

基于群论的柏拉图立体着色方案三维模型构造*

张大坤^{1,2+}, 王光兴¹

¹(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

²(沈阳工业大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110023)

Construction of Three-Dimensional Model of Platonic Solid Coloring Mode Based on Group Theory

ZHANG Da-Kun^{1,2+}, WANG Guang-Xing¹

¹(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

²(School of Information Science and Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China)

+ Corresponding author: Phn: +86-24-25691365, E-mail: zhangdakun2002@163.com

Received 2002-12-02; Accepted 2003-04-15

Zhang DK, Wang GX. Construction of three-dimensional model of Platonic solid coloring mode based on group theory. *Journal of Software*, 2004,15(2):292~299.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/15/292.htm>

Abstract: An idea of implementing three-dimensional model for coloring mode of Platonic solids in accordance with space rotational group of Platonic solids is raised, and the problem in constructing three-dimensional model directly related to symmetry is thus resolved. A new classification method of group elements in a rotational group of Platonic solids is given. Three new concepts such as abstracted symmetry of group elements, local number of colors and saturated number of colors are put forward. Constructing coloring mode for the abstracted object and then constructing a method that the abstracted coloring mode is mapped into a three-dimensional space are raised. An algorithm for implementing this method is developed, and the algorithm and the three-dimensional model are visualized by means of Visual C++6.0 and Direct 3D. The results validate both the method put forward in this paper and the correctness of the algorithm.

Key words: group theory; Platonic solid; coloring; three-dimensional model; visualization

摘要: 提出用柏拉图立体的空间旋转群来完成柏拉图立体着色方案三维模型构造的思想,解决与对称性直接相关的着色方案三维模型的构造问题;提出一种柏拉图立体旋转群元新的分类方法;提出群元抽象对称性、局部色数和饱和色数3个新概念;提出对抽象对象进行抽象着色方案的构造,然后再将抽象着色方案映射到具体的轮换上,最后映射到三维模型空间去的构造方法,设计了实现该方法的算法,并用 Visual C++6.0 和 Direct 3D 实现了算法及三维模型可视化,软件运行结果验证了所提出的方法及算法的正确性。

* Supported by the National High-Tech Research and Development Plan of China under Grant No.863-708-4-5 (国家高技术研究发展计划(863))

作者简介: 张大坤(1960—),女,辽宁新民人,博士生,副教授,主要研究领域为卫星网络 CAD,虚拟现实技术;王光兴(1937—),男,教授,博士生导师,主要研究领域为宽带网络技术,网络容错,网络管理。

关键词: 群论;柏拉图立体;着色;三维模型;可视化

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

柏拉图立体(Platonic solids)在对称性理论、群论及组合理论的研究中起着重要的作用,它们在柏拉图(Plato)的自然哲学中也起到了突出的作用,它们是:正四面体(tetrahedron)、正六面体(cube)、正八面体(octahedron)、正十二面体(dodecahedron)和正二十面体(icosahedron).如果说前3个多面体的存在只是一个十分平凡的事实,那么,发现后两个多面体确实是整个数学史上最优美、最奇妙的发现之一^[1].由于这5种立体具有良好的对称性和美学特征,所以一直吸引着诸多领域的学者从不同的角度研究它们.如 Glasser Andrew 研究了柏拉图立体的折叠模型和组合模型^[2,3].

柏拉图立体的着色问题是一个经典问题,它是解决许多实际问题,如分子结构设计、超微型结构设计及卫星网络设计等的数学模型.基于群论的 Burnside 引理、Pólya 定理^[4]能够解决柏拉图立体不等价的着色方案的计数问题,带权的 Pólya 定理^[5]能够解决柏拉图立体着色组态问题,但它们都无法给出着色方案三维模型的具体构造.由于着色方案三维模型的具体构造与所研究对象的几何模型密切相关,所以使这一问题的解决变得更为复杂,必须为其寻找一套切实可行的方法.

1 设计思想

1.1 概述

以对正二十面体($n=20$)顶点集用6种颜色($m=6$)进行着色为例,根据 Pólya 定理可知其不等价的着色方案数为^[5]

$$L_{20} = \frac{1}{|G_{20}|} \sum_{g \in G_{20}} m^{\lambda(g)} = \frac{1}{60} \times (6^{12} + 15 \times 6^6 + 44 \times 6^4) = 36292320 \quad (1)$$

其中 $\lambda(g)$ 表示 g 的所有轮换个数(包括长度为1的轮换).

