

复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c (\alpha \geq 2)$ 的广义 M 集及其对称周期检测法*

谭建荣⁺, 程 锦

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

General Mandelbrot Sets from the Complex Mapping $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c (\alpha \geq 2)$ and Its Symmetrical Period-Checking Algorithm

TAN Jian-Rong⁺, CHENG Jin

(State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

+Corresponding author: Phn: 86-571-87951273, E-mail: egi@zju.edu.cn

<http://www.cad.zju.edu.cn/>

Received 2002-01-28; Accepted 2002-05-21

Tan JR, Cheng J. General Mandelbrot sets from the complex mapping $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c (\alpha \geq 2)$ and its symmetrical period-checking algorithm. *Journal of Software*, 2003,14(3):666~674.

Abstract: The general Mandelbrot sets from the non-analytical complex mapping $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ for $\alpha \geq 2$ are studied in this paper. The M-sets' properties of different parameter α are theoretically analyzed and proved. The parameter equation of the fixed point region's boundary when α is a positive integer are strictly given. A symmetrical period-checking algorithm, which colors M-sets according to the period of each point in the complex C-plane, is put forward for the first time. The new algorithm takes full advantage of the M-sets' property during the rendering process and can greatly reduce the number of iterations in calculating the period of all pixel points in the drawing region. The experimental results show that both high quality and high drawing speed of the M-sets' fractal image can be acquired with the new algorithm. Furthermore, the new algorithm can be generalized to the drawing of other Mandelbrot sets and Julia sets.

Key words: general Mandelbrot set; non-analytical complex mapping; symmetry; integral petal; critical point; escape time algorithm; period-checking algorithm; symmetrical calculating region

摘 要: 研究了指数为负实数的非解析复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c (\alpha \geq 2)$ 的广义 Mandelbrot 集. 分析和证明了 α 取不同值时该映射的广义 M 集所具有的性质, 严格地给出了 α 为正整数时复映射周期 1 轨道稳定区域边界的参数方程. 提出了对称周期检测法, 根据各参数点的周期值对 M 集进行着色, 并充分利用 M 集的对称性来减少绘制过程中计算周期时所需要的迭代运算. 实验结果表明, 新算法在获得高质量 M 分形图的同时具有较高的绘制速度. 进一步地, 新算法可以推广到其他 M(Mandelbrot) 集和 J(Julia) 集的绘制.

关键词: 广义 Mandelbrot 集; 非解析复映射; 对称性; 完整花瓣; 临界点; 逃逸时间算法; 周期检测法; 对称计算区域

中图法分类号: TP391 文献标识码: A

* Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No.69878038 (国家自然科学基金); the Assisting Project of Ministry of Education of China for Backbone Teachers of University and College (国家教育部高等学校骨干教师资助计划)

第一作者简介: 谭建荣(1954—), 男, 浙江湖州人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为产品信息学, CAX 方法学, 工程图形学.

自从 B.B.Mandelbrot 用计算机绘制出第 1 张 M 集图像以来, M 集就以其美妙而精细的复杂结构吸引了许多科学家的注意. 国内外很多学者对 M 集进行了推广. 北京大学的黄永念^[1]利用自己提出的代数分析法研究了指数为正整数时复映射 $z_{n+1} = z_n^m + c$ 的周期轨道的整体解析特性, 给出了计算任意周期的周期轨道个数的一般公式. U.G.Gujar^[2]等人将指数推广到所有实数, 构造了复映射 $z \leftarrow z^\alpha + c$ 的大量 M 集, 并根据实验结果提出了 M 集结构与 α 值之间关系的多个猜想; 文献[3]则对文献[2]中提出的 α 值为负时的所有猜想从数学上给出了严格的证明. 文献[4,5]将复映射中的指数推广到所有复数, 构造了复映射 $z \leftarrow z^w + c (w = \alpha + i\beta)$ 的广义 M 集, 并对这些 M 集的结构和性质进行了较深入分析和讨论. 然而, 以上所有这些推广中所用的复映射都是解析的, 用非解析复映射构造分形图的研究遇到了一定的困难. 目前仅有文献[6,7]用指数为正整数的复映射 $z_{n+1} = \bar{z}_n^m + c (m$ 为大于 1 的正整数) 构造了一些广义 M 集, 但主要是给出了计算机实验的结果, 而未能对这些 M 集的结构和特征进行深入分析.

为了进一步探索 Mandelbrot 集的奥秘和规律, 本文将非解析复映射的指数推广到实数域, 从理论上分析和证明了复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c (\alpha \geq 2)$ 的广义 M 集所具有的性质, 并给出了指数为负整数时复映射周期 1 轨道的稳定区域边界的参数方程. 针对该映射不发散的特点, 在深入分析其 M 集结构特征的基础上提出了对称周期检测法. 与逃逸时间算法不同, 新算法对参数平面上的各点根据其周期值的大小进行着色, 从而有效地消除了逃逸时间算法绘制时因迭代终止条件不确定而产生的随机因素, 提高了所绘 M 分形图的质量. 同时, 新算法充分利用了 M 集结构的对称性来提高绘制速度, 节省绘制时间.

