha_i H_{i,n}(t) - \alpha_i H_{i+1,n}(t)] = 0$ , 即  $\sum_i (\alpha_i - \alpha_{i-1}) H_{i,n}(t) = 0$ , 由于  $H_{i,n}(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上线性无关,所以  $\alpha_i = \alpha_{i-1} = \alpha, i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , 代入  $\sum_i \alpha_i H_{i,n+1}(t) = 0$ , 得  $\sum_i \alpha H_{i,n+1}(t) = \alpha \sum_i H_{i,n+1}(t) = 0$ , 所以  $\alpha = 0$ , 从而  $H_{i,n+1}(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} (i=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上线性无关.

性质 6. 对称性.

$$H_{i,k}(i+k-t) = H_{i,k}(i+t).$$

证明:当  $k=2$  时,显然成立.假设当  $k=n$  时,  $H_{i,n}(i+n-t) = H_{i,n}(i+t)$ , 则当  $k=n+1$  时,

$$H_{i,n+1}(i+n+1-t) = H_{0,n+1}(n+1-t) = \int_{n-t}^{n+1-t} H_{0,n}(x)dx = \int_{t-1}^t H_{0,n}(n-y)dy = \int_{t-1}^t H_{0,n}(y)dy = H_{0,n+1}(t) = H_{i,n+1}(i+t),$$

即

$$H_{i,n+1}(i+n+1-t) = H_{i,n+1}(i+t).$$

性质 7. 连续性.  $H_{i,k}(t)$  在整个参数空间上为  $k-2$  阶连续.

证明:显然,  $H_{i,2}(t)$  零阶连续,则  $H_{i,3}(t) = \int_{t-1}^t H_{i,2}(x)dx$  一阶连续,  $H_{i,4}(t) = \int_{t-1}^t H_{i,3}(x)dx$  二阶连续,这样可得  $H_{i,k}(t) = \int_{t-1}^t H_{i,k-1}(x)dx$  为  $k-2$  阶连续.

## 2 形状参数 $\lambda$ 的取值范围

本文所给出的基函数中形状参数  $\lambda$  的取值范围是  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq cth^2 \frac{1}{2}$ , 而实际上,随着阶数的增加,形状参数

$\lambda$ 的取值范围还可以扩大,以下定理给出了  $H_{i,k}(t)$  的形状参数  $\lambda$  的取值范围.

**引理 1.** 当  $\lambda > cth^2 \frac{1}{2}$  时,  $H_{0,k}^{(k-2)}(t)$  最多存在  $k+2$  个零点.

**证明:** 由性质 4 递归可得:  $H_{0,k}^{(k-2)}(t) = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i C_{k-2}^i H_{i,2}(t)$ , 即

$$H_{0,k}^{(k-2)}(t) = \begin{cases} (-1)^{i-1} f_i(t), & t \in [i, i+1] \\ f_0(t), & t \in [0, 1] \\ f_k(t), & t \in [k-1, k] \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, k-1),$$

$$f_0(t) = H_{0,2}(t), f_k(t) = (-1)^{k-2} H_{k-2,2}(t)$$

$$f_i(t) = \frac{e}{(e-1)^2} C_{k-2}^{i-1} \left[ \left( 1 + \lambda - \frac{4e\lambda}{(e+1)^2} ch(1+i-t) \right) sh(1+i-t) - \frac{k-i-1}{i} \left( 1 + \lambda - \frac{4e\lambda}{(e+1)^2} ch(t-i) \right) sh(t-i) \right]$$

$$t \in [i, i+1], i = 1, 2, \dots, k-2.$$

容易知道,  $f_0(t), f_k(t)$  最多存在 2 个零点.

当  $i = 1, 2, \dots, \left[ \frac{k-1}{2} \right]$  时, 易知  $f_i(t)$  在  $t \in [i, i+1]$  最多存在 1 个零点. 所以,  $H_{0,k}^{(k-2)}(t)$  在  $t \in [i, i+1]$  最多存在 1 个零点  $\left( i = 1, 2, \dots, \left[ \frac{k-1}{2} \right] \right)$ .

因为

$$H_{0,k}^{(k-2)}(k-t) = H_{0,k}^{(k-2)}(t),$$

所以  $H_{0,k}^{(k-2)}(t)$  在  $t \in [i, i+1]$  最多存在 1 个零点,  $i = \left[ \frac{k-1}{2} + 1 \right], \dots, k-1$ . 当  $\lambda > cth^2 \frac{1}{2}$  时,  $H_{0,k}^{(k-2)}(t)$  最多存在  $k+2$  个零点.