随着颜色数 m 的增加,着色方案数 L_{20} 会急剧增加.分析着色方案三维模型的具体构造发现,着色后的三维模型可分为两大类:一类是与柏拉图立体的对称性无关的着色方案;另一类是与柏拉图立体对称性直接相关的着色方案.第2类着色方案的三维模型表现出良好的对称性和美学特征,具有代表性.柏拉图立体的空间旋转群恰好表现出其对称性,故本文提出根据其旋转群来构造第2类着色方案的三维模型的设计思想.

1.2 设计思想的实现方法

柏拉图立体的旋转群 $G_i (i=4,6,8,12,20)$ 是一个置换群, G_i 的每一个群元 g 都是一个置换,并且来源于一个旋转操作,代表着一种对称性.任何一个置换 g 都可分解成若干个互不相交的轮换之积,且分解形式是惟一的^[6].置换群的轨道恰好与置换的所有轮换相重合,基于这一事实,轨道可以看作轮换概念的推广^[4].同一轨道上的对象具有等价性.综上所述,我们提出以下的柏拉图立体的着色方案三维模型构造方法:将旋转群的群元按旋转轴及群元的格式(置换的格式)分类,从每一类中选出一个群元来进行着色方案三维模型的构造.将群元中的每一个轮换看作一个抽象的着色对象,构造这些抽象对象的抽象着色方案,将抽象着色方案映射到所代表的轮换上,最后映射到具体的三维模型空间,从而得到具体的柏拉图立体着色方案的三维模型.

2 新概念的提出

2.1 G_i 群群元的表示及分类

2.1.1 G_i 群群元的分类

以较为简单的正六面体为例,分析群元的分类问题.正六面体的三维模型及旋转轴如图1所示,其置换群及相关参数见表1.

分析表 1,按旋转轴可将 G_6 的群元分为 4 大类(恒等元 g_1 自成一类),而由 O_1O_1' 类轴产生的群元又分为 4^2

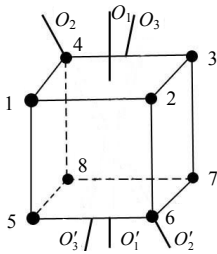


Fig.1 Regular cube and its rotation axis
图 1 正六面体及其旋转轴

和 2^4 两种格式,这两类群元所对应的柏拉图立体着色方案的三维模型有完全不同的构造规律,所以不能划分为一类.另外,在用 Pólya 定理求解柏拉图立体不等价着色方案及着色组态时,将 G_i 的群元按置换格式($1^{i_1}2^{i_2}...n^{i_n}$)划分成共轭类(等价类)去研究着色问题^[4].然而,从表 1 可见, 2^4 格式的群元包括 O_1O_1' 类轴的 3 个群元和 O_2O_2' 类轴的 6 个群元,由于它们对应的旋转轴不同,着色方案三维模型的构造规律也不同,所以也不能分成一类.为此,我们提出一种新的 G_i 群群元的分类方法,即首先将 G_i 群的群元按旋转轴划分成大类,然后再按群元的格式分成小类.正六面体置换群 G_6 群群元被分成 5 类(见表 1).

Table 1 Permutation group of regular cube and related parameters

表 1 正六面体置换群及相关参数

Symmetry axis	Permutation format	Permutation group G_6	Number of group element in class g_n	Number of cycle	Local number of colors C_f
Identical element	1^6	$g_1=[1][2][3][4][5][6][7][8]$	1	8	1
Class O_1O_1'	4^2	$g_2=[1\ 2\ 3\ 4][5\ 6\ 7\ 8]$ $g_3=[1\ 4\ 3\ 2][5\ 8\ 7\ 6]$	6	2	2
	2^4	$g_8=[1\ 3][2\ 4][5\ 7][6\ 8]$	3	4	4

Class O_2O_2'	2^4	$g_{11}=[1\ 2][7\ 8][4\ 6][3\ 5]$	6	4	4
Class O_3O_3'	$1^2 \cdot 3^2$	$g_{17}=[1][5\ 2\ 4][8\ 6\ 3][7]$ $g_{18}=[1][5\ 4\ 2][8\ 3\ 6][7]$	8	4	4