1 复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的广义 M 集的性质

令 $\alpha = n + \varepsilon$, 其中 n 为正整数, ε 为分数, 且 $0 \leq \varepsilon < 1$. 下面我们将分别讨论 n 和 ε 取不同值时映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的广义 M 集所具有的性质.

性质 1. 广义 M 集无界. 这一性质是显而易见的.

性质 2. 当 α 为任意正实数时, 广义 M 集均关于实轴 X 对称.

证明: 设 $f(z) = (\bar{z})^{-\alpha} + c, g(z) = (\bar{z})^{-\alpha} + \bar{c}, h(z) = \bar{z}$, 则有

$$\begin{aligned} h \cdot f(z) &= \overline{(\bar{z})^{-\alpha} + c} = \overline{z^{-\alpha} + c} = z^{-\alpha} + \bar{c} = z^{-\alpha} + \bar{c}, \\ g \cdot h(z) &= (\bar{z})^{-\alpha} + \bar{c} = z^{-\alpha} + \bar{c}. \end{aligned}$$

因此, $h \cdot f(z) = g \cdot h(z)$, 即若 $c \in M$, 则必有 $\bar{c} \in M$. □

性质 3. 当 α 为正奇数即 $\varepsilon = 0$ 且 $n = 2m - 1, m \in N$ 时, 广义 M 集关于虚轴 Y 对称.

证明: 设 $f(z) = (\bar{z})^{-(2m-1)} + c, g(z) = (\bar{z})^{-(2m-1)} - \bar{c}, h(z) = -\bar{z}$, 则有

$$\begin{aligned} h \cdot f(z) &= -\overline{(\bar{z})^{-(2m-1)} + c} = -\overline{z^{-(2m-1)} + c} = -(z^{-(2m-1)} + \bar{c}), \\ g \cdot h(z) &= (-\bar{z})^{-(2m-1)} - \bar{c} = (-z)^{-(2m-1)} - \bar{c} = -(z^{-(2m-1)} + \bar{c}). \end{aligned}$$

因此, 当 α 为正奇数时, $h \cdot f(z) = g \cdot h(z)$, 即若 $c \in M$, 则必有 $-\bar{c} \in M$. □

性质 4. 当 α 为正奇数即 $\varepsilon = 0$ 且 $n = 2m - 1, m \in N$ 时, 广义 M 集关于原点对称.

证明: 设 $f(z) = (\bar{z})^{-(2m-1)} + c, g(z) = (\bar{z})^{-(2m-1)} - c, h(z) = -z$, 则有

$$\begin{aligned} h \cdot f(z) &= -\overline{(\bar{z})^{-(2m-1)} + c}, \\ g \cdot h(z) &= (-z)^{-(2m-1)} - c = (-\bar{z})^{-(2m-1)} - c = -\overline{(\bar{z})^{-(2m-1)} + c}. \end{aligned}$$

因此, 当 α 为正奇数时, $h \cdot f(z) = g \cdot h(z)$, 即若 $c \in M$, 则必有 $-c \in M$. □

性质 5. 当 α 为正整数即 $\varepsilon = 0$ 时, 广义 M 集由 $n-1$ 个旋转对称部分构成. 为了叙述方便, 我们在下文称这些旋转对称部分为完整花瓣.

证明: 设 $f(z) = (\bar{z})^{-\alpha} + c, g(z) = (\bar{z})^{-\alpha} + e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} c, h(z) = e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} z$, 则有

$$h \cdot f(z) = e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} \left[(\bar{z})^{-\alpha} + c \right],$$

$$\begin{aligned}
 g \cdot h(z) &= \left(e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} z \right)^{-\alpha} + e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} c = \left(e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} \right)^{-\alpha} (\bar{z})^{-\alpha} + e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} c = e^{\frac{\alpha-2\pi i}{\alpha-1}} (\bar{z})^{-\alpha} + e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} c \\
 &= e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} (\bar{z})^{-\alpha} + e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} c \\
 &= e^{\frac{2\pi i}{\alpha-1}} \left[(\bar{z})^{-\alpha} + c \right]. \quad (e^{2\pi i} = 1)
 \end{aligned}$$

因此, $h \cdot f(z) = g \cdot h(z)$.

