

一类超越曲线的有理表示*

樊敏¹, 王丹¹, 张帆¹; 康宝生²⁺

¹(西北大学 数学系, 陕西 西安 710069)

²(西北大学 计算机科学系, 陕西 西安 710069)

Rational Representation of a Class of Transcendental Curves

FAN Min¹, WANG Dan¹, ZHANG Fan¹, KANG Bao-Sheng²⁺

¹(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

²(Department of Computer Science, Northwest University, Xi'an 710069, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-29-88373881, Fax: +86-29-88303908, E-mail: bskang@nwu.edu.cn, <http://www.nwu.edu.cn>

Received 2004-04-05; Accepted 2004-07-05

Fan M, Wang D, Zhang F, Kang BS. Rational representation of a class of transcendental curves. *Journal of Software*, 2004,15(Suppl.):259~263.

Abstract: Based on the relationship between rational Bernstein basis and Bernstein-like trigonometric basis, and the properties of normalized B-basis of the space of m -order trigonometric polynomial, a method is obtained by which the basis of the space can be transformed into rational Bernstein basis. An efficient algorithm is developed to obtain the rational representation for segment of a class of transcendental curves which are in the space.

Key words: rational Bézier curve; trigonometric curve; normalized B-basis; hypotrochoids; epitrochoids; n -leaved rose

摘要: 基于类 Bernstein 三角基函数和有理 Bernstein 基函数之间的关系, 利用三角多项式空间规范 B 基的性质, 得到将该空间基函数转换为有理 Bernstein 基函数的方法, 给出了该空间中超越曲线有理表示的有效算法。

关键词: 有理 Bézier 曲线; 三角曲线; 规范 B 基; 长(短)辐圆内(外)次摆线; n -叶玫瑰线

有理 Bernstein-Bézier 模型是计算机辅助几何设计(CAGD)中多项式曲线曲面表示的标准^[1]。有理模型不仅可以统一表示自由型曲线曲面和经典解析曲线曲面^[2], 而且可以通过调整权因子, 相应地改变曲线曲面的形状, 达到灵活控制的目的, 是目前 CAD/CAM 系统的国际标准。但是, 有理模型无法直接表示在机械制造业、电子工业和医学等领域中应用广泛的超越曲线, 如长(短)辐圆内(外)次摆线, n -叶玫瑰线等。因此, 在现有的有理表示系统中如何精确表示超越曲线是一个非常重要的课题。

Javier Sanchez-Réyes 建立了三角多项式空间的类 Bernstein 三角基函数与有理 Bernstein 基函数之间的联

* Supported by the Foundation of Shanxi Education Committee of China under Grant No.00JK119 (陕西省教育厅专项基金资助项目)

作者简介: 樊敏(1980-), 女, 河南焦作人, 硕士生, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学; 王丹(1980-), 女, 硕士生, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学; 张帆(1977-), 男, 讲师, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学; 康宝生(1961-), 男, 博士, 教授, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学。

系,并给出了三角曲线有理表示中权因子的几何意义^[3].此后,他又给出了长(短)辐圆内(外)次摆线的有理 Bézier 表示方法,先用类 Bernstein 三角基函数表示两段圆弧,然后将两段圆弧的控制顶点叠加作为长(短)辐圆内(外)次摆线的控制顶点,进而得到有理表示^[4].这种方法不具有一般性,无法推广到三角多项式空间的所有超越曲线.本文通过三角多项式空间的基函数和有理 Bernstein 基函数之间的转换,解决了这个问题.第 2 节给出了详细的算法描述.

1 类 Bernstein 三角基函数与有理 Bernstein 基函数之间的关系

定义 1.1. 区间 $[-\Delta, \Delta]$, $\Delta \in (0, \pi/2)$ 上的 m 阶三角多项式空间 $\Gamma_m = \{\cos it, \sin it\}_{i=0}^m$ 的类 Bernstein 三角基函数为

$$N_i^n(t) = \frac{\omega_i^n}{S^n} \binom{n}{i} \sin^i\left(\frac{\Delta+t}{2}\right) \sin^{n-i}\left(\frac{\Delta-t}{2}\right), t \in [-\Delta, \Delta] \tag{1}$$

其中, $n = 2m, S = \sin \Delta, C = \cos \Delta$,

$$\omega_i^n = \binom{n}{i}^{-1} \sum_{r=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{m}{i-r} \binom{i-r}{r} (2C)^{i-2r} \tag{2}$$

$\lfloor i/2 \rfloor$ 为小于等于 $i/2$ 的最大整数.