2.1.2 G_i 群群元分类的完整性与正交性

在每个柏拉图立体上任选一点 a 作为不动点,根据轨道公式和拉格朗日定理^[6],对 G_6 群,任取一点 a (如图 1 中的 4 所示),保持 a 不动的旋转有 3 个元素,即 $|G_a|=3$,又由于 a 可转到任何一个其他顶点,故 $|\Omega_a|=8$,因而有

$$|G_6|=|\Omega_a| \cdot |G_a|=8 \times 3=24 \tag{2}$$

表 1 中的 G_6 群 $\sum g_n=24$,此值与 $|G_6|$ 相同,故 G_6 群包含的群元是完全的. G_6 中不存在重复群元,按旋转轴及置换格式将 24 个群元分为 5 类,恰好构成 G_6 的一个划分,满足正交性.同理可得:

$$|G_4|=|\Omega_a| \cdot |G_a|=4 \times 3=12 \tag{3}$$

$$|G_8|=|\Omega_a| \cdot |G_a|=6 \times 4=24 \tag{4}$$

$$|G_{12}|=|\Omega_a| \cdot |G_a|=20 \times 3=60 \tag{5}$$

$$|G_{20}|=|\Omega_a| \cdot |G_a|=12 \times 5=60 \tag{6}$$

这些 $|G_i|$ 值与文献[4]中的 Table 5.2 的结果完全相同.

对于表 2 中的 G_{20} , $\sum g_n=60$,此值与 $|G_{20}|$ 相同.按旋转轴将 G_{20} 分成的 4 类构成 G_{20} 的一个划分,各类之间无重叠,且包含了所有群元.同理可验证其他柏拉图立体旋转群的完整性及各类间的正交性(限于篇幅,此处从略).

2.2 群元抽象表示及抽象对称性

以 G_i 群群元 g 的轮换作为抽象着色对象,研究柏拉图立体着色方案三维模型的构造.这些抽象对象在空间存在着对称性,在此定义为群元的抽象对称性.这种抽象对称性在抽象模型着色方案的构造中起到了关键的作用.例如,在 G_6 群中,以 g_{17} 为例,将 g_{17} 抽象地表示为

$$g_{17}=a_1a_2a_3a_4,$$

其中, $a_1=[1], a_2=[5\ 2\ 4], a_3=[8\ 3\ 6], a_4=[7]$,并用一个抽象图(如图 2 所示)来表示,其中 $M-M$ 为对称轴.

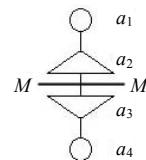


Fig.2 Abstract map of g_{19} in group G_6
图 2 G_6 群 g_{19} 抽象图

2.3 局部色数和饱和色数

2.3.1 局部色数(C_f)

在对抽象对象进行着色时,当颜色数超过抽象对象(即轮换)的个数时,着色方案没有本质上的增加,只是不同颜色的重新组合.所以,在此提出一个局部色数(C_f)的概念,恒等元的局部色数值定义为 1,其他群元的局部色数值定义为分解成的轮换的个数.表 1 给出了正六面体的 5 个局部色数值(C_f).

2.3.2 饱和色数(C_s)

从柏拉图立体着色问题的整体出发,引入一个饱和色数(C_s)的概念,饱和色数 C_s 定义为所有局部色数中的最大值.当着色的颜色值超过饱和色数时,所有群元对应的着色方案都不会有本质的增加(建议用小于等于饱和色数值的颜色数进行着色处理).

3 着色方案三维模型的具体构造方法研究

我们以正二十面体为例来介绍柏拉图立体着色方案三维模型的构造方法.

3.1 正二十面体置换群 G_{20} 及相关参数

正二十面体及旋转轴如图 3 所示.有 3 类对称轴:(1) O_1O_1' 类轴 6 个,按逆时针方向分别旋转 $72^\circ, 144^\circ, 216^\circ, 288^\circ$,得到 G_{20} 中的 24 个群元;(2) O_2O_2' 类轴共 10 个,按逆时针方向分别旋转 $120^\circ, 240^\circ$,得到 G_{20} 中的 20 个群元;(3) O_3O_3' 类轴共 15 个,按逆时针方向旋转 180° ,得到 G_{20} 中的 15 个群元.再加上恒等元,共得到 G_{20} 中的 60 个群元.置换群 G_{20} 及相关参数见表 2,其中饱和色数 $C_s=6$.