特殊地,当 $\varepsilon = 0, \alpha = n$ 时,若 $c \in M$, 则必有 $ce^{\frac{2\pi i}{n-1}j} \in M, j = 1, 2, \dots, n-2$, 也即,此时的广义 M 集由 $n-1$ 个旋转对称的完整花瓣构成. □

设参数 c 辐角取值范围为 $(-\pi, \pi]$, 则根据性质 5 中的证明和性质 2 我们又可以得出以下两条性质:

性质 6. 当 $\varepsilon \neq 0$ 且 n 为奇数时, M 集有 $n-1$ 个完整花瓣, 它们均匀分布在复平面上 $\left[-\frac{(n-1)\pi}{n+\varepsilon-1}, \frac{(n-1)\pi}{n+\varepsilon-1} \right]$ 的扇形区域内; 由 $\varepsilon \neq 0$ 所产生的非对称部分则位于辐角为 $\frac{2\pi\varepsilon}{n+\varepsilon-1}$ 且关于负实轴对称的扇形区域内.

性质 7. 当 $\varepsilon \neq 0$ 且 n 为偶数时, M 集有 $n-2$ 个完整花瓣, 它们均匀分布在复平面上 $\left[-\frac{(n-2)\pi}{n+\varepsilon-1}, \frac{(n-2)\pi}{n+\varepsilon-1} \right]$ 的扇形区域内; 由 $\varepsilon \neq 0$ 所产生的非对称部分则位于辐角为 $\frac{2\pi(\varepsilon+1)}{n+\varepsilon-1}$ 且关于负实轴对称的扇形区域内.

2 复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的临界点

由于本文所研究的映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 在复平面内不是解析函数, 因此, 需先将其转化为二维平面上的离散映射, 则使该二维离散映射的雅可比矩阵的特征值为 0 的点为原非解析复映射的临界点^[6,7].

我们先考虑 α 为正整数即 $\varepsilon = 0$ 时的情况, 此时复映射可表示为 $z \leftarrow (\bar{z})^{-n} + c (n \geq 2)$. 设 $z_k = x_k + y_k i, c = a + bi$, 则其所对应的二维离散映射为

$$T_n : \begin{cases} x_{k+1} = R(x_k, y_k) + a \\ y_{k+1} = I(x_k, y_k) + b \end{cases} \quad (1)$$

映射 T_n 的雅可比矩阵为

$$J_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x_k} & \frac{\partial R}{\partial y_k} \\ \frac{\partial I}{\partial x_k} & \frac{\partial I}{\partial y_k} \end{bmatrix} \quad (2)$$

定理 1. 复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-n} + c (n \geq 2)$ 所对应的二维离散映射 T_n 的雅可比矩阵 J_n 是对称的, 且 J_n 的特征多项式为 $\lambda^2 - n^2(x_k^2 + y_k^2)^{-(n+1)}$.

证明: 用数学归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时, 二维离散映射为

$$T_2 : \begin{cases} x_{k+1} = \frac{x_k^2 - y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^2} + a \\ y_{k+1} = \frac{2x_k y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^2} + b \end{cases},$$

其雅可比矩阵 $J_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2x_k^3 + 6x_k y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^3} & \frac{2y_k^3 - 6x_k^2 y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^3} \\ \frac{2y_k^3 - 6x_k^2 y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^3} & \frac{2x_k^3 - 6x_k y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^3} \end{pmatrix}$ 是对称矩阵, 且其特征多项式为

$$\begin{vmatrix} \frac{-2x_k^3 + 6x_k y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^3} - \lambda_2 & \frac{2y_k^3 - 6x_k^2 y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^3} \\ \frac{2y_k^3 - 6x_k^2 y_k}{(x_k^2 + y_k^2)^3} & \frac{2x_k^3 - 6x_k y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^3} - \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2^2 - 2^2(x_k^2 + y_k^2)^{-3} = \lambda_2^2 - 2^2(x_k^2 + y_k^2)^{-(2+1)}.$$

因此, $n=2$ 时定理成立.

(2) 假设 n 时定理成立, 则根据柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件及解析函数与调和函数的关系, 应有以下等式成立:

$$\frac{\partial R}{\partial x_k} = -\frac{\partial I}{\partial y_k}, \quad \frac{\partial R}{\partial y_k} = \frac{\partial I}{\partial x_k}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y_k^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y_k^2} = 0, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial x_k} - \lambda_n & \frac{\partial R}{\partial y_k} \\ \frac{\partial I}{\partial x_k} & \frac{\partial I}{\partial y_k} - \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_n^2 - n^2(x_k^2 + y_k^2)^{-(n+1)}. \tag{5}$$

(3) 当 $n+1$ 时, 由 $z_{k+1} = (\bar{z}_k)^{-(n+1)} + c = (\bar{z}_k)^{-n} (\bar{z}_k)^{-1} + c = (R(x_k, y_k) + I(x_k, y_k)i) \left(\frac{x_k + y_k i}{x_k^2 + y_k^2} \right) + a + bi$ 可得, 复映射所对应的二维离散映射为

$$T_{n+1} : \begin{cases} x_{k+1} = \frac{x_k R(x_k, y_k) - y_k I(x_k, y_k)}{x_k^2 + y_k^2} + a \\ y_{k+1} = \frac{y_k R(x_k, y_k) + x_k I(x_k, y_k)}{x_k^2 + y_k^2} + b \end{cases}$$

