

# 参数曲线导矢界估计及在曲线绘制中的应用\*

解本怀, 王国瑾<sup>+</sup>

(浙江大学 计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

## Approximating the Derivative Bounds of Parametric Curves and Applying to Curve Rasterization

XIE Ben-Huai, WANG Guo-Jin<sup>+</sup>

(Institute of Computer Images and Graphics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+ Corresponding author: E-mail: amawgj@mail.hz.zj.cn

<http://www.zju.edu.cn>

Received 2002-09-24; Accepted 2002-11-20

Xie BH, Wang GJ. Approximating the derivative bounds of parametric curves and applying to curve rasterization. *Journal of Software*, 2003,14(12):2106~2112.

<http://www.jos.org.cn/1000-9825/14/2106.htm>

**Abstract:** Some new formulae for the derivative bounds of parametric curves, such as the general polynomial curves and rational polynomial curves in CAGD, are presented. Based on these new formulae, the point-by-point algorithm for rasterizing parametric curves is developed in this paper. To solve the problem of repetition and discontinuity arising from the previous algorithms, a new rule of interpolation is given. Without doubt, these results will remarkably improve the efficiency of modeling, intersection, approximation, rendering and rasterizing of curves.

**Key words:** parametric curve; approximation of the derivative bound; point-by-point rasterization

**摘要:** 对 CAGD 中常见的多项式曲线和有理多项式曲线的导矢的界提出了新的估计公式. 基于这些公式, 对参数曲线的逐点绘制法进行了研究, 提出了新的插值规则, 较好地解决了以往绘制算法中出现的重复绘制问题和不连续性问题. 这些结果可以明显地提高曲线造型、求交、逼近、显示和绘制的效率.

**关键词:** 参数曲线; 导矢界的估计; 逐点绘制

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

参数曲线曲面是几何设计和几何造型的常用工具, 其导矢的界在很多方面有着重要作用.

1989 年, Kala<sup>[1]</sup>的研究表明, 导矢的界对曲线曲面的包围盒的大小起着决定作用. 众所周知, 包围盒的运用可

\* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.60173034 (国家自然科学基金); the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2002CB312101 (国家重点基础研究发展规划(973))

第一作者简介: 解本怀(1972-), 男, 安徽广德人, 硕士, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 计算数学.

大大提高曲线曲面显示及求交的速度.例如,Blinn<sup>[2]</sup>,Lane<sup>[3]</sup>等人在分割算法中运用了最小包围盒技术,Hahn<sup>[4]</sup>采用层次包围盒技术来加速多面体场景的碰撞检测,Sederberg 等人<sup>[5]</sup>用导矢的界来求得参数曲面的包围圆锥,它们都在求交运算中发挥着积极作用.与此同时,Filip<sup>[6]</sup>,Kala<sup>[11]</sup>,Lane<sup>[3]</sup>等人相继指出,参数曲面的导矢的界对计算给定误差内的分片线性逼近、构造曲面包围体的层次及计算曲面交集都非常有用.另外,参数曲线曲面的绘制也需要估计导矢的界.有一种绘制方法<sup>[6]</sup>是逼近算法,它需要运用导矢的界来确定逼近误差;另一种绘制方法是逐点绘制法,它需要预先估计曲线导矢的界,而绘制的点数与导矢界的大小直接相关,因而提高估计精度可以提高绘制效率.

由于导矢的界在计算机图形学和计算机辅助设计中有着重要作用,国内外学者对此进行了许多研究.1992年,Floater<sup>[7]</sup>得到关于有理 Bézier 曲线导矢界的两个估计公式.随后,Hermann<sup>[8]</sup>对 2 次或 3 次情况下的 Floater 公式作了改进.但由上述方法得到的导矢界公式较难推广到曲面情形.1995 年,Saito,王国瑾和 Sederberg<sup>[9]</sup>从另一角度得出曲线的相应公式,它与 Floater 公式相吻合,能方便地推广到曲面情形.1997 年,王国瑾,Sederberg 和 Saito<sup>[10]</sup>又得出了与上不同的有理 Bézier 曲面的两个导矢界公式.

