局部调整插值点的三次样条曲线表示*

韩旭里[1+], 朱承学[2]

[1](中南大学 数学科学与计算技术学院,湖南 长沙 410083)

[2](中南大学 信息科学与工程学院,湖南 长沙 410083)

Cubic Spline Curve Representation Based on Local Adjusting Interpolation Points

HAN Xu-Li[1+], ZHU Cheng-Xue[2]

[1](School of Mathematical Sciences and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

[2](School of Information Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-731-8879237, Fax: +86-731-8879237, E-mail: xlhan@mail.csu.edu.cn, http://www.csu.edu.cn

Received 2004-04-05; Accepted 2004-07-05

Han XL, Zhu CX. Cubic spline curve representation based on local adjusting interpolation points. *Journal of Software*, 2004,15(Suppl.):273~277.

Abstract: A method of generating cubic spline curves with local shape parameters is presented in this paper. The given method takes the Hermite interpolation curves and the cubic non-uniform B-spline curves as the special cases and unifies the representation of the curves interpolating the control polygon and the cubic non-uniform B-spline curves approximating the control polygon. A shape parameter only influences two curve segments, and the expression of the curves retains the simple construction of the expression of the cubic Bézier curves. We can adjust the shape of the curves locally by changing the values of the shape parameters or adjusting the Bézier control points. Based on the given spline curves, the bicubic spline surfaces with local shape parameters are given.

Key words: B-spline curve; Bézier curve; interpolation; shape adjusting

摘 要: 给出了带局部形状参数的三次样条曲线生成方法.所给方法以 Hermite 型插值曲线和非均匀三次 B 样条曲线为特殊情形,将插值于控制点的曲线和逼近于控制多边形的非均匀 B 样条曲线统一起来.一个形状参数只影响两条曲线段,曲线表达式保持了三次 Bézier 曲线表达式的简单结构.改变形状参数的值或调整 Bézier 控制点,可以局部调整曲线的形状.基于所给样条曲线,给出了带局部形状参数的双三次样条曲面.

关键词: B 样条曲线;Bézier 曲线;插值;形状调整

曲线曲面的形状调整是计算机辅助几何设计中的重要研究问题.对于给定的控制点,可以用不同的方法生成曲线曲面.满意的曲线曲面设计,往往要经过多次形状修改才能得到.形状调整的方法一般有使用形状参数和调整控制点的方法.文献[1~5]是基于形状参数的方法,较多的是对均匀节点构造全局形状调整方法.文献[6]给出了调整控制点的方法,调整控制点的方法较多的是基于某种几何约束来进行.现在使用较多的是有理样条方

---

* Supported by the Natural Science Foundation of Hunan Province of China under Grant No.01JJY2095 (湖南省自然科学基金)

作者简介: 韩旭里(1957－),男,湖南武岗县人,博士,教授,主要研究领域为数值分析,计算机辅助几何设计,系统优化计算;朱承学(1972－),男,讲师,主要研究领域为计算机辅助几何设计,计算机应用技术.

法,如文献[7~10],有理样条方法中的权数具有局部调整作用.然而,一个权数往往要影响多段曲线,形状调整的效果也不容易控制.文献[11]给出的是一种带形状参数的张量积插值曲面生成方法.因此,如何使用局部张量参数,建立更加实用的曲线曲面生成方法,仍然是值得研究的重要问题.

本文考虑插值曲线和逼近曲线的统一生成方法,给出对非均匀节点情形也适用的带局部形状参数的曲线形状调整方法,并且将曲线表达式构造成简单形式.所得结果是对现有的Hermite参数插值曲线和非均匀三次B样条曲线两种重要方法的进一步扩展.

1 局部调整插值点的 Hermite 型方法

三次 Hermite 参数曲线是插值于给定数据点并在数据点处具有已知切矢的参数曲线,曲线具有 C^1 连续性,插值方法是局部的.基于 Hermite 型方法,我们将给出一种通过调整插值点来实现曲线形状调整的方法.