其雅可比矩阵为 $J_{n+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, 其中

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2x_k y_k I(x_k, y_k) + (y_k^2 - x_k^2)R(x_k, y_k) + (x_k^2 + y_k^2) \left(x_k \frac{\partial R}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial x_k} \right)}{(x_k^2 + y_k^2)^2}, \\ B &= \frac{-2x_k y_k R(x_k, y_k) + (y_k^2 - x_k^2)I(x_k, y_k) + (x_k^2 + y_k^2) \left(x_k \frac{\partial R}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial y_k} \right)}{(x_k^2 + y_k^2)^2}, \\ C &= \frac{-2x_k y_k R(x_k, y_k) + (y_k^2 - x_k^2)I(x_k, y_k) + (x_k^2 + y_k^2) \left(x_k \frac{\partial I}{\partial x_k} + y_k \frac{\partial R}{\partial x_k} \right)}{(x_k^2 + y_k^2)^2}, \\ D &= \frac{-2x_k y_k I(x_k, y_k) + (x_k^2 - y_k^2)R(x_k, y_k) + (x_k^2 + y_k^2) \left(x_k \frac{\partial I}{\partial y_k} + y_k \frac{\partial R}{\partial y_k} \right)}{(x_k^2 + y_k^2)^2}. \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

将式(3)代入式(6)可得, $A = -D, B = C$, 因此, J_{n+1} 是对称矩阵. 且其特征多项式为

$$|J_{n+1} - \lambda_{n+1} E| = \begin{vmatrix} A - \lambda_{n+1} & B \\ C & D - \lambda_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A - \lambda_{n+1} & B \\ B & -A - \lambda_{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_{n+1}^2 - (A^2 + B^2). \tag{7}$$

其中,

$$\begin{aligned}
(A^2 + B^2)(y_k^2 + x_k^2)^4 &= (y_k^2 + x_k^2)^2(I^2 + R^2) + (x_k^2 + y_k^2)^2 \left[\left(x_k \frac{\partial R}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial x_k} \right)^2 + \left(x_k \frac{\partial R}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial y_k} \right)^2 \right] + \\
&4Ix_k y_k (x_k^2 + y_k^2) \left(x_k \frac{\partial R}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial x_k} \right) + 2R(x_k^2 + y_k^2)(y_k^2 - x_k^2) \left(x_k \frac{\partial R}{\partial x_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial x_k} \right) + \\
&4Rx_k y_k (x_k^2 + y_k^2) \left(y_k \frac{\partial I}{\partial y_k} - x_k \frac{\partial R}{\partial y_k} \right) + 2I(x_k^2 + y_k^2)(y_k^2 - x_k^2) \left(x_k \frac{\partial R}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial I}{\partial y_k} \right) \\
&= (y_k^2 + x_k^2)^2 \left\{ (I^2 + R^2) + (y_k^2 + x_k^2) \left[\left(\frac{\partial R}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y_k} \right)^2 \right] - \left[x_k \frac{\partial(I^2 + R^2)}{\partial x_k} + y_k \frac{\partial(I^2 + R^2)}{\partial y_k} \right] \right\}. \quad (8)
\end{aligned}$$

又由式(3)和式(5)可得

$$\frac{\partial R}{\partial x_k} \frac{\partial I}{\partial y_k} - \frac{\partial R}{\partial y_k} \frac{\partial I}{\partial x_k} = -n^2 (x_k^2 + y_k^2)^{-(n+1)}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y_k} \right)^2 = \left(\frac{\partial I}{\partial x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y_k} \right)^2 = n^2 (x_k^2 + y_k^2)^{-(n+1)}. \quad (10)$$

由式(4)和式(10)可推出

$$R^2 + I^2 = (x_k^2 + y_k^2)^{-n}. \quad (11)$$

将式(10)和式(11)代入式(8)可得

$$(A^2 + B^2) = (n+1)^2 (x_k^2 + y_k^2)^{-(n+2)}. \quad (12)$$

将式(12)代入式(7)得

$$|J_{n+1} - \lambda_{n+1} E| = \lambda_{n+1}^2 - (n+1)^2 (x_k^2 + y_k^2)^{-(n+1)+1}.$$

因此,定理 1 在 $n+1$ 时也成立. \square

由定理 1 可知,当 $z \rightarrow \infty$ 时复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-n} + c$ 的特征值为 0. 因此,当 $\varepsilon = 0$ 时,映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-n} + c$ 的临界点为 $z \rightarrow \infty$. 此外,我们还可得出以下推论:

推论 1. 当 α 为不小于 2 的任意正实数时,复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的临界点均为 $z \rightarrow \infty$.