**定理 1.** 当  $\lambda > cth^2 \frac{1}{2}$  时, 在  $t \in (0, k)$  中  $H'_{0,k}(t)$  的零点个数为 1 个或 3 个.

**证明:** 假设  $H'_{0,k}(t)$  在  $t \in (0, k)$  存在  $n$  个零点, 由引理 1 可知  $H_{0,k}^{(k-2)}(t)$  最多存在  $k+2$  个零点. 由  $H_{i,k}(t)$  的定义可得:  $H_{0,k}^{(k-1)}(t) = H_{0,k}^{(k-1)}(k) = 0$ , 则由罗尔定理可知:  $0 < n \leq 3$ .

因为

$$H'_{0,k}(\xi) = H'_{0,k}(k-\xi), H'_{0,k}\left(\frac{k}{2}\right) = H'_{0,k-1}\left(\frac{k}{2}\right) - H'_{0,k-1}\left(\frac{k}{2}\right) = 0,$$

所以  $n \neq 2$ .

所以  $n = 1$  或  $n = 3$ .

**定理 2.** 当  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda, H_{0,k}\left(\frac{k}{2}\right) \geq 0$  时,  $H_{i,k}(t) \geq 0$ .

**证明:** 当  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq cth^2 \frac{1}{2}$  时, 由性质 2 可知,  $H_{i,k}(t) \geq 0$ . 当  $\lambda > cth^2 \frac{1}{2}$  时, 由定理 1 可知, 在  $t \in (0, k)$  中  $H'_{0,k}(t)$  的零点为 1 个或 3 个.

(1) 若在  $t \in (0, k)$  中,  $H'_{0,k}(t)$  的零点个数为 1, 即  $H'_{0,k}\left(\frac{k}{2}\right) = 0$ . 由  $H_{i,k}(t)$  的定义可得, 当  $t \in (0, \text{arcch}2]$  时, 易知  $H_{0,2}(t) > 0$ .

$$H'_{0,k}(t) = H_{0,k-1}(t) - H_{1,k}(t) = H_{0,k-1}(t) = \int_0^t H_{0,k-2}(x) dx = \dots = \underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t H_{0,2}(x) dx}_{k-3} > 0, t \in (0, \text{arcch}2], (k > 3) \quad (*)$$

所以  $H'_{0,k}(t) > 0, t \in \left(0, \frac{k}{2}\right)$ ;  $H'_{0,k}(t) < 0, t \in \left(\frac{k}{2}, k\right)$ , 即  $t = \frac{k}{2}$  为极大值点.

因为  $H_{0,k}(k) = H_{0,k}(0) = 0$ ,

所以  $H_{0,k}(t) \geq 0, H_{i,k}(t) = H_{0,k}(t-i) \geq 0$ .

(2) 若在  $t \in (0,k)$  中,  $H'_{0,k}(t)$  的零点个数为 3.

若  $t = \frac{k}{2}$  为  $H'_{0,k}(t)$  的三重零点, 则证明过程与(1)相同.

若  $H'_{0,k}(t)$  的零点为  $\xi, \frac{k}{2}, k-\xi$  ( $\xi < \frac{k}{2} < k-\xi$ ), 那么  $H''_{0,k}(k-\xi) = H''_{0,k}(\xi) \neq 0$ , 否则,  $H'_{0,k}(t)$  在  $t \in (0,k)$  的零点个数大于 3, 矛盾!

由(\*)得  $H'_{0,k}(t) > 0, t \in (0, \xi)$ .

所以  $H'_{0,k}(t) < 0, t \in (\xi, \frac{k}{2})$ ;  $t = \xi, k-\xi$  为极大值点.

所以  $t = \frac{k}{2}$  为极小值点.

因为  $H_{0,k}(\frac{k}{2}) \geq 0, H_{0,k}(k) = H_{0,k}(0) = 0$ .

所以  $H_{0,k}(\frac{k}{2}) \geq 0$ .

所以  $H_{i,k}(t) = H_{0,k}(t-i) \geq 0$ .