给定控制点 $P_i\in \boldsymbol{R}^d(d=2,3;i=0,1,\ldots,n)$和节点 $u_0\le u_1<\ldots<u_{n-1}\le u_n$.对所有可能的 i 和 $u\in[u_i,u_{i+1}]$,$\sigma_i\ge 0,\beta_i\ge 0,\sigma_i+\beta_i\le 1$,定义三次 Hermite 型参数曲线:

$$C(u)=(1-t)^3Q_i+3(1-t)^2t\left(Q_i+\frac{1}{3}h_iT_i\right)+3(1-t)t^2\left(Q_{i+1}-\frac{1}{3}h_iT_{i+1}\right)+t^3Q_{i+1} \tag{1}$$

其中,$t=(u-u_i)/h_i,h_i=u_{i+1}-u_i$,

$$Q_i=\sigma_iP_{i-1}+(1-\sigma_i-\beta_i)P_i+\beta_iP_{i+1} \tag{2}$$

T_i 是曲线 $C(u)$在 $u=u_i$ 处的切矢向量.

曲线 $C(u)$是分段曲线,有端点行为 $C(u_i)=Q_i,C'(u_i)=T_i$.这样,曲线 $C(u)$是插值于 Q_i 的 C^1 连续的曲线.

表达式(2)说明曲线 $C(u)$插值于 Q_i 的行为是形状可调整的,可以通过选取σ_i,β_i的值,使曲线 $C(u)$经过 P_i 附近的点,σ_i和β_i为形状参数.条件$\sigma_i\ge 0,\beta_i\ge 0,\sigma_i+\beta_i\le 1$ 说明 Q_i 位于三角形 $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 内.当$\sigma_i=\beta_i=0$ 时,曲线插值于控制点 P_i.随着σ_i和β_i的减少,曲线上的点 $C(u_i)$将接近于控制点 P_i.显然,一个形状参数只影响两条曲线段.

切矢向量有多种取法,常用的一种是取

$$T_i=\frac{h_i}{h_{i-1}+h_i}\frac{P_i-P_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}\frac{P_{i+1}-P_i}{h_i} \tag{3}$$

如果补充节点 u_{-1},u_{n+1},我们可以给出切矢向量的另一种形式:

$$T_i=\frac{3}{h_{i-1}+h_i}\left[\frac{h_i}{h_{i-2}+h_{i-1}+h_i}(P_i-P_{i-1})+\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i+h_{i+1}}(P_{i+1}-P_i)\right] \tag{4}$$

后面的内容将说明该切矢的作用.

图 1 和图 2 是按式(1)使用均匀节点生成的曲线,切矢向量按式(4)计算,端点用了延拓控制点,端点切矢取为 $T_0=\frac{P_1-P_0}{h_0},T_n=\frac{P_n-P_{n-1}}{h_{n-1}}$.实线为对应的$\sigma_i,\beta_i$取为 0.17(后面的内容将说明对应的曲线为三次 B 样条曲线),虚线为对应的σ_i,β_i取为 0.1,点划线为对应的σ_i,β_i取为 0.

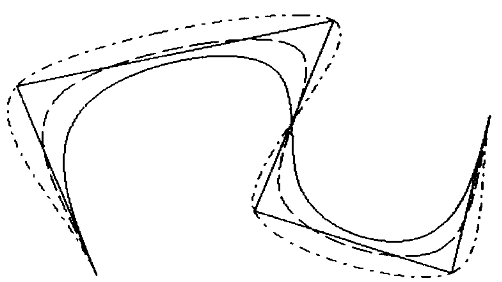

图 1 整体调整曲线

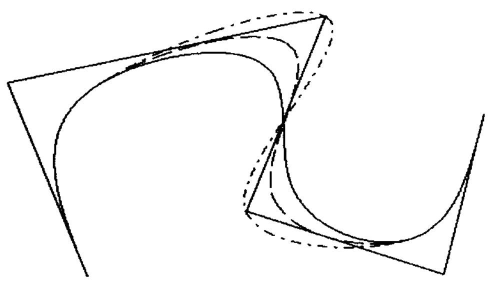

图 2 局部调整曲线

2 形状参数的替换

在上述的方法中,我们通过两个形状参数局部调整曲线在一个节点处的位置,具有较大的灵活性.考虑到可用节点来调整曲线的形状,曲线在一点处的位置也可用一个局部形状参数来调整,我们给出如下形式的形状参数