3 周期 1 轨道的稳定区域

在介绍广义 M 集的构造方法之前,我们先从理论上进行一下分析,当 α 为正整数,即当映射可表示为 $z \leftarrow (\bar{z})^{-n} + c$ 的形式时,周期 1 轨道的稳定区域的情况. 此时,复映射的周期 1 轨道满足

$$z = (\bar{z})^{-n} + c, \quad (13)$$

其稳定性由条件

$$|\lambda| < 1 \quad (14)$$

决定,其中 λ 为 z 处雅可比矩阵 J_n 的特征值. 由定理 1 可知,式(14)等价于

$$|z| > n^{\frac{1}{n+1}}. \quad (15)$$

因此,当 α 为正整数 n 时,复映射周期 1 轨道稳定区域的边界由条件 $|z| = n^{\frac{1}{n+1}}$ 决定. 令 $z = n^{\frac{1}{n+1}} e^{i\theta}$, 代入式(13), 即可得到周期 1 轨道稳定区域的边界为

$$c = n^{\frac{1}{n+1}} e^{i\theta} - n^{\frac{-n}{n+1}} e^{in\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \quad (16)$$

可用 C 平面上的参数方程表示为

$$\begin{cases} a = n^{\frac{1}{n+1}} \cos \theta - n^{\frac{-n}{n+1}} \cos n\theta \\ b = n^{\frac{1}{n+1}} \sin \theta - n^{\frac{-n}{n+1}} \sin n\theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (17)$$

这是一条圆外旋轮线(又称为外摆线),它是当一圆周沿另一圆的外部滚动时,动圆周上的一点所描绘的轨迹. 其

中,定圆的半径为 $r_1 = \frac{n-1}{n} \cdot n^{\frac{1}{n+1}}$,动圆的半径为 $r_2 = n^{\frac{-n}{n+1}}$.由于比率 $r_1/r_2 = n-1$ 是一个整数,因此,该曲线是由 $n-1$ 段彼此不交的弧连接而成的,且每拱弧长为 $8n^{\frac{1}{n+1}}/(n-1)$.特殊地,当 $n=2$ 时, $r_1 = r_2$,这时,普通圆外旋轮线是心脏线,其参数方程为

$$\begin{cases} a = 2^{\frac{2}{3}}(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ b = 2^{\frac{2}{3}}(2\sin\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi). \tag{18}$$

4 复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的广义 M 集的构造

4.1 现有算法分析

根据参考文献[8],通过判定 C 平面上映射临界点的轨道是否有界,可以考察参数 c 是否属于 M 集,即 $M = \{c \in C: \{f_c^n(z_0)\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow \infty\}$,其中 z_0 为映射的临界点.基于这一思想,传统的逃逸时间算法^[9]将绘图区域内的所有点逐个作为复映射中的参数 c ,考察每一点处映射临界点的轨道是否在达到最大迭代数之前进入发散区域.该算法在生成 M 集的过程中需对绘图区域内的所有点进行迭代计算,因此,其运算量大,绘制速度慢.文献[10,11]中所提出的对称逃逸时间算法和旋转逃逸时间算法在构造 M 集,前先利用 M 集的特点确定对称计算区域或旋转计算区域,然后根据计算区域内各点处映射临界点的轨道是否在达到最大迭代数之前进入发散区域来判断各点是否属于 M 集,整个绘图区域的 M 集则由其对称性得到.这两种改进算法通过减少绘制 M 集时所需进行迭代的像素点的数目来提高算法的绘制速度,它们与传统的逃逸时间算法具有相同的绘制精度.

从以上分析我们可以看出,逃逸时间算法所绘 M 集的结构与算法中所给定的迭代终止条件密切相关.如果给定的最大迭代数太小、发散区域的半径太大,则大量的点被判为非逃逸点,绘制出的 M 集十分粗糙.尤其是当映射的指数为负时,由于映射不收敛,逃逸时间算法所绘 M 集的结构更是取决于算法中具体给定的迭代终止条件,存在着相当大的随机性.文献[8]将 Lyapunov 指数法^[12]和周期检测法^[13]应用于 M 集的绘制,有效地解决了该问题.Lyapunov 指数法将指数为正和负的点分别用两种不同的颜色来绘制,而周期检测法则将参数平面上各点按其周期值进行着色.值得注意的是,当用周期检测法绘制时,若将所有不同周期的点均用同一种颜色来绘制,则所得到的 M 集和用 Lyapunov 指数法绘制时几乎是一致的.可见,这两种方法所绘制的 M 集具有相同的精度,但后者通过采用不同的着色方案可以绘制出更加丰富多彩的 M 集.

4.2 对称周期检测法

考虑到复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 不收敛,本文采用周期检测法来绘制 M 集,以避免在所绘 M 集中引入随机因素,并保证其具有较高的精度.同时,为了提高效率,本算法充分利用 M 集的对称性来减少计算各点周期时的运算量.因此,我们称之为对称周期检测法.