Table 1 The range of the shape parameter  $\lambda$

表 1 形状参数  $\lambda$  的取值范围

3~6 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter	The range of the shape parameter $\lambda$
3 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter	$-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 19.926$
4 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter	$-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 24.0899$
5 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter	$-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 33.8939$
6 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter	$-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 41.4662$

由定理 2 可以得到  $H_{i,k}(t)$  的形状因子  $\lambda$  的取值范围是  $\lambda \geq -cth^2 \frac{1}{2}, H_{0,k}(\frac{k}{2}) \geq 0$ . 对于一个固定的  $\lambda \geq -cth^2 \frac{1}{2}$ , 随着阶数  $k$  的增加, 其函数图像最终都会变成“单峰”的形状(如图 2 所示). 对于一个固定的  $k(k \geq 3)$ , 当  $\lambda \geq -cth^2 \frac{1}{2}, H''_{0,k}(\frac{k}{2}) < 0$  时,  $H_{i,k}(t)$  的函数图像是“单峰”的形状.

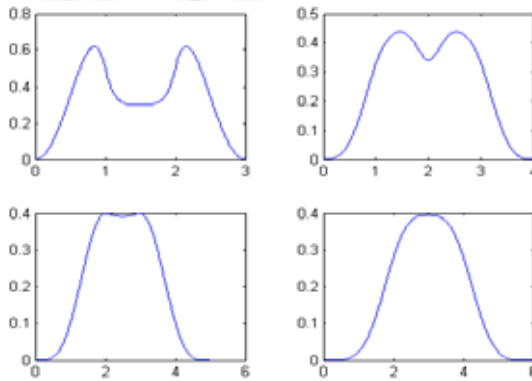


Fig.2 The figure of function  $H_{0,k}(t)$  when  $\lambda=12$  ( $k=3,4,5,6$ )

图 2 当  $\lambda=12$  时,  $H_{0,k}(t)$  的函数图( $k=3,4,5,6$ )

### 3 带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线

记定义在  $[a,b]$  上的  $k$  阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条空间为  $\Omega_k[a,b]$ ,不妨设  $a=k, b=n+1$ ,显然,  $H_{1,k}(t), H_{2,k}(t), \dots, H_{n,k}(t)$  ( $n \geq k$ ) 是空间  $\Omega_k[a,b]$  的一组基(如图 3 所示),因此利用函数  $H_{i,k}(t)$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 可以将  $\Omega_k[a,b]$  中的曲线表示如下:

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^n P_i H_{i,k}(t), \quad k \leq t \leq n+1, n \geq k \tag{1}$$

其中,  $P_i (i=1,2,\dots,n)$  为控制顶点,  $P = [P_1, P_2, \dots, P_n]$  为控制多边形.

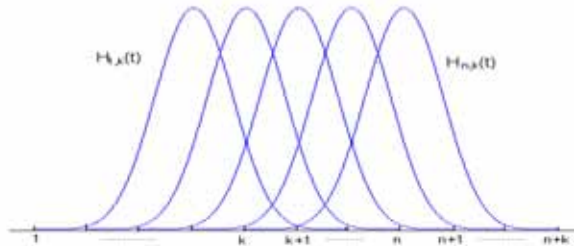


Fig.3 Set of basis  $H_{1,k}(t), \dots, H_{n,k}(t)$  in  $\Omega_k[a,b][k, n+1]$

图 3  $H_{1,k}(t), \dots, H_{n,k}(t)$  是空间  $\Omega_k[a,b][k, n+1]$  的一组基

图 4 为 5 阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线 ( $\lambda = 0.7$ ) 和 5 阶均匀 B 样条曲线.

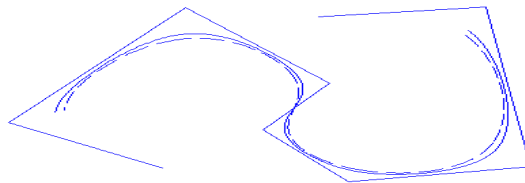


Fig.4 A piece of 5 order uniform B-Spline curve (dashed line) and 5 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline curve with shape parameter (solid line,  $\lambda=0.7$ )

图 4 5 阶均匀 B 样条曲线(虚线)与 5 阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线(实线,  $\lambda=0.7$ )

类似于均匀 B 样条曲线,带形状参数双曲多项式均匀 B 样条具有如下性质:

性质 8. 凸包性.定义在  $[i, i+1]$  上的一段曲线,即  $P_k(t)$  ( $i \leq t \leq i+1, i=k, \dots, n$ ),位于  $k$  个控制顶点  $P_{i-k+1}, \dots, P_i$  的凸包  $H_i$  内,整条曲线(1)位于这些凸包  $H_i$  的并集  $H = \bigcup_{i=1}^n H_i$  之内.这由带形状参数双曲多项式均匀 B 样条基的非负性和权性可以得到.