显然, ω_i^n 具有对称性,即 $\omega_i^n = \omega_{n-i}^n (i \leq n)$, 而 $\Delta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), 0 < C < 1$, 所以 $\omega_i^n > 0$.

类 Bernstein 三角基函数具有以下性质^[3]:

性质 1.1(正性). $N_i^n(t) \geq 0, t \in [-\Delta, \Delta], i = 0, \dots, n$.

性质 1.2(权性). $\sum_{i=0}^n N_i^n(t) = 1, t \in [-\Delta, \Delta]$.

性质 1.3(对称性). $N_i^n(t) = N_{n-i}^n(-t), t \in [-\Delta, \Delta], i = 0, \dots, n$.

引理 1.1^[3]. $N_i^n(t), i = 0, \dots, n$ 是 Γ_m 的一组规范 B 基.

引理 1.2^[3]. 若 $(N_0^n(t), N_1^n(t), \dots, N_n^n(t))$ 是 $n+1$ 维空间 $\Gamma_m \subset C^n[a, b]$ 中的规范 B 基, 则应满足条件:

$$\begin{cases} N_i^{(j)}(a) = 0, & j = 0, 1, \dots, i-1 \\ N_i^{(i)}(a) > 0 \\ N_i^{(j)}(b) = 0, & j = 0, 1, \dots, n-1-i \\ N_i^{(n)}(b) \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^k N_i^{(k)}(a) = 0 \\ \sum_{i=0}^k N_{n-i}^{(k)}(b) = 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, n \tag{3}$$

给定 $n+1$ 个控制顶点 $b_i, i = 0, \dots, n$, Γ_m 空间的一条三角曲线可以写为

$$c(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_i^n(t), t \in [-\Delta, \Delta]$$

若相应地给定 $n+1$ 个权因子 $\omega_i, i = 0, \dots, n$, 可以生成一条有理 Bézier 曲线:

$$b(u) = \sum_{i=0}^n b_i R_i^n(u), u \in [0, 1]$$

其中, $R_i^n(u) = \frac{\omega_i^n B_i^n(u)}{\sum_{i=0}^n \omega_i^n B_i^n(u)}$ 是 n 次有理 Bernstein 基函数, $B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$ 是 n 次 Bernstein 多项式.

定理 1.1. 引入参数变换:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{\tan(t/2)}{2 \tan(\Delta/2)} \tag{4}$$

取 $R_i^n(u)$ 中的 ω_i^n 为式(2)中的 ω_i , 则 $R_i^n(u) = N_i^n(t)$.

根据定理 1.1, 可以建立空间 Γ_m 中三角曲线 $c(t)$ 的有理 Bézier 表示方法.

2 Γ_m 空间中超越曲线的表示

Γ_m 空间中任何一条超越曲线,经过参数化后可由基 $\{\cos it, \sin it\}_{i=0}^m$ 线性表出,然后通过基转换矩阵 A 将其重新表示为基 $\{N_i^n(t)\}_{i=0}^n$ 的线性组合,即将其表示成一条有理 Bézier 曲线.公式表述如下:

$$c(t) = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{n-1} \quad c_n] \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ \sin t \\ \vdots \\ \cos mt \\ \sin mt \end{bmatrix} = [c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_n] A \begin{bmatrix} N_0^n(t) \\ N_1^n(t) \\ \vdots \\ N_n^n(t) \end{bmatrix}$$

$$= [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n] \begin{bmatrix} R_0^n(t) \\ R_1^n(t) \\ \vdots \\ R_n^n(t) \end{bmatrix} = b(u) \tag{5}$$

因此,表示的关键是求基转换阵 $A = \{a_{ij}\}_{(n+1) \times (n+1)}$,使

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ \vdots \\ \sin mt \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} N_0^n(t) \\ N_1^n(t) \\ \vdots \\ N_n^n(t) \end{bmatrix} \tag{6}$$

首先,我们给出关于矩阵 A 的性质的命题.

命题 2.1. (1) A 的首行元素全为 1;

(2) 除首行元素外, A 的偶数行元素关于第 m 列对称,奇数行元素关于第 m 列反对称.