4.2.1 映射初始迭代点的选取

由推论 1 可知,复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的临界点为 $z \rightarrow \infty$,在映射作用下该临界点的轨道为

$$\infty, c, (\bar{c})^{-\alpha} + c, ((\bar{c})^{-\alpha} + c)^{-\alpha} + c, \dots \tag{19}$$

可见,用 ∞ 和 c 作为初始点进行迭代具有相同的效果.为方便起见,本文用参数 c 本身作为初始迭代点来确定 c 是否属于 M 集.

4.2.2 算法描述

算法 1. 对称周期检测法.

Step1. 确定复映射中参数 c 的取值范围、绘图区域和最大周期值.

Step2. 根据 $\alpha (\alpha = n + \varepsilon)$ 不同取值情况下,复映射的广义 M 集所具有的性质确定对称计算区域.

A. 当 $\varepsilon \neq 0$ 时分两种情况:

- (a) 若 n 为奇数,则对称计算区域为 $\left[0, \frac{2\pi}{n+\varepsilon-1}\right] \cup \left[\frac{(n-1)\pi}{n+\varepsilon-1}, \pi\right]$ 内的扇形区域;

(b) 若 n 为偶数,则对称计算区域为 $\left[0, \frac{2\pi}{n+\varepsilon-1}\right] \cup \left[\frac{(n-2)\pi}{n+\varepsilon-1}, \pi\right]$ 内的扇形区域;

B. 当 $\varepsilon=0$ 时分 3 种情况:

(c) 若 $n=2$,则对称计算区域为上半个复平面;

(d) 若 $n=3$,则对称计算区域为第 1 象限的复平面;

(e) 若 $n \geq 4$,则对称计算区域为 $\left[0, \frac{2\pi}{n-1}\right]$ 内的扇形区域.

Step3. 用周期检测法绘制对称计算区域内的广义 M 集.

Step4. 对称构造整个绘图区域内的广义 M 集.

4.2.3 实验结果和分析

本文给出的所有 M 分形图中 c 的取值范围均为 $-2 \leq \text{Re } c \leq 2, -2 \leq \text{Im } c \leq 2$,计算机屏幕上的绘图区域为 200×200 个像素点,最大周期值为 100,采用 11 种颜色对绘图区域内所有点按其周期进行着色.周期值不超过 100 的点被认为是稳定点,用彩色进行绘制.对于那些周期值大于 100 的点,算法不能判断其是否稳定,它们既可能是周期值很大的稳定点,也可能是周期值不存在的混沌点,在实验中我们将这些点均用白色进行绘制.

图 1 为 α 取 2 时的 M 集.图 2 是对应图 1 的 M 集、但只有 35×35 个像素点时绘图区域内各点的实际周期值,其中没有标明周期值的点的周期大于 100.比较图 1 和图 2,容易看出不同周期点所对应的区域,且当 α 为 2 时复映射周期 1 轨道稳定区域的边界是心脏线,这与第 3 节中的分析是完全一致的.

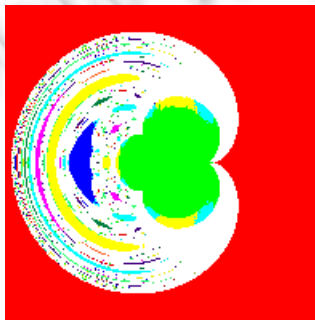


Fig.1 $\alpha=2, 200 \times 200$

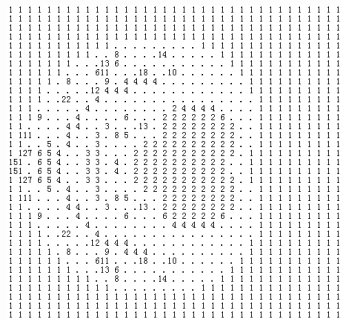


Fig.2 $\alpha=2, 35 \times 35$

图 3~图 5 分别是 α 为正整数 5,6,7 时复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的广义 M 集,它们分别具有 4 个、5 个和 6 个完整花瓣,且整个 M 集均关于实轴对称.并且,当 α 为奇数 5 和 7 时,M 集还关于虚轴和原点对称;当 α 为偶数 6 时,M 集的 5 个完整花瓣中有一个花瓣本身是关于实轴对称的,但此时这 5 个完整花瓣不再关于虚轴和原点对称.此外,从这些图中可以看出,当 α 为正整数 5,6,7 时,周期 1 轨道稳定区域的边界(即各图中所有完整花瓣的整体轮廓)分别是由 4,5,6 段相互不交的外摆线构成的,这也说明第 3 节中的理论分析是完全正确的.