性质 9. 几何不变性.曲线(1)的形状与坐标系的选择无关.

曲线  $P_k(t)$  上的点都是控制顶点  $P_i (i=1, \dots, n)$  的一个仿射组合,因此不依赖于坐标系的选取.

性质 10. 局部性.改动一个控制顶点,曲线上最多只有  $l(l \leq k)$  段曲线的形状发生变化,而曲线的其余部分不受到影响.

性质 11. 对称性.以  $P_1, P_2, \dots, P_n$  为控制顶点的与以  $P_n, P_{n-1}, \dots, P_1$  为控制顶点的  $k$  阶带形状参数 B 样条曲线是同一条曲线,但是方向相反,即

$$\sum_{i=1}^n P_i H_{i,k}(i+t) = \sum_{i=1}^n P_{n-i} H_{i,k}(i+k-t), \quad t \in [0, k].$$

性质 12. 导数公式:

$$\frac{d}{dt} P_k(t) = \sum_{i=2}^n H_{i,k-1}(t) \Delta P_i, \quad k \leq t < n+1,$$

其中  $\Delta P_i = P_i - P_{i-1}$ .

推论 1. 曲线  $P_k(t)$  ( $k \leq t < n+1$ ) 的  $r$  阶导数为

$$\frac{d^r}{dt^r} P_k(t) = \sum_{i=r+1}^n H_{i,k-r}(t) \Delta^r P_i, r = 0, 1, \dots, k-2.$$

其中  $\Delta^r P_i = \Delta^{r-1} P_i - \Delta^{r-1} P_{i-1}$ . 这由性质 12 直接可得.

#### 4 用带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线表示双曲线

定理 3. 当  $\lambda = 0, -1$ ,  $P_{-2}(x_{-2}, y_{-2}), P_{-1}(x_{-1}, y_{-1}), P_0(x_0, y_0)$  不共线时, 三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线  $P_3(t) = (x, y) = H_{-2,3}(t)P_{-2} + H_{-1,3}(t)P_{-1} + H_{0,3}(t)P_0$  为双曲线一部分.

证明:  $P_3(t) = (x, y) = H_{-2,3}(t)P_{-2} + H_{-1,3}(t)P_{-1} + H_{0,3}(t)P_0 = H_{-2,3}(t)(P_{-2} - P_{-1}) + P_{-1} + H_{0,3}(t)(P_0 - P_{-1})$ .

当  $\lambda=0$  时,

$$\begin{pmatrix} H_{-2,3}(t) \\ H_{0,3}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} cht \\ sht \\ 1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{e}{(e-1)^2} & 0 & -\frac{e}{(e-1)^2} \\ \frac{(e+1)(e^2+1)}{2(e-1)^2} & \frac{e+1}{2(e-1)} & -\frac{e(e+1)^2}{2(e-1)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |T^{-1}| \neq 0,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} H_{-2,3}(t) \\ H_{0,3}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = DT^{-1} \begin{pmatrix} cht \\ sht \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x_{-2} - x_{-1} & x_0 - x_{-1} & x_{-1} \\ y_{-2} - y_{-1} & y_0 - y_{-1} & y_{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

因为  $P_{-2}(x_{-2}, y_{-2}), P_{-1}(x_{-1}, y_{-1}), P_0(x_0, y_0)$  不共线.

所以  $|D| \neq 0$ .

所以 
$$\begin{pmatrix} cht \\ sht \\ 1 \end{pmatrix} = TD^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} cht \\ -sht \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} TD^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 
$$0 = (cht \ sht \ 1) \begin{pmatrix} cht \\ -sht \\ -1 \end{pmatrix} = (x \ y \ 1)(TD^{-1})' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} TD^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

即 
$$H(x, y) = (x \ y \ 1)S' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, S = TD^{-1}.$$

显然,  $H(x, y) = 0$  为双曲线.

当  $\lambda=-1$  时, 同理可证.

三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线可以表示双曲线. 取形状参数  $\lambda = 0$ , 控制顶点为  $P_{-2}\left(-\frac{2a(e-1)}{e+1}, -\frac{2b(e-1)}{e+1}\right), P_{-1}(0, 0), P_0\left(\frac{2ae(e-1)}{e+1}, -\frac{2b(e-1)}{e(e+1)}\right)$ , 则三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线  $P_3(t) = H(x, y) = H_{-2,3}(t)P_{-2} + H_{-1,3}(t)P_{-1} + H_{0,3}(t)P_0$ .