证明:(1) 由规范 B 基的权性 $\sum_{i=0}^n N_i^n(t) = 1$,即得

$$a_{0j} = 1, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

(2) 对 $i = 1, \dots, n$,由式(6)有

$$a_{i0}N_0^n(t) + a_{i1}N_1^n(t) + \dots + a_{in}N_n^n(t) = F_i(t) \tag{7}$$

其中, $F_i(t) = \begin{cases} \cos((i+1)t/2), & i \text{ 为奇数} \\ \sin(it/2), & i \text{ 为偶数} \end{cases}$

当 i 为奇数时,

$$a_{i0}N_0^n(-t) + \dots + a_{in}N_n^n(-t) = F_i(-t) = F_i(t) \tag{8}$$

利用基函数的性质 1.3,由式(7)、式(8)得

$$(a_{i0} - a_{in})N_0^n(t) + \dots + (a_{im} - a_{i0})N_n^n(t) = 0$$

由基函数的线性无关性,得 $a_{i0} = a_{in}, a_{i1} = a_{i,n-1}, \dots, a_{i,m-1} = a_{i,m+1}$.

同理可证,当 i 为偶数时 $a_{i0} = -a_{in}, a_{i1} = -a_{i,n-1}, \dots, a_{i,m-1} = -a_{i,m+1}$. □

基于命题 2.1,我们只需求基转换矩阵 A 中的 $a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{i,m-1}, a_{im}, i = 1, 2, \dots, n$,共 $n(m+1)$ 个元素.下面给出求出这些元素的方法.

对式(7)依次求在 $t = -\Delta$ 处的 $0 \sim m$ 阶导数,得方程组:

$$\begin{bmatrix} N_0^n(-\Delta) & N_1^n(-\Delta) & \dots & N_n^n(-\Delta) \\ N_0^{n(1)}(-\Delta) & N_1^{n(1)}(-\Delta) & \dots & N_n^{n(1)}(-\Delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0^{n(m)}(-\Delta) & N_1^{n(m)}(-\Delta) & \dots & N_n^{n(m)}(-\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i(-\Delta) \\ F_i^{(1)}(-\Delta) \\ \vdots \\ F_i^{(m)}(-\Delta) \end{bmatrix} \tag{9}$$

由引理 1.1 及引理 1.2,方程组(9)可简化为

$$W_{(m+1) \times (m+1)} \begin{bmatrix} a_{i0} \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{im} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i(-\Delta) \\ F_i^{(1)}(-\Delta) \\ \vdots \\ F_i^{(m)}(-\Delta) \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中,

$$W_{(m+1) \times (m+1)} = \begin{bmatrix} N_0^n(-\Delta) & N_1^n(-\Delta) & \dots & N_m^n(-\Delta) \\ N_0^{n(1)}(-\Delta) & N_1^{n(1)}(-\Delta) & \dots & N_m^{n(1)}(-\Delta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_0^{n(m)}(-\Delta) & N_1^{n(m)}(-\Delta) & \dots & N_m^{n(m)}(-\Delta) \end{bmatrix}$$

是典范阵(canonical),即为对角线元素非零的下三角 Wronskian 矩阵.

显然,方程组(10)的解存在且唯一,按照从上至下的顺序依次求解即可.

综合上述过程,给出三角多项式空间中超越曲线有理表示的算法流程:

Step 1. 对曲线进行参数化,用基函数 $\{\cos it, \sin it\}_{i=0}^m$ 表示.

Step 2. 对基函数 $N_i^n(t), i=0,1,\dots,m$ 求 $t=-\Delta$ 处的 $0 \sim m$ 阶导数.

Step 3. 将 Step2 中的结果代入方程组(10)求解.

Step 4. 根据命题 2.1,得到基转换阵 A .

Step 5. 将三角曲线 $c(t)$ 的控制顶点向量与矩阵 A 相乘,得到有理 Bézier 曲线 $b(u)$ 的控制顶点向量;

Step 6. 生成相应的有理 Bézier 曲线,算法结束.

3 数值实例

根据上述算法,得到 Γ_m 空间一条超越曲线 $c(t)$ 的控制顶点,生成曲线 $c(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_i^n(t)$,

$t \in [-\Delta, \Delta], (\Delta \in (0, \pi/2))$,从而得到有理表示 $b(u) = \sum_{i=0}^n b_i R_i^n(u), u \in [0, 1]$. 因为 $\Delta \in (0, \pi/2)$,对于周期大于等于 π 的曲线,这种方法不能仅通过一组控制顶点生成一个周期上的整条曲线,需要对曲线进行参数变换或利用曲线的对称性.例 1 给出详细表示过程,其他 3 个例子的表示与例 1 类似,不再赘述.