$$\alpha_i=\frac{\lambda_i h_i^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-2}+h_{i-1}+h_i)},\beta_i=\frac{\lambda_i h_{i-1}^2}{(h_{i-1}+h_i)(h_{i-1}+h_i+h_{i+1})} \tag{5}$$

这样,我们可用一个形状参数 λ_i 来局部控制曲线在 $u=u_i$ 处的位置,并且可发挥非均匀节点对插值点 Q_i 的影响.这样,我们也可以允许有重节点出现,比如当 $h'_{i-1}=0,\lambda_i=(h_{i-2}+h_i)/h_i$ 时,$\sigma_i=1,\beta_i=0$,即曲线插值于 $Q_i=P_{i-1}$ 点.这种性质是非均匀三次 B 样条的优势.

此外,形状参数 λ_i 的取值范围一般比 σ_i,β_i 大.例如,对等距节点,由 $\sigma_i+\beta_i\le 1$ 可得 $\lambda_i\le 3$.这样,可通过明显改变形状参数的值来进行曲线形状调整.

3 非均匀三次样条方法

我们知道,Bézier 曲线可以看成是非均匀 B 样条曲线的特殊情形,曲线(1)是 Bézier 型曲线.一般地,Bézier 曲线形式简单.对非均匀 B 样条的节点作特别的选取即可得到 Bézier 型表达式.然而,对 Bézier 型曲线的表达式作改变而得出 B 样条曲线表达式的方法却是不容易的,很少有这方面的研究工作出现.这里,我们将由式(1)导出非均匀三次 B 样条曲线的表达式.

在式(1)中,按式(4)取 T_i,按式(5)取 σ_i,β_i,并令 $\lambda_i=1$,则对 $u=[u_i,u_{i+1}]$,直接计算可得:

$$C''(u_i^+)=\frac{6}{h_{i-1}^2}\beta_i(P_{i+1}-P_i)-\frac{6}{h_i^2}\alpha_i(P_i-P_{i-1}),\ C''(u_{i+1}^-)=\frac{6}{h_i^2}\beta_{i+1}(P_{i+2}-P_{i+1})-\frac{6}{h_{i+1}^2}\alpha_{i+1}(P_{i+1}-P_i).$$

由此可见,此时,曲线 $C(u)$ 在单节点处是 C^2 连续的.由三次 B 样条的唯一性可知,式(1)即为非均匀三次 B 样条曲线.

我们将按式(4)取 T_i,按式(5)取 σ_i,β_i(λ_i 不一定取为 1)的表达式(1)称为非均匀三次样条型曲线.这样,当所有 $\lambda_i=0$ 时,式(1)为 Hermite 插值型曲线;当所有 $\lambda_i=1$ 时,式(1)为非均匀三次 B 样条曲线.式(1)将插值曲线和逼近曲线统一起来了.随着所有 λ_i 由 0 变化为 1,曲线(1)由插值于控制点的曲线变化为对应控制多边形下的非均匀三次 B 样条曲线.

图 3 是由三次样条曲线旋转而成的曲面,曲线端点的处理与图 1 和图 2 的说明一样.从左至右,3 个图形的 λ_i 都分别取为 0.6,1.0,1.5. λ_i 都取为 1.0 时,对应的曲线为三次 B 样条曲线.