所以 
$$\begin{cases} x = a\left(e^t + \frac{2e}{1+e}\right) \\ y = b\left(e^{-t} - \frac{2}{1+e}\right) \end{cases}, t \in [0, 1],$$

此曲线在双曲线  $\left(\frac{x}{a} - \frac{2e}{1+e}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{2}{1+e}\right) = 1$  上,如图 5 中曲线为双曲线的一部分.

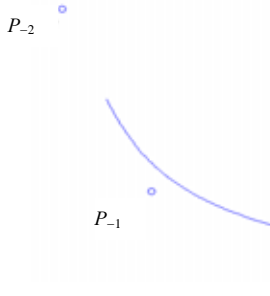


Fig.5 The hyperbola represented by hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter  
图 5 用带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线表示双曲线

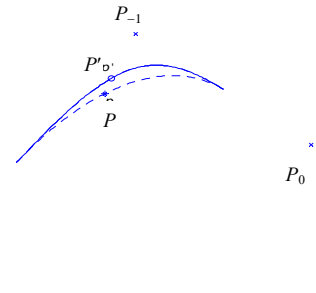


Fig.6 The interpolation of 3 order hyperbolic polynomial uniform B-Spline with shape parameter  
图 6 三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线插值

### 5 三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线的插值

在形状参数  $\lambda$  取值范围内给定  $\lambda = \lambda_0$ , 三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线  $P_3(t) = H_{-2,3}(t)P_{-2} + H_{-1,3}(t)P_{-1} + H_{0,3}(t)P_0$  的两个端点  $P_{-2}, P_0$  已经确定, 要使  $P_3(t_0) = p(x_0, y_0)$ , 可以通过解方程来得到控制顶点  $P_{-1}$  的坐标, 即

$$P_{-1} = \frac{p - H_{-2,3}(t_0)P_{-2} - H_{0,3}(t_0)P_0}{H_{-1,3}(t_0)}$$

在测量插值点  $p(x_0, y_0)$  过程中可能出现误差, 记为  $\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ , 而实际要插值的是点  $p'(x', y') = p(x_0, y_0) \pm \varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ , 我们可以使控制顶点  $P_{-2}, P_{-1}, P_0$  不变, 只需要调整形状参数  $\lambda$ , 使

$$\lambda = \lambda_0 \pm \frac{\varepsilon \times (P_{-2} - P_{-1})(e^2 - 1)^2}{(P_0 - P_{-1}) \times (P_{-2} - P_{-1})e(1 + e^2 - 2e \cosh t_0) \sin h^2 \frac{t_0}{2}}$$

就可以保证  $P_3(t_0) = p'$ .

如果要求三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线  $P_3(t) = \sum_{i=1}^n P_i H_{i,3}(t)$  插值多个点  $Q_i (i = 3, 4, \dots, n)$ , 我们可以令  $P_3(t) = \sum_{i=1}^n P_i H_{i,3}(t) = \sum_{j=i-2}^i P_j H_{j,3}(t) = Q_i (t_i = i, i = 3, 4, \dots, n)$ , 这是有  $n$  个未知量,  $n-2$  个方程的方程组, 添加两个端点条件有唯一解. 其处理过程与文献[8]中的方法类似, 在此不再详细叙述.

### 6 四阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线图形实例

与三次均匀 B 样条曲线一样, 对四阶带形状参数均匀 B 样条曲线, 当要求曲线以  $P_1$  和  $P_n$  分别为起点和终点, 并且在  $P_1$  和  $P_n$  处的切线分别为  $P_2 - P_1$  和  $P_n - P_{n-1}$  时, 只要增加两个顶点  $P_0 = 2P_1 - P_2$  和  $P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}$ , 这里,  $P_0, P_1, \dots, P_{n+1}$  为控制多边形顶点. 当要构造封闭曲线 ( $P_1 = P_n$ ) 时, 只要对控制多边形多取两个顶点  $P_{n+1} = P_2, P_{n+2} = P_3$ . 图 7 分别给出了  $\lambda = -4, -2, 0, 2, 4, 6$  时的开曲线和闭曲线, 随着  $\lambda$  的增大, 曲线逐渐靠近其控制多边形.

### 7 结束语

本文所给出的曲线生成方法, 可以生成位于  $k$  阶均匀 B 样条曲线附近的曲线, 随着形状参数取值的改变, 可以调整曲线接近其控制多边形的程度, 因而具有重要的应用价值.