例 1:4-叶玫瑰线 $((\sin t + \sin 3t), (\cos t - \cos 3t))$ 的有理表示(如图 1 所示).

首先,求 $[-\pi/3, \pi/3]$ 上曲线段的控制顶点及对应的权因子;然后,令 $t = \bar{t} - \pi/2$,则原曲线化为 $(-\cos \bar{t} + \cos 3\bar{t}, \sin \bar{t} + \sin 3\bar{t})$, $\bar{t} \in [-\pi/6, \pi/6]$,求曲线在 $t \in [-2\pi/3, -\pi/3]$ 上的控制顶点及对应的权因子;这样,得到 $[-2\pi/3, \pi/3]$ 上的 4-叶玫瑰线,利用对称性生成其余部分,即可得到整条曲线.

例 2:3-叶玫瑰线 $(\sin 2t + \sin 4t, \cos 2t - \cos 4t)$ 的有理表示(如图 2 所示).

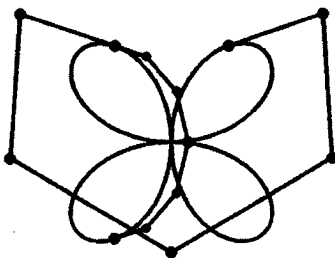


图 1 4-叶玫瑰线

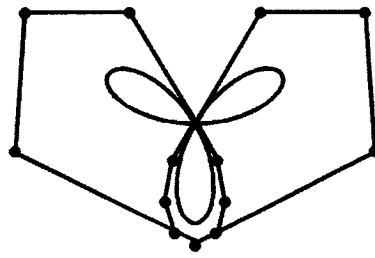


图 2 3-叶玫瑰线

例 3:长辐圆外次摆线 $(2(\cos t - \cos 2t), 2(\sin t - \sin 2t))$ 是单位圆周沿另一个单位圆周的外部滚动无滑动时,动圆外部到圆心距离为 2 的点 M 所描成的轨迹(如图 3 所示).

例 4:长辐圆内次摆线 $(2\cos t + 3\cos 2t, 2\sin t - 3\sin 2t)$ 是单位圆周沿另一个半径为 3 的圆周的内部滚动无滑动时,动圆外部到圆心距离为 3 的点 M 所描成的轨迹(如图 4 所示).

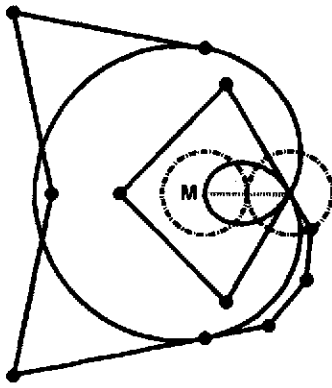


图3 长辐圆外次摆

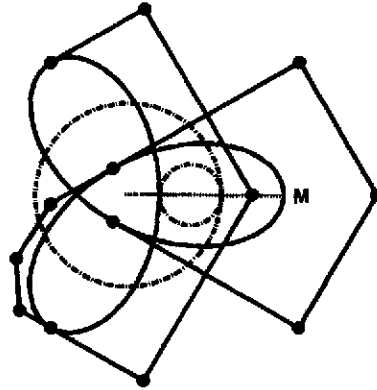


图4 长辐圆内次摆线

4 结论

本文利用有理 Bernstein 基函数和类 Bernstein 三角基函数之间的关系及 Γ_m 空间规范 B 基的性质,给出空间 $\Gamma_m = \{\cos it, \sin it\}_{i=0}^m$ 的基函数与 n 次有理 Bernstein 基函数之间基转换矩阵的性质,使基转换矩阵的计算复杂度降到 $O(m \times n)$,在此基础上给出了 Γ_m 空间超越曲线有理表示的算法,该算法简单实用,有效解决了现有系统不能精确表示超越曲线的问题.但是,这种表示是偶数次的,进一步研究其他超越曲线的有理表示将是我们今后工作的方向.

References:

- [1] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. Springer-Verlag, 1995.
- [2] Mainar E, Peña JM, Sanchez-Réyes J. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model. *Computer Aided Geometric Design*, 2001,18(1):37~60.
- [3] Sanchez-Réyes J. Harmonic rational Bézier curves, p-Bézier curves and trigonometric polynomials. *Computer Aided Geometric Design*, 1998,15(9):909~923.
- [4] Sanchez-Réyes J. Bézier representation of epitrochoids and hypotrochoids. *Computer Aided Design*, 1999,31(12):747~750.