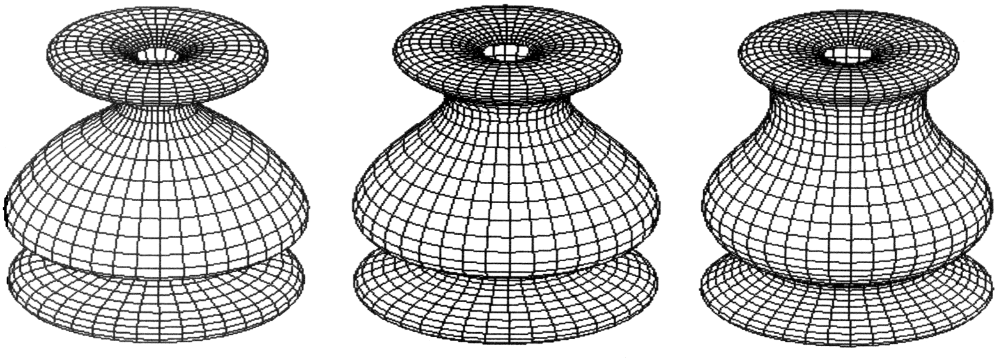

图 3 三次样条曲线旋转曲面实例

4 张量积曲面

采用张量积方法可以将曲线生成方法转化为曲面生成方法.为了记号上的方便,先将式(1)转化为用控制点

表示的形式.一般地,设

$$T_i=\sigma_i\left(P_i-P_{i-1}\right)+\tau_i\left(P_{i+1}-P_i\right) \tag{6}$$

其中 $\sigma_i,\tau_i\geq 0$.这样,式(1)可写成

$$C(u)=\sum_{k=0}^{3}a_{ik}(t)P_{i+k-1} \text{ xxx} \tag{7}$$

其中,$\varphi_i=1-\alpha_i-\beta_i$,

$$\begin{aligned}
a_{i0}(t)&=(1-t)^2\left[\alpha_i(1+2t)-h_i\sigma_i\ t\right],\\
a_{i1}(t)&=\varphi_i(1-t)^2(1+2t)+\alpha_{i+1}t^2(3-2t)+h_i(1-t)t\left[(\sigma_i-\tau_i)(1-t)+\sigma_{i+1}t\right],\\
a_{i2}(t)&=\beta_i(1-t)^2(1+2t)+\varphi_{i+1}t^2(3-2t)+h_i(1-t)t\left[\tau_i(1-t)+(\tau_{i+1}-\sigma_{i+1})t\right],\\
a_{i3}(t)&=t^2\left[\beta_{i+1}(3-2t)-h_i\tau_{i+1}(1-t)\right].
\end{aligned}$$

下面,按张量积方法容易写出双三次样条曲面.设给定数据 $P_{ij}\in\boldsymbol{R}^d(d=2,3;i=0,1,\ldots,n;j=0,1,\ldots,m)$和矩阵$[u_{-1},u_{n+1}]\times[v_{-1},v_{m+1}]$上的节点.$u_{-1}\leq u_0\leq\ldots\leq u_{n+1},v_{-1}\leq v_0\leq\ldots\leq v_{m+1}$,这里,节点的重数不超过 3.对$(u,v)\in[u_i,u_{i+1}]\times[v_j,v_{j+1}]$,定义双三次样条曲面为

$$S(u,v)=\sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3}a_{ik}(t)a_{jl}(s)p_{i+k-1,j+l-1} \tag{8}$$

其中,$t=(u-u_i)/h_i,s=(v-v_j)/g_j,h_i=u_{i+1}-u_i,g_j=v_{j+1}-v_j$.

值得提出的是,在式(8)中,$a_{ik}(t)$和 $a_{jl}(s)$所用的形状参数σ_i与σ_j,β_i与β_j可以是不同的局部参数,即 u 方向和 v 方向可以分别使用不同的局部形状参数.通过改变形状参数的值而调整曲面插值于不同的点.

图 4 中的两图都是由 9 块小曲面片组成的对应于同一控制多面体的双三次样条曲面.在左图中,所有 λ_i 取为 0.6.在右图中,所有 λ_i 取为 1.8.形状参数的改变,明显地调整了曲面的形状.