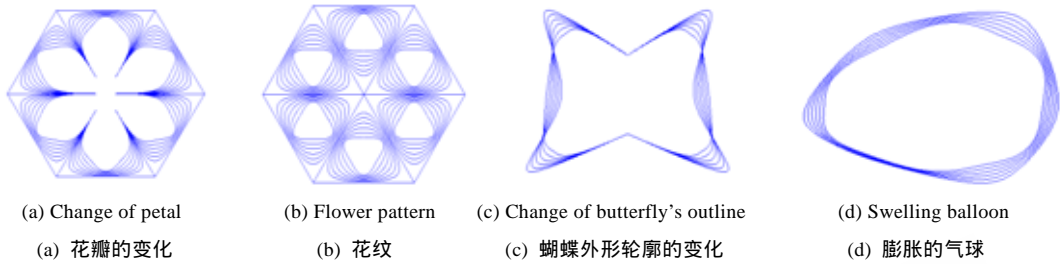


Fig.7 Interpolating end points (left) and closed (right) curves of 4 order hyperbolic polynomial uniform B-spline with shape parameter

图 7 插值于端点(左边)和封闭(右边)的四阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线

我们可以在形状参数的范围  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq cth^2 \frac{1}{2}$  内 (当  $\lambda < -cth^2 \frac{1}{2}$ ,  $t \in (0, \text{arccch} \frac{1+\lambda}{2\lambda})$  时, 易知

$H_{0,2}(t) < 0$ ,  $H_{0,k}(t) = \int_0^t \dots \int_0^t H_{0,2}(x) dx < 0$ , 所以我们只考虑  $\lambda \geq -cth^2 \frac{1}{2}$  时, 形状参数  $\lambda$  的取值范围), 选择不同的参数

值, 进行曲线设计. 实际上, 随着阶数的升高,  $\lambda$  的取值范围越来越大. 如对二阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条, 形状参数的范围是  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq cth^2 \frac{1}{2}$ , 对三阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条, 形状参数的范围是

$-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 19.926$ , 对四阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条, 形状参数的范围是  $-cth^2 \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 24.0899$ . 更

一般地, 对  $k$  阶带形状参数双曲多项式均匀 B 样条,  $\lambda$  的范围是  $\lambda \geq -cth^2 \frac{1}{2}$ ,  $H_{0,k}(\frac{k}{2}) \geq 0$ , 这样, 带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线具有凸包性质. 形状参数  $\lambda$  在一定范围内, 带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线(1)在  $t \in [i, i+1]$  ( $i = k, k+1, \dots, n$ ) 具有变差缩减性质.

由于证明过程烦琐, 我们将另文说明. 带形状参数双曲多项式均匀 B 样条曲线与均匀 B 样条曲线有相同的性质、结构, 保持了均匀 B 样条曲线的一些实用的几何性质, 并且随着阶数的升高, 形状参数可调的范围也越来越大. 然而, 带形状参数双曲多项式均匀 B 样条还有一些不足, 如计算复杂度比较高, 目前还只能证明它具有局部变差缩减性等. 就像世界上没有完美的事物一样, 均匀 B 样条和带形状参数双曲多项式均匀 B 样条都有不足的地方, 只有互相取长补短才能物尽其用.

## References:

- [1] Lü YG, Wang GZ, Yang XN. Uniform trigonometric polynomial B-spline curves. Science in China (Series F), 2002,45(5): 335-343.
- [2] Zhang JW. C-Curves: An extension of cubic curves. Computer Aided Geometric Design, 1996,13(9):199-217.
- [3] Zhang JW. Two different forms of C-B-Splines. Computer Aided Geometric Design, 1997,14(1):31-41.
- [4] Farin G. Curves and surfaces for computer aided geometric design. New York: Academic Press, 1988.
- [5] Piegl L. Modifying the shape of rational B-splines, part1: Surfaces. Computer Aided Design, 1989,21(9):538-546.
- [6] Han XL. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter. Computer Aided Geometric Design, 2002,19(7): 503-512.
- [7] Barsky BA. Computer graphics and geometric modeling using beta-splines. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [8] Wang GJ, Wang GZ, Zhen JM. Computer Aided Geometric Design. Beijing: China Higher Education Press, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 114-116.

## 附中文参考文献:

- [8] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计. 北京: 高等教育出版社. 海德堡: 施普林格出版社, 2001. 114-116.