近年来,我们在研究参数曲线逐点绘制算法的过程中,又发现了导矢界估计的若干新公式.其基本思想是利用升阶公式的磨光原理来得到模值较小的 Bézier 点,或是利用  $n$  次 Bernstein 基函数分解为  $k$  次和  $n-k$  次 ( $k \leq n$ ) 基函数乘积的线性组合来求得低次曲线导矢的精确界.本文将按照这两种新思想得出估计 Bézier 曲线和有理 Bézier 曲线的导矢界的新公式.而后,应用这些公式对参数曲线逐点绘制算法进行研究,较好地解决了以往算法中出现的重复绘制和不连续性问题.有关结果不难进一步推广到参数曲面和有理参数曲面.

## 1 参数曲线导矢的界的估计

为简化符号,不失一般性,本文中的向量参数曲线仅考虑其  $x$  方向的分量.

### 1.1 Bézier 曲线导矢的界的估计

设  $B_{i,n}(t)$  为 Bernstein 基函数,  $C(t) = \sum_{i=0}^n x_i B_{i,n}(t)$ ,  $t \in [0,1]$  ( $x_i \in R$ ) 为 Bézier 曲线,那么

$$C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i B_{i,n-1}(t). \quad (1)$$

#### 1.1.1 基于升阶公式的导矢界

由升阶公式可得  $C'(t) = \sum_{i=0}^n [(n-i)\Delta x_i + i\Delta x_{i-1}] B_{i,n}(t)$ , 进一步由基函数的归一性得到

$$|C'(t)| \leq \max_{0 \leq i \leq n} |(n-i)\Delta x_i + i\Delta x_{i-1}|. \quad (2)$$

#### 1.1.2 基于精确计算的导矢界

**引理 1.** 对任意的  $i=0,1,\dots,n$ ,  $n$  次 Bernstein 基函数  $B_{i,n}(t)$  可以表示为

$$B_{i,n}(t) = \sum_{j=\max(0,i+k-n)}^{\min(i,k)} B_{j,k}(t) B_{i-j,n-k}(t), \quad k=0,1,\dots,n. \quad (3)$$

证明:当  $k=n$  时,式(3)显然成立.设  $k=l(0 < l < n)$  时式(3)成立,记  $B_{n-l+1,n-l}(t) = B_{-1,l-1}(t) = B_{l,l-1}(t) = B_{-1,n-l}(t) = 0$ , 则

$$\begin{aligned} B_{i,n}(t) &= \sum_{j=\max(0,i+l-n)}^{\min(i,l)} \left[ (1-t) \cdot B_{j,l-1}(t) + t \cdot B_{j-1,l-1}(t) \right] B_{i-j,n-l} \\ &= \sum_{j=\max(0,i+l-n)}^{\min(i,l)} B_{j,l-1}(t) \left[ (1-t) \cdot B_{i-j,n-l}(t) \right] + \sum_{j=\max(-1,i+l-n-1)}^{\min(i-1,l-1)} B_{j,l-1}(t) \left[ t \cdot B_{i-(j+1),n-l}(t) \right] \\ &= \sum_{j=\max(0,i+(l-1)-n)}^{\min(i,l)} B_{j,l-1}(t) \left[ (1-t) \cdot B_{i-j,n-l}(t) + t \cdot B_{i-(j+1),n-l}(t) \right] \\ &= \sum_{j=\max(0,i+(l-1)-n)}^{\min(i,l-1)} B_{j,l-1}(t) B_{i-j,n-(l-1)}(t). \end{aligned}$$

这表明,当  $k=l-1 \geq 0$  时,式(3)成立.于是,由数学归纳法,引理 1 得证. □

应用引理 1 和式(1),得出

$$C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \Delta x_i \sum_{j=\max(0, i+k-(n-1))}^{\min(i, k)} B_{j, k}(t) B_{i-j, n-k-1}(t) \right], k = 0, 1, \dots, n-1.$$