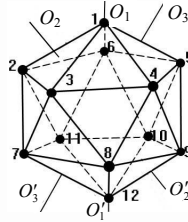


Fig.3 Regular icosahedron and its rotation axis

图 3 正十二面体及其对称轴

Table 2 Regular icosahedron group and the related parameters

表 2 正二十面体群及相关参数

Symmetry axis	Permutation format	Permutation group G_{20}	Number of Group element in class g_n	Number of cycle	Local number of colors C_f
Identical element	1^{12}	$g_1=[1][2][3][4][5][6][7][8][9][10][11][12]$	1	12	1
Class O_1O_1'	$1^2 \cdot 5^2$	$g_2=[1][2\ 3\ 4\ 5\ 6][7\ 8\ 9\ 10\ 11][12]$	24	4	4
		$g_3=[1][2\ 4\ 6\ 3\ 5][7\ 9\ 11\ 8\ 10][12]$			
		$g_4=[1][2\ 5\ 3\ 6\ 4][7\ 10\ 8\ 11\ 9][12]$			
		$g_5=[1][2\ 6\ 5\ 4\ 3][7\ 11\ 10\ 9\ 8][12]$			
		...			
Class O_2O_2'	3^4	$g_{26}=[1\ 2\ 3][9\ 10\ 12][4\ 6\ 7][5\ 11\ 8]$	20	4	4
		$g_{27}=[1\ 3\ 2][9\ 12\ 10][4\ 7\ 6][5\ 8\ 11]$			
Class O_3O_3'	2^6	$g_{46}=[1\ 5][7\ 12][2\ 9][3\ 10][4\ 6][8\ 11]$	15	6	6
		...			

3.2 正二十面体着色方案三维模型的构造

设用 m 种颜色对正二十面体的顶点集合进行着色,设颜色集为 $C=\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$,在讨论每个群元 g_i 的着色方案时,仅考虑小于等于局部色数值 C_f 的着色方案,而超过 C_f 的着色方案利用颜色集的重新组合来求解.

3.2.1 恒等元 g_1 对应的着色方案构造

对于恒等元 g_1 ,局部色数 $C_f=1$,仅用颜色 C_1 对其进行着色,仅存在一种着色方案.由 g_1 得到的基本着色方案

数 $n_1=1$, 而从整个问题出发需要用 m 种颜色进行着色, 由此得的着色方案数为

$$n_1=1, N_1=n_1 * C_m^1 \tag{7}$$

其中, C_m^1 : m 中取 1 的组合. 即分别用 C_1, C_2, \dots, C_m 对正二十面体所有顶点都涂以单色, 共得到 m 种着色方案.

3.2.2 O_1O_1' 类轴 $1^2 \cdot 5^2$ 格式对应的着色方案构造

(1) g_2 的抽象表示

首先, 将 g_2 抽象地表示为

$$g_2=a_1a_2a_3a_4,$$

其中, $a_1=[1], a_2=[2\ 3\ 4\ 5\ 6], a_3=[7\ 8\ 9\ 10\ 11], a_4=[12], g_2$ 的抽象图如图 4(a) 所示. 下面讨论的是以 a_1, a_2, a_3, a_4 为着色对象的着色问题.

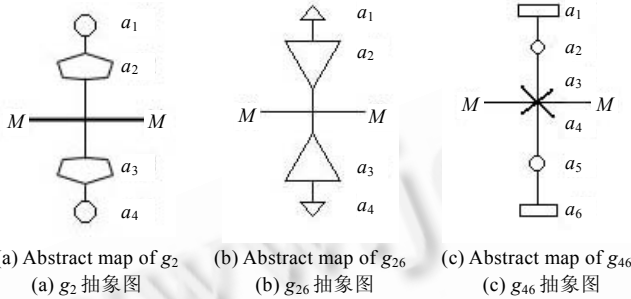
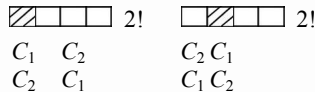


Fig.4 Abstract map of group element
图 4 群元抽象图

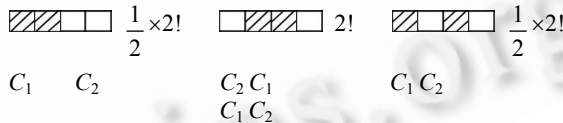
(2) 着色方案中仅有两种颜色

设用颜色 C_1, C_2 进行着色, 由于 g_2 中有 4 个对象, 因此相当于将 4 个对象映射到有两个颜色的集合当中, 每一种映射代表一种着色方案. 由于 4 仅可分解为 (1,3) 和 (2,2) 两种形式, 所以颜色的分配有两种可能: 一种是 4 个对象中有 3 个为同色, 剩下一个为另一种颜色; 另一种是两两同色. 以下用 4 个线性排列的方格代表 g_2 , 结合抽象对称性, 着色方案构造如下:

第 1 种: 由于 g_2 关于 $M-M$ 镜像对称, 只有两种可能的模式, 每种模式包括两种方案, 共得到 4 种着色方案, 即 $C_1 C_2 C_2 C_2, C_2 C_1 C_1 C_1, C_1 C_2 C_1 C_1, C_2 C_1 C_2 C_2$. 简单表示如下:



第 2 种: 此时, g_2 中的 2 个同色对象可能相邻, 也可能不相邻, 同时考虑到对称性, 共得到 4 种着色方案.



综合以上两种情况,

$$n_2=8, N_2=8 * C_m^2 \quad (m \geq 2) \tag{8}$$

(3) 着色方案中有 3 种颜色

取颜色集 $C=\{C_1, C_2, C_3\}$, 由于 4 仅可分解为 (1,1,2) 一种形式, 所以颜色的分配仅有一种可能, 即在着色方案中必有两个对象为同色. 这两个对象可能相邻也可能不相邻, 同时考虑到对称性, 共得到 18 种着色方案.

$$n_3=18, N_3=18 * C_m^3 \quad (m \geq 3) \tag{9}$$

(4) 着色方案中有 4 种颜色

取颜色集 $C=\{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, 得到 $\frac{1}{2} \times 4!$ 种着色方案.

$$n_4=12, N_4=12 * C_m^4 \quad (m \geq 4) \tag{10}$$

3.2.3 其他群元对应的着色方案构造

(1) O_2O_2' 类轴, 3^4 格式

g_{26} 抽象表示与第 3.2.2 节中的 g_2 的抽象表示完全相同,只是其中 $a_1=[1\ 2\ 3], a_2=[4\ 6\ 7], a_3=[5\ 11\ 8], a_4=[9\ 10\ 12]$, g_{26} 的抽象表示图如图 4(b)所示. g_{26} 抽象着色方案的构造与 g_2 完全相同,只是映射到自身对应的轮换上,从而得到 g_{26} 着色方案的三维模型.

(2) O_3O_3' 类轴, 2^6 格式

① 抽象表示

$$g_{46}=a_1a_2a_3a_4a_5a_6,$$

其中, $a_1=[1\ 5], a_2=[4\ 6], a_3=[2\ 9], a_4=[3\ 10], a_5=[8\ 11], a_6=[7\ 12]$, 抽象表示图如图 4(c)所示. $C_f=C_s=6$.

② 着色树的构造

对于 g_{46} , 有 6 个抽象着色对象, $C_f=6$, 可以分别用 1, 2, 3, 4, 5, 6 种颜色对其进行着色, 当用两种颜色着色 $m=2$ 时, $C=\{C_1, C_2\}$, 对象集 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. 2 个颜色 6 个对象, 颜色分配有 3 种格式 (1, 5), (2, 4), (3, 3). 同理,

$m=3$, 颜色分配方式 (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2);

$m=4$, 颜色分配方式 (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1);

$m=5$, 颜色分配方式 (2, 1, 1, 1, 1);

$m=6$, 颜色分配方式 (1, 1, 1, 1, 1, 1).

6 个对象中的同色对象可能相邻或不相邻, 着色方案的三维模型构造不再适合用直接分析的方法来完成. 为此, 我们提出一种着色方案构造方法: 首先构造满足各种着色条件的着色树, 然后遍历着色树, 并去掉不足着色对象层数及等价的分枝, 从而得到着色方案抽象模型.

4 着色树的构造算法

4.1 颜色分配与组合算法

设着色对象数为 n , 颜色数为 m ,

- ① 向颜色数组里依次添加 C_1, C_2, \dots, C_m 共 m 个元素;
- ② 向一个临时颜色数组中添加 $n-m$ 个 C_1 元素;
- ③ 将临时颜色数组追加到颜色数组尾部, 组成一个颜色组合;
- ④ 将临时颜色数组中的每个元素分别由 C_1 变至 C_m , 对于每种组合都执行③.