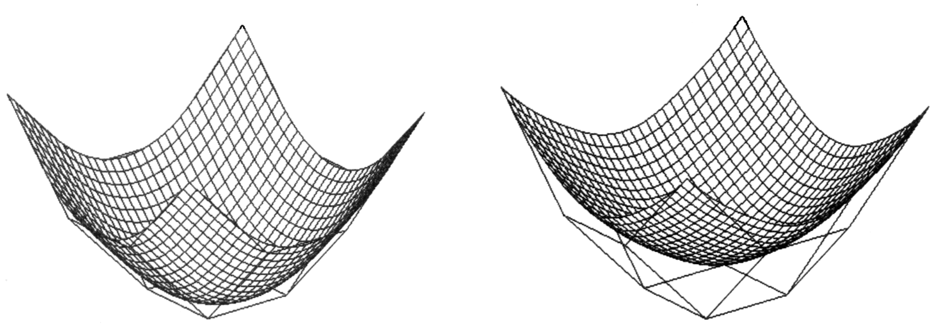

图 4　不同形状参数的双三次样条曲面

5　结束语

所给出的样条曲线曲面方法是带有局部形状参数的方法,一个形状参数只影响两条曲线段.所给方法以 Hermite 型插值方法和非均匀三次 B 样条方法为特殊情形,将插值于控制点的曲线和逼近于控制多边形的非均匀 B 样条曲线统一起来了.通过改变形状参数的取值,可以调整曲线曲面相对控制多边形或多面体的位置,因而具有重要的应用价值.

所给曲线表达式在适用于非均匀节点的一般情形的同时,保持了与三次 Bézier 曲线相同的结构,因而结构简单,使用方便.所给图形实例说明曲线设计方法是很有效的.

对曲线(1)而言,所给方法体现了调整三次 Bézier 曲线控制点的特点,即通过调整 Bézier 控制点而调整曲线的形状.对曲线(7)而言,所给方法又是通过改变基函数的值,而改变控制点的权值,即通过改变局部形状参数的值而直接调整曲线的形状.调整 Bézier 曲线控制点和调整局部形状参数都具有直观可操作性.

References:

[1] Barsky BA. Computer Graphics and Geometric Modeling Using Beta-Spline. Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.

[2] Gregory JA, Sarfraz M. A rational cubic spline with tension. Computer Aided Geometric Design, 1990,7(9):1~13.

[3] Yves M, *et al.* A shape control fitting method for Bézier curves.Computer Aided Geometric Design, 1998,15(9):879~891.

[4] Han XL. Quadratic trigonometric polynomial curves with a shape parameter. Computer Aided Geometric Design, 2002,19(7): 503~512.

[5] Han XL, Liu SJ. An extension of the cubic uniform B-spline curve. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2003,15(5):576~578 (in Chinese with English abstract).

[6] Piegl L. Modifying the shape of rational B-spline, Part I: Curves. Computer Aided Design, 1989,21:509~518.

[7] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. New York: Springer-Verlag, 1995.

[8] Sónchez-Reyes J. A simple technique for NURBS shape modification. IEEE Computer Graphics and Application, 1997,17:52~59.

[9] Imre J. Weight-Based shape modification of NURBS curves. Computer Aided Geometric Design, 1999,16(5):377~383.

[10] Lei KB. Shape control for rational cubic uniform B-spline curves. Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics, 2000,12(8):601~604 (in Chinese with English abstract).

[11] Peter C. An interpolating piecewise bicubic surface with shape parameters. Computer and Graphics, 2001,25(3):463~481.

附中文参考文献:

[5] 韩旭里,刘圣军.三次均匀 B 样条曲线的扩展.计算机辅助设计与图形学学报,2003,15(5):576~578.

[10] 雷开彬.有理三次均匀 B 样条曲线的形状控制.计算机辅助设计与图形学学报,2000,12(8):601~604.