由此,当  $n-k-1 > k$  时,

$$C'(t) = n \sum_{i=j}^k \left[ \Delta x_i \sum_{j=0}^k B_{j, k}(t) B_{i-j, n-k-1}(t) \right] + n \sum_{i=k+1}^{n-k-1+j} \left[ \Delta x_i \sum_{j=0}^k B_{j, k}(t) B_{i-j, n-k-1}(t) \right] = n \sum_{i=j}^{n-k-1+j} \left[ \Delta x_i \sum_{j=0}^k B_{j, k}(t) B_{i-j, n-k-1}(t) \right].$$

当  $n-k-1 \leq k$  时,不难知道有同样的结论.所以,

$$C'(t) = n \sum_{i=0}^{n-k-1} \left[ \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j} B_{j, k}(t) \right] B_{i, n-k-1}(t), k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{4}$$

进一步地,根据 Bernstein 基函数的归一性,有

$$|C'(t)| \leq n \max_{0 \leq i \leq n-k-1} \left\{ \max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j} B_{j, k}(t) \right| \right\}, k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{5}$$

于是,求曲线  $C(t)$  的导矢界的问题被转化为求闭区间上连续函数的最大值  $\max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j} B_{j, k}(t) \right|$  的问题.我们已经将  $n-1$  次多项式  $|C'(t)|$  的最大值问题降为  $k(\leq n-1)$  次多项式的最大值问题.为计算简便,仅取  $k \leq 5$ . 当  $k=0, 1$  时,相应地得到  $|C'(t)| \leq n \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} |\Delta x_i|$ . 下面的定理表明,  $k$  的取值越大,求出的导矢界越精确.

**定理 1.** 若令  $f(k) = \max_{0 \leq i \leq n-k-1} \left\{ \max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j} B_{j, k}(t) \right| \right\}, k = 0, 1, \dots, n-1$ , 则必有  $f(k+1) \leq f(k), k = 0, 1, \dots, n-2$ .

证明: 
$$f(k+1) = \max_{0 \leq i \leq n-k-2} \left\{ \max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^{k+1} \Delta x_{i+j} B_{j, k+1}(t) \right| \right\} = \max_{0 \leq i \leq n-k-2} \left\{ \max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^{k+1} \Delta x_{i+j} ((1-t) \cdot B_{j, k}(t) + t \cdot B_{j-1, k}(t)) \right| \right\}$$

$$= \max_{0 \leq i \leq n-k-2} \left\{ \max_{t \in [0, 1]} \left| (1-t) \cdot \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j} B_{j, k}(t) + t \cdot \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j+1} B_{j, k}(t) \right| \right\}$$

$$\leq \max_{0 \leq i \leq n-k-2} \left\{ \max_{t \in [0, 1]} \left\{ \max_{j=0}^k \left| \sum_{j=0}^k \Delta x_{i+j} B_{j, k}(t) \right|, \max_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=0}^k \Delta x_{(i+1)+j} B_{j, k}(t) \right| \right\} \right\} = f(k). \tag{□}$$

### 1.2 有理 Bézier 曲线导矢的界的估计

设有理 Bézier 曲线为  $R(t) = \sum_{i=0}^n w_i x_i B_{i, n}(t) / \sum_{i=0}^n w_i B_{i, n}(t), t \in [0, 1], x_i \in R, w_i > 0$ , 则容易得到

$$R'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^n \bar{x}_{ij} B_{i, n-1}(t) B_{j, n}(t) / \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j B_{i, n}(t) B_{j, n}(t), \bar{x}_{ij} = (w_{i+1} x_{i+1} - w_i x_i) w_j - w_j x_j (w_{i+1} - w_i). \tag{6}$$

#### 1.2.1 基于升阶公式的导矢的界

将升阶公式代入式(6),可得

$$R'(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n [(n-i) \bar{x}_{ij} + i \bar{x}_{i-1, j}] B_{i, n}(t) B_{j, n}(t) / \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_i w_j B_{i, n}(t) B_{j, n}(t). \tag{7}$$

**引理 2.** 若  $\lambda_i > 0, \mu_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$ , 则  $\sum_{i=0}^n \lambda_i / \sum_{i=0}^n \mu_i \leq \max_{0 \leq i \leq n} \{\lambda_i / \mu_i\}$ .