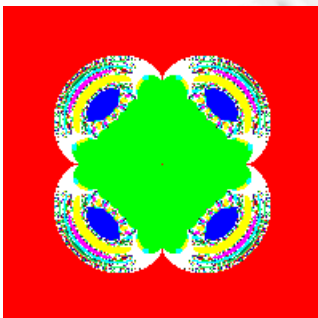


Fig.3 $\alpha=5$

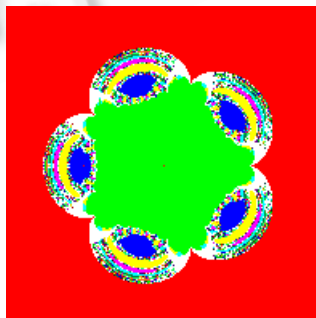


Fig.4 $\alpha=6$

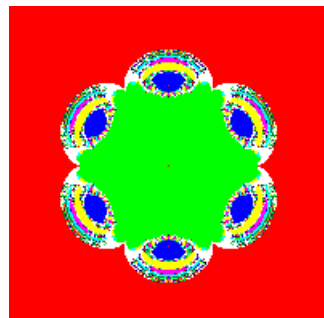


Fig.5 $\alpha=7$

图 6(a)~图 6(f)分别是 α 取实数 5.3,5.7,5.9,6.2,6.4 和 6.8 时复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c$ 的广义 M 集.从这些图中我们可以看出,当 α 为非整数时,M 集仍然关于实轴对称,但不再具有旋转对称性.并且,当 α 的整数部分 n 为奇数和

偶数时, M 集结构的变化是不同的.

当 n 为奇数(如图 6(a)~图 6(c)所示)时, M 集除了 $n-1$ 个均匀分布的完整花瓣以外,在负实轴上出现了一个关于实轴对称的小花瓣,随着 ε 从 0 变化到 1,这个小花瓣逐渐长大直至成为一个完整花瓣;当 n 为偶数(如图 6(d)~图 6(f)所示)时, M 集只有 $n-2$ 个均匀分布的完整花瓣,关于负实轴对称的花瓣随 ε 的不断增大而逐渐分裂,直至长成两个完整的花瓣.这与第 1 节中性质 6 和性质 7 的描述完全吻合.

此外,本文提出的算法利用 M 集结构的对称性来提高绘制速度.复映射指数的绝对值 α 越大,对称计算区域在整个绘图区域中所占的比例越小,绘制 M 集过程中在给定绘图区域内需要进行复迭代计算周期值的像素点也就越少,从而在绘制 M 集的过程中所能节省的运算量也就越多,越能体现出算法的优越性.

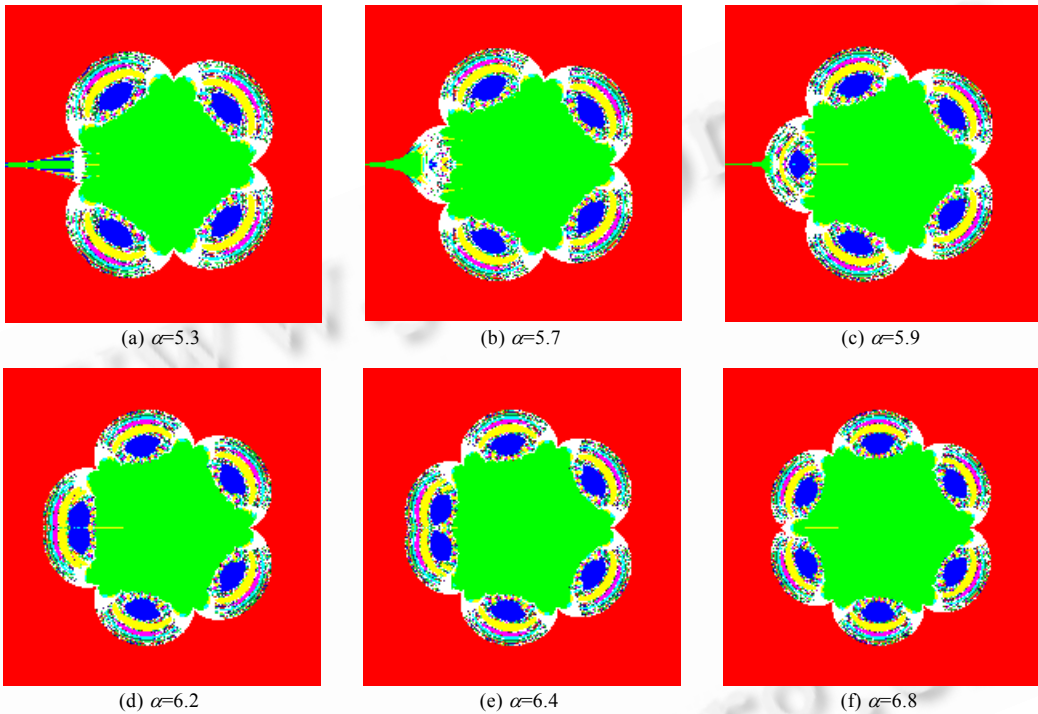


Fig.6 General Mandelbrot sets when parameter α is not integral

图 6 α 为非整数时复映射的广义 Mandelbrot 集

5 结 论

本文分析和证明了 α 不同取值情况下非解析复映射 $z \leftarrow (\bar{z})^{-\alpha} + c (\alpha \geq 2)$ 的广义 Mandelbrot 集所具有的性质.针对 α 为正整数时的特殊情况,从理论上研究了该映射周期 1 轨道的稳定区域,并精确地给出了稳定区域边界的参数方程.