4.2 着色树构造算法

- ① 为每一个对象分配一种颜色, 并按顺序存入一维数组 ColorArray 中;
- ② 取 ColorArray 中的第 1 个元素作为根节点, 同时从 ColorArray 中删除该元素;
- ③ 将根节点存入节点堆栈, 将当前 ColorArray 存入颜色堆栈;
- ④ 将颜色堆栈栈顶元素出栈并存入 ColorArray;
- ⑤ 节点堆栈栈顶元素出栈作为当前根节点;
- ⑥ 在 ColorArray 中选择一个当前根节点的叶子节点未用过的颜色的元素作为叶子, 添加至该根节点下;
- ⑦ 将⑥中添加的叶子节点存入节点堆栈;
- ⑧ 将去掉⑥中使用的元素在 ColorArray 中的副本存入颜色堆栈;
- ⑨ 转⑥, 直到 ColorArray 中所有元素用完为止;
- ⑩ 转④, 直到颜色堆栈为空为止.

4.3 生成同色对象不可相邻的着色树的修剪算法

- ① 将已生成的着色树的根节点存入节点队列;
- ② 取出节点队列首元素作为当前根节点;
- ③ 将与当前根节点同色的所有叶子节点及其子节点删除, 其他依次存入节点队列;
- ④ 转②, 直到节点队列为空为止.

5 算法的软件实现及着色方案三维模型可视化

5.1 软件的设计

我们选择了功能强大的 Visual C++6.0 与 Direct 3D^[7]作为底层软件,用 Visual C++6.0 实现了着色树构造算法的软件设计,用 Direct 3D 实现着色方案三维模型的可视化。

5.2 软件的功能及实例运行

运行所设计的软件,用户可任意选择输入一个柏拉图立体,针对每一种柏拉图立体软件,均为其构造出 $G_i(i=4,6,8,12,20)$ 群,并完成群元的分类.用户可以进一步选择其中的一类及所采用的颜色分配方式来构造出着色树,遍历着色树可得出抽象着色方案,最后得到具体的着色方案的可视三维模型.图 5 是 G_{20} 群的 g_{46} 四色同时出现,颜色分配方式为(2,2,1,1)、同色不相邻的两棵着色树, T_2 (以 C_2 为根节点)与 T_1 结构相同, T_4 与 T_3 结构相同(图中从略).遍历 4 棵树去掉少于 6 层的分枝,并根据对称轴 $M-M$ 筛去等价的着色方案,图 6(a)是其中的一个着色方案的三维模型.图 6(b)是正十二面体对应的一个着色方案三维模型(三维模型可任意缩放、旋转)。