证明:把显然成立的不等式组  $\lambda_i \leq \max_{0 \leq i \leq n} \{\lambda_i / \mu_i\} \cdot \mu_i, i = 0, 1, \dots, n$  边边相加并整理即得证.

对式(7)连续两次运用引理 2,我们立即得到估计式

$$|R'(t)| \leq \max_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \left\{ \left| (n-i)\bar{x}_{ij} + i\bar{x}_{i-1,j} \right| / (w_i w_j) \right\}. \quad (8)$$

### 1.2.2 基于精确计算的导矢的界

应用引理 1, 首先对  $0 \leq k-1 \leq n-1$  和  $0 \leq k \leq n$  分别得到

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}_{ij} B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \left( \sum_{l=0}^{k-1} \bar{x}_{i+l,j} B_{l,k-1}(t) \right) B_{i,n-k}(t), \quad \sum_{i=0}^n w_i w_j B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \left( \sum_{l=0}^k w_{i+l} w_j B_{l,k}(t) \right) B_{i,n-k}(t).$$

代入式(6), 有

$$R'(t) = n \sum_{j=0}^{n-k} \left( \sum_{i=0}^{k-1} \bar{x}_{i+l,j} B_{l,k-1}(t) \right) B_{i,n-k}(t) B_{j,n}(t) / \sum_{j=0}^{n-k} \left( \sum_{l=0}^k w_{i+l} w_j B_{l,k}(t) \right) B_{i,n-k}(t) B_{j,n}(t), \quad k=1,2,\dots,n. \quad (9)$$

再对上式连续二次运用引理 2 得

$$|R'(t)| \leq n \cdot \max_{\substack{0 \leq i \leq n-k \\ 0 \leq j \leq n}} \left\{ \max_{t \in [0,1]} \left| \sum_{l=0}^{k-1} \bar{x}_{i+l,j} B_{l,k-1}(t) \right| / \sum_{l=0}^k w_{i+l} w_j B_{l,k}(t) \right\}, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (10)$$

为计算简便, 我们可取  $k=1,2,3$ . 当  $k=1$  时, 有

$$|R'(t)| \leq n \cdot \max_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ 0 \leq j \leq n}} \left\{ \left| \bar{x}_{ij} \right| / \min\{w_i, w_{i+1}\} \right\}. \quad (11)$$

当  $k=3$  时, 求解  $\frac{d}{dt} \left( \sum_{l=0}^2 \bar{x}_{i+l,j} B_{l,2}(t) / \sum_{l=0}^3 w_{i+l} w_j B_{l,3}(t) \right) = 0$  等价于求解一个最高次数不超过 4 的一元方程, 因而有解析解, 设其解集为  $Q$ . 再令集合  $P = \{0,1\} \cup Q \cap \{t | t \in [0,1]\}$ , 最后得到

$$|R'(t)| \leq n \cdot \max_{\substack{0 \leq i \leq n-3 \\ 0 \leq j \leq n}} \left\{ \max_{t \in P} \left| \sum_{l=0}^2 \bar{x}_{i+l,j} B_{l,2}(t) \right| / \sum_{l=0}^3 w_{i+l} w_j B_{l,3}(t) \right\}. \quad (12)$$

显然, 式(12)的精度远远优于式(11). 当  $k=2$  时, 结论类似. 对有理 Bézier 和三角 B-B 曲面, 可用同样方法估计导矢界.

## 2 参数曲线的逐点绘制

在曲线曲面的绘制算法中, 导矢的界起到了确定逼近误差或控制绘制点数的作用. 现有的绘制算法大体上分为基于几何和基于像素这两种. 基于几何的算法是用分段线性函数来逼近曲线或曲面. Filip<sup>[7]</sup>等人用分块三角片来逼近曲面也属于此类. 基于像素的算法一般只使用整数运算来逐点计算最接近曲线的像素点. 对非参数曲线, Hobby<sup>[11]</sup>和刘勇奎<sup>[12]</sup>等人提出了有效算法. 对参数曲线, 也有一些比较有效的逐点绘制算法<sup>[13]</sup>, 这些算法都涉及步长的选取, 而步长的确定是基于导矢的界. 若局部取点过密则可能导致重复绘制, 从而影响了曲线的生成效率. 克服这种局限性的一种解决方案是利用前面提出的新公式, 将导矢界进一步减小.