本文提出了对称周期检测法.该算法既可充分利用 M 集的对称性来提高绘制效率,又能有效地消除逸时间算法绘制时因迭代终止条件不确定而无法避免的随机因素,从而在节省时间的同时能够获得高质量的 M 分形图.由于其他复映射的广义 M 集和 J 集也有类似的结构特征,因此,可将本文提出的算法应用于其他复映射的广义 M 集和 J 集的绘制,相信可以取得较好的效果.

References:

- [1] Huang, YN. Global analysis of the Mandelbrot set and the general Mandelbrot set. China Science (A), 1991,(8):823~830 (in Chinese with English Abstract).
- [2] Gujar UG, Bhavsar VC. Fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ in the complex c -plane. Computers and Graphics, 1991,15(3):441~449.

- [3] Wang XY, Liu XD, Zhu WY, Gu SS. Analysis of c -plane fractal images from $z \leftarrow z^\alpha + c$ for $(\alpha < 0)$. *Fractals*, 2000,8(3): 307~314.
- [4] Chen N, Zhu WY. M fractal images from complex mapping $z \leftarrow z^w + c(w = \alpha + i\beta)$ in the complex C -plane. *Computer Research and Development*, 1997,34(12):899~907 (in Chinese with English Abstract).
- [5] Chen N, Zhu WY. Bud-Sequence conjecture on M fractal image and M - J conjecture between c and z planes from $z \leftarrow z^w + c(w = \alpha + i\beta)$. *Computers and Graphics*, 1998,22(4):537~546.
- [6] Yan DJ, Zhang H, Zhu WY. Mandelbrot set and Julia sets generated by complex iteration $z \rightarrow \bar{z}^2 + c$ 的. *Journal of Shenyang Polytechnic University*, 1999,21(2):169~171 (in Chinese with English Abstract).
- [7] Zhu ZL, Yan DJ, Zhu WY. General Mandelbrot sets generated by the complex iteration $z_{n+1} = \bar{z}_n^m + c$. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2000,21(5):469~472 (in Chinese with English Abstract).
- [8] Shirriff K. An investigation of fractals generated by $z \leftarrow -1/z^n + c$. *Computers and Graphics*, 1993,17(3):603~607.
- [9] Jin YW, Lu SJ. *Fractal Geometry: Theory and Application*. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1998 (in Chinese).
- [10] Chen N, Zhu WY. Constructed general high-order Mandelbrot fractal images and symmetrical escape time algorithm. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 1996,17(3):225~229 (in Chinese with English Abstract).
- [11] Chen N, Zhu WY. Constructed high-order Julia fractal image and rotating escape time algorithm. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 1997,18(1):95~97 (in Chinese with English Abstract).
- [12] Markus M, Hess B. Lyapunov exponents of the logistic map with periodic forcing. *Computers and Graphics*, 1989,13(4):553~558.
- [13] Welstead ST, Cromer TL. Coloring periodicities of two-dimensional mappings. *Computers and Graphics*, 1989,13(4):539~543.

附中文参考文献:

- [1] 黄永念. Mandelbrot 集及其广义情况的整体解析特性. *中国科学(A 辑)*, 1991, (8):823~830.
- [4] 陈宁, 朱伟勇. 复映射 $z \leftarrow z^w + c(w = \alpha + i\beta)$ 构造 M 集. *计算机研究与发展*, 1997, 34(12):899~907.
- [6] 焉德军, 张洪, 朱伟勇. 复迭代 $z \rightarrow \bar{z}^2 + c$ 的 Mandelbrot 集和 Julia 集. *沈阳工业大学学报*, 1999, 21(2):169~171.
- [7] 朱志良, 焉德军, 朱伟勇. 复迭代 $z_{n+1} = \bar{z}_n^m + c$ 的广义 Mandelbrot 集. *东北大学学报(自然科学版)*, 2000, 21(5):469~472.
- [9] 金以文, 鲁世杰. *分形几何原理及其应用*. 杭州: 浙江大学出版社, 1998.
- [10] 陈宁, 朱伟勇. 构造高阶广义 Mandelbrot 分形图及对称逃逸时间算法. *东北大学学报(自然科学版)*, 1996, 17(3):225~229.
- [11] 陈宁, 朱伟勇. 构造高阶广义 Julia 分形图及旋转逃逸时间算法. *东北大学学报(自然科学版)*, 1997, 18(1):95~97.