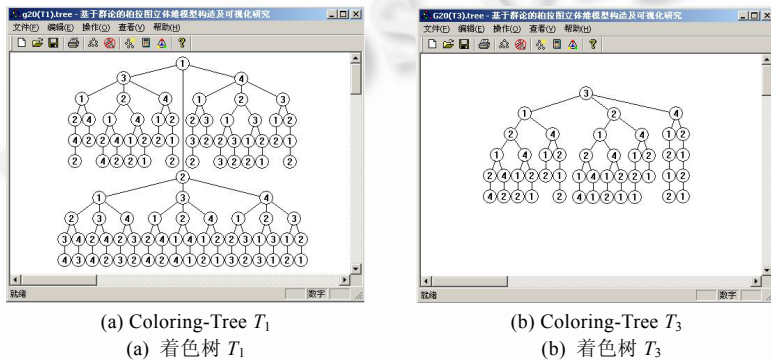


Fig.5 $g_{46}, ((1,1),(1,1),1,1)$ coloring-tree

图 5 $g_{46}, ((1,1),(1,1),1,1)$ 着色树

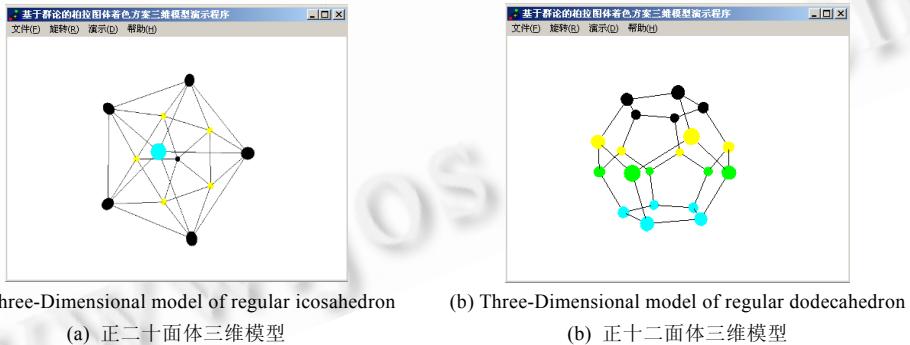


Fig.6 Three-Dimensional model for coloring mode

图 6 着色方案三维模型

6 着色方案数的完整性及算法的正确性

6.1 着色方案数的完整性讨论

我们将 $G_i(i=4,6,8,12,20)$ 中的所有群元均用抽象对象 (a_1, a_2, \dots, a_j) 来表示,如图 4 所示的 G_{20} 群群元,这些抽象的着色对象关于 $M-M$ 镜像对称,以 G_{20} 中的 g_2 (如图 4(a)所示)为例,抽象对象对应的旋转群中只有两个群元, $g_{a_1}=(a_1)(a_2)(a_3)(a_4); g_{a_2}=(a_1 a_4)(a_2 a_3)$,应用 Pólya 定理可求出用 m 种颜色着色时不等价的着色方案数为

$$L_a = \frac{1}{2}(m^4 + m^2) \quad (11)$$

将 $m=1,2,3,4$ 分别代入式(10),可以得到不等价的着色方案数分别为 1,10,45,136.同理,可以得出其他群元对应的着色方案数.

6.2 着色方案数及着色算法正确性的验证

下面,我们以第 3.2.2 节中 g_2 对应的着色方案为例,验证着色方案数的完整性.

当 $m=1$ 时, $L_{m_1} = N_1 = n_1 \cdot C_m^1 = 1 \cdot C_1^1 = 1$;

当 $m=2$ 时, $L_{m_2} = N_1 + N_2 = 1 \cdot C_2^1 + 8 \cdot C_2^2 = 10$;

当 $m=3$ 时, $L_{m_3} = N_1 + N_2 + N_3 = 1 \cdot C_3^1 + 8 \cdot C_3^2 + 18 \cdot C_3^3 = 45$;

当 $m=4$ 时, $L_{m_4} = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 1 \cdot C_4^1 + 8 \cdot C_4^2 + 18 \cdot C_4^3 + 12 \cdot C_4^4 = 136$.

可见,用本文提出的着色方案构造方法得到的着色方案数 L_{m_i} 与用 Pólya 定理求得各 L_a 值完全相同,从而验证了其完整性.同理可以验证所有 G_i 群群元对应的着色方案数的完整性.

软件运行得到的着色方案数与上述两种方法得到的着色方案数完全相同,从而验证了所设计算法的正确性.

7 小 结

本文提出了柏拉图立体旋转群新的群元分类方法;提出了群元抽象对称性、局部色数和饱和色数 3 个新概念;提出了基于群论的柏拉图立体着色方案三维模型的构造方法,且为其设计了一套通用算法,并用 Visual C++6.0 和 Direct 3D 实现了算法及着色方案三维模型的可视化.软件运行结果验证了算法的正确性.文中提出的新概念和方法在所有的柏拉图立体着色方案构造中均得到了验证,同时也适合其他具有对称特征的几何体着色方案三维模型的构造问题,具有普遍意义.

References:

- [1] Weyl H. Symmetry. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1980. 39~81 (in Chinese).
- [2] Glassner A. Origami Platonic solids. IEEE Computer Graphics and Applications, 1996,16(4):85~91.
- [3] Glassner A. More origami Solids. IEEE Computer Graphics and Applications, 1996,16(5):81~85.
- [4] Gilbert WJ. Modern Algebra with Application. New York: John Wiley & Sons, 1976. 130~146.
- [5] Wang TM. Combination Mathematics. Beijing: China Machine Press, 1990. 188~216 (in Chinese).
- [6] Hu GZ. Applied Modern Algebra. Beijing: Tsinghua University Press, 1999. 40~119 (in Chinese).
- [7] Kovach PJ. Direc 3D Technology Theory. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. 360~361 (in Chinese).

附中文参考文献:

- [1] Weyl H. 对称.上海:上海科技教育出版社,2002.39~81.
- [5] 王天民.组合数学教程.北京:机械工业出版社,1990.188~216.
- [6] 胡冠章.应用近世代数.北京:清华大学出版社,1999.40~119.
- [7] Kovach PJ.Direct 3D 技术内幕.北京:清华大学出版社,2001.360~361.