文献[13]给出了参数多项式曲线的一种快速逐点生成算法, 只用加减法, 故效率较高.

设平面 Bézier 曲线为  $(f(t), g(t)) = \sum_{i=0}^m (x_i, y_i) B_{i,m}(t)$ ,  $t \in [0,1]$ . 若有整数  $L$  满足  $L \geq \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|$ , 即为在曲线上所取点的个数. 取  $t = i/L$ ,  $f_i = f(i/L)$ ,  $i = 0, 1, \dots, L$ , 则显然有  $\eta \in (i/L, (i+1)/L)$ , 使得

$$|f_{i+1} - f_i| = |f((i+1)/L) - f(i/L)| = |(i+1)/L - i/L| f'(\eta) \leq 1.$$

这在一定程度上保证了曲线的连续性. 根据文献[13], 按照上式可得出曲线上坐标为整数  $X_i$  的像素点的方程  $M \cdot X_i = M \cdot f(i/L) + Z_i$ , 这里,  $M$  是使  $M \cdot f(i/L)$  成为  $i$  的整数多项式的一个正整数,  $|Z_i| < M/2$ . 由  $(X_i, Y_i)$  可确定  $(X_{i+1}, Y_{i+1})$ , 且此两相邻点有如下关系:  $|X_{i+1} - X_i| \leq 1$ ,  $|Y_{i+1} - Y_i| \leq 1$ . 为后面讨论方便, 记  $X_{i+1} - X_i = k_i$ ,  $Y_{i+1} - Y_i = l_i$ , 其中  $k_i, l_i = -1, 0, 1$ . 由于在绘制算法中有基于像素点四连通和八连通的差别, 而这两种算法在处理上存在一些差别, 所以下面就这两种算法分别加以讨论.

2.1 四连通绘制算法

当  $k_i l_i \neq 0$  时,点  $(X_i, Y_i)$  和  $(X_{i+1}, Y_{i+1})$  在像素级上不连续.若想保证绘制曲线的连续性,必须找出漏掉的那个中间像素.反之,当  $k_i l_i = 0$  时,点  $(X_i, Y_i)$  和  $(X_{i+1}, Y_{i+1})$  在像素级上连续.此时存在特殊情况  $k_i = l_i = 0$ ,即相邻绘制点重合( $X_{i+1} = X_i$  且  $Y_{i+1} = Y_i$ ),这影响了绘制效率.下面重点解决像素点间的不连续问题.

为讨论方便,先作如下约定:  $(O; x, y)$  是指以  $O$  为原点的局部直角坐标系;点  $Q$  在  $(O; x, y)$  中的角度是指  $OQ$  与  $x$  正半轴的夹角( $Q$  在  $(O; x, y)$  的第一、第四象限内)或与  $x$  负半轴的夹角( $Q$  在  $(O; x, y)$  的第二、第三象限内);点  $Q$  的控制区域是指以  $Q$  为中心,其边平行于坐标轴的单位正方形;像素点抽象为  $x, y$  坐标均为整数的点.另外,判断一点是否在曲线上的准则为:曲线是否经过此像素点的控制区域.

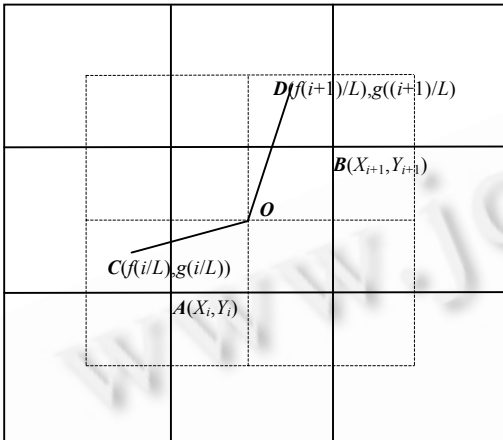


Fig.1 The discontinuous case in 4-connectivity point-by-point rasterization algorithm

图1 四连通逐点绘制算法中的不连续情况

当  $k_i l_i \neq 0$  时,共有  $(k_i, l_i) = (1, 1), (-1, -1), (1, -1), (-1, 1)$  这4种情况.现以  $(k_i, l_i) = (1, 1)$  的情况为例加以说明.这时,曲线上参数取值为  $i/L, (i+1)/L$  的点  $C$  和  $D$  应分别在左下方和右上方,因为  $X_{i+1} = X_i + 1$  且  $Y_{i+1} = Y_i + 1$ ,很自然地,应取中间像素为  $(X_i + 1, Y_i)$  或  $(X_i, Y_i + 1)$ .如图1所示,  $C, D$  是曲线上实际取值点,  $A, B$  对应地为四舍五入后所得整数点,虚线位于直线  $x = m + 1/2$  或  $y = m + 1/2$  ( $m$  为整数)上,现记直线  $x = X_i + 1/2$  和  $y = Y_i + 1/2$  的交点为  $O$ .在坐标系  $(O; x, y)$  中,点  $A, B$  的相对坐标分别为  $(-1/2, -1/2), (1/2, 1/2)$ .当  $C, D$  连线经过第二、第四象限时,可取中间像素为  $(X_i, Y_i + 1)$  或  $(X_i + 1, Y_i)$ .为进一步得到方便的操作准则,设在坐标系  $(O; x, y)$  中,点  $C, D$  的角度为  $\theta, \rho$ ; 相对坐标为  $(-f_i/M - 1/2, -g_i/M - 1/2), (-f_{i+1}/M + 1/2, -g_{i+1}/M + 1/2)$ .易得  $\text{tg}\theta = (2g_i + M)/(2f_i + M), \text{tg}\rho = (-2g_{i+1} + M)/(-2f_{i+1} + M)$ ,于是得到如下的准则:

当  $F(f_i f_{i+1}, g_i, g_{i+1}, M) = 4(f_i g_{i+1} - f_{i+1} g_i) + 2M(g_i + g_{i+1} - f_i - f_{i+1})$  大于、小于或等于 0 时,中间像素分别取  $(X_i, Y_i + 1),$

$(X_i + 1, Y_i)$  或  $(X_i, Y_i + 1)$  和  $(X_i + 1, Y_i)$  之中的任何一个.

2.2 八连通绘制算法

当像素点八连通时,点  $(X_i, Y_i)$  和  $(X_{i+1}, Y_{i+1})$  在像素级上连续,此时无须解决不连续问题,只需处理重复点和角点.当  $k_i = l_i = 0$  即相邻绘制点重合时,绘制时要剔除其中一点.而当相邻三点  $(X_{i-1}, Y_{i-1}), (X_i, Y_i), (X_{i+1}, Y_{i+1})$  有  $|k_{i-1}| = 1, l_{i-1} = 0, k_i = 0, |l_i| = 1$  或  $k_{i-1} = 0, |l_{i-1}| = 1, |k_i| = 1, l_i = 0$  的情况时,剔除作为角点的点  $(X_i, Y_i)$ .

2.3 结果比较

应用本文推导的曲线导矢界公式和逐点绘制算法,我们以两条平面 Bézier 曲线(a),(b)为例进行逐点绘制,并把文献[13]中的算法和基于本文公式(5)(取  $k=4$ )的绘制算法作了比较,比较结果见表1和表2.两条五次 Bézier 曲线的控制点坐标分别为  $(20, 20), (130, 40), (170, 70), (10, 50), (0, 80), (100, 100)$  和  $(120, 40), (150, 110), (200, 240), (20, 200), (70, 120), (170, 70)$ .图2和图3分别由八连通和四连通绘制算法得出.

Table 1 The results of rasterizing degree 5 Bézier curve in 8-connectivity algorithm (Fig.2), comparing to use our derivative bounds formula (5) with to use the formula from Ref.[13]

表1 5次 Bézier 曲线按八连通算法用两种导矢界公式进行绘制的结果比较(图2)

	Using the formula from Ref.[13]	Using our formula (5)
The derivative bound of the curve (a)	800	550
The derivative bound of the curve (b)	900	500

在八连通算法中,曲线(a),(b)分别由 208 个和 279 个像素点组成,用文献[13]的方法所产生的点数远远大于实际有效点数,造成了大量的重复绘制.用本文导矢界公式(5)所产生的点数比文献[13]中的点数减少近一半,虽然仍有一些重复绘制点出现,但计算量已明显减少.

在四连通算法中,曲线(a),(b)分别由 281 个和 396 个像素点组成,用文献[13]的方法所产生的点数大于实际有效点数,也造成了许多重复绘制.而用本文导矢界公式(5)所产生的点数远比文献[13]的要小,减少近一半.同时也可以看到,导矢界的减小增加了像素点之间不连续问题产生的可能性.为克服不连续问题导致了所需插值次数的增加,这里存在着相互制约的关系.但是,需要增加的插值次数其数量级远小于由于采用新的导矢界公式所减少的计算点数,所以总的计算复杂性仍比文献[13]减少近一半.

**Table 2** The results of rasterizing degree 5 Bézier curve in 4-connectivity algorithm (Fig.3), comparing to use our derivative bounds formula (5) with to use the formula from Ref.[13]

**表 2** 5 次 Bézier 曲线按四连通算法用两种导矢界公式进行绘制的结果比较(图 3)

	The curve (a) in Fig.3		The curve (b) in Fig.3	
	Using the formula from Ref.13	Using our formula (5)	Using the formula from Ref.13	Using our formula (5)
The derivative bound $L$	800	550	900	500
The number of rasterizing points before interpolation	265	246	361	325
The times $n$ of repeated rasterization	535	304	539	175
The times $m$ needed for interpolation	15	36	36	74

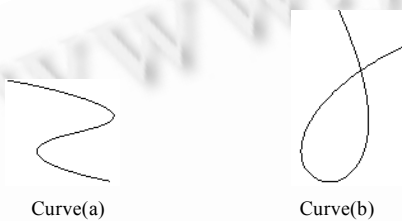


Fig.2 Rasterizing degree 5 Bézier curve in 8-connectivity algorithm

图 2 五次 Bézier 曲线按八连通算法绘制

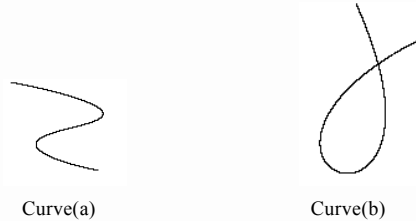


Fig.3 Rasterizing degree 5 Bézier curve in 4-connectivity algorithm

图 3 五次 Bézier 曲线按四连通算法绘制

### 3 结论

本文提出了求常见参数曲线导矢界的一些新的方法和公式.基于这些公式,对参数曲线和有理参数曲线的逐点绘制进行了研究.新公式得出的界比已有的界更为紧凑,基于新公式确定的绘制曲线的步长更为合适,这在一定程度上解决了绘制过程中出现的重复绘制问题;同时,在四连通逐点绘制算法中,较好地解决了绘制过程中出现的不连续性问题.本文的思想和方法完全可以推广到参数曲面的导矢界公式及其绘制算法.

### References:

- [1] Kala D, Barr AH. Guaranteed ray intersection with implicit surfaces. *Computer Graphics*, 1989,23(3):297~306.
- [2] Lane JM, Carpenter LC, Whitted T, Blinn JF., Scan line methods for displaying parametrically defined surfaces. *Communications of the ACM*, 1980,23(1):23~84.
- [3] Lane JM., Carpenter LC. A generalized scan line algorithm for the computer display of parametrically defined surfaces. *Computer Graphics and Image Processing*, 1979,11(3):290~297.
- [4] Hahn JK. Realistic animation of rigid bodies. *Computer Graphics*, 1988,22(4):299~308.
- [5] Sederberg TW, Meyers RJ. Loop detection in surface patch intersection. *Computer Aided Geometric Design*, 1988,5(2):161~171.
- [6] Filip D, Magedson R, Market R. Surface algorithms using bounds on derivatives. *Computer Aided Geometric Design*, 1986, 3(4):295~311.
- [7] Floater MS. Derivatives of rational Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1992,9(3):161~174.

