

一种新的面向信号处理的小波变换加速算法*

李建平¹, 严中洪¹, 张万萍²

¹(重庆解放军后勤工程学院 国际小波分析应用研究中心,重庆 400016);

²(成都电子科技大学 应用数学系,四川 成都 610054)

E-mail: jpli2222@yahoo.com

http://202.202.48.111

摘要: 给出了小波分析滤波器系数的解析构造方法,导出了类似于快速 Fourier 变换的小波快速变换算法.它比著名的小波变换 Mallat 算法更简单、方便,计算速度更快.同时,它还可以根据分析的信号自适应地选择小波分析滤波器参数.

关键词: 小波变换;滤波器;快速算法;加速方法;信号处理

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

信号与信息处理技术的研究(如图像、语音等)加快了小波理论的发展^[1-11].正如文献[2]所述:“忽然间不可避免地涌现出了各种各样的非线性算法,从而也打开了信号处理通往现代数学的大门.除了传统的应用如信号传输、编码和信号恢复之外,信号处理也进入了信息分析的领域”,对于信号与信息处理来说,为信号处理方法和各种运算构造相应的、有针对性的、自适应的表示方法是一个首要问题.信号的特征化表示是信息分析的前提,抽取信号的特征就必然要求适合自身需要的特征算法,这就是大家感兴趣的自适应方法.小波理论和算法在信号特征提取方面有自己独特的能力,但是,我们应该看到,在小波文献中大量理论叙述了 $L^2(R)$ 空间中的连续问题或分解的方法,在有限维空间中却讨论得比较少.事实上,那些复杂的小波积分变换公式(傅立叶变换或逆变换)在理论上具有完美的意义,却给具体计算带来了一定的困难,可操作性不强.自从有了 Mallat 塔式分解方法以来,这一现象似乎得到了很大改观.本文在深入分析 Mallat 塔式分解方法和传统 FFT 方法的基础上,探索其内在结构的不同和差异,进而提出一种新的面向信号处理的小波变换加速算法.它比著名的 Mallat 算法更简单、方便,计算速度更快.它还可以根据信号处理对象的不同,自适应地选择参数.

1 小波滤波器统一分解构造方法

文献[3,4]叙述了小波滤波器统一分解构造方法,它假设了紧支集上正交小波基条件:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)\sqrt{2}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} h(2i) = \sum_{i=0}^{N-1} h(2i+1) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (2)$$

* 收稿日期: 2000-11-06; 修改日期: 2001-04-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69903012);重庆市信息产业发展资金项目;后勤工程学院科学研究基金项目

作者简介: 李建平(1964 -),男,湖南祁阳人,博士,教授,博士生导师,主要研究领域是小波分析,分形理论,神经网络,电子商务与排队论;严中洪(1965 -),男,重庆人,博士,副教授,主要研究领域为小波分析,模式识别;张万萍(1964 -),女,重庆人,讲师,主要研究领域为小波分析,系统辨识.

$$\begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(2N-1) \\ & h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(2N-1) \\ & & \dots & & & \\ & & & h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(2N-1) \\ & & & & \dots & & & \end{bmatrix} \text{为行正交矩阵.} \quad (3)$$

实际上还有一个条件:

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)h(i) = 1. \quad (4)$$

式(3)中的行正交实际上是卷积

$$\sum_{i=0}^{2N-1} h(i)h(i+2q) = 0, q=1,2,3,\dots,$$

成立.其中当 $i+2q$ 超过 $2N-1$ 时 $h(i+2q)=0$;记 $C(N),S(N)$ 分别为滤波器式(3)中的偶数项 N 维向量、奇数项 N 维向量:

$$C(N) = \{h(0),h(2),h(4),\dots,h(2N-2)\}, \quad (5)$$

$$S(N) = \{h(1),h(3),h(5),\dots,h(2N-1)\}, \quad (6)$$

对任意一个参数 α ,注意当 $N=1$ 时, $C(1) = \{\cos\alpha\}$; $S(1) = \{\sin\alpha\}$;定义递推计算公式为

$$C(N) = \{\cos\alpha(C(N-1),0) - \sin\alpha(0,S(N-1))\}, \quad (7)$$

$$S(N) = \{\sin\alpha(C(N-1),0) + \cos\alpha(0,S(N-1))\}, \quad (8)$$

其中 $C(N-1)$ 表示 $N-1$ 维向量, $(C(N-1),0)$ 表示在 $C(N-1)$ 最后增加一个零元素成为 N 维向量, $\cos\alpha(C(N-1),0)$ 表示 $\cos\alpha$ 乘以 N 维向量 $(C(N-1),0)$, 其他类似.

定义逆递推计算公式:若式(3)成立,则取 $\alpha = \arctg\left(\frac{h(1)}{h(0)}\right)$,使得

$$C(N-1),0 = \{\cos\alpha C(N) + \sin\alpha S(N)\}, \quad (9)$$

$$0,S(N-1) = \{-\sin\alpha C(N) + \cos\alpha S(N)\} \quad (10)$$

成立.根据式(7)~式(10)有如下定理成立.

定理 1. 对任意一组参数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$, 由式(7),式(8)计算得到

$$C(N) = \{h(0),h(2),h(4),\dots,h(2N-2)\},$$

$$S(N) = \{h(1),h(3),h(5),\dots,h(2N-1)\}.$$

满足式(3)、式(4),若要求式(1)、式(2)成立,则当且仅当

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = \frac{\pi}{4}.$$

定理 2. 若 $C(N) = \{h(0),h(2),h(4),\dots,h(2N-2)\}, S(N) = \{h(1),h(3),h(5),\dots,h(2N-1)\}$,使得式(3)、式(4)成立,则由式(9)、(10)可反演算出一组参数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$.

同时,若式(1)、式(2)也成立,则 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N = \frac{\pi}{4}$.

定理 1 和定理 2 的证明见文献[3,4].在文献[3,4]中已验证了著名的 Daubechies 小波、Coifman 小波、Beylkin 小波和 Vaidyanathan 小波,其参数都可以用定理 1 来描述.

2 在 R^n 空间中小波变换的矩阵形式

设低通滤波器为 H ,高通滤波器为 G ,则 Mallat 塔分解算法的矩阵形式为

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(2N-1) \\ & h(0) & h(1) & h(2) & \dots & h(2N-1) \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ h(2)h(3) & & & & & h(0) & h(1) \end{bmatrix}_{n \times 2n}, \tag{11}$$

$$G = \begin{bmatrix} -h(2N-1) & h(2N-2) & \dots & -h(1) & h(0) \\ & -h(2N-1) & h(2N-2) & \dots & -h(1) & h(0) \\ & & \dots & & & \\ & & & \dots & & \\ -h(2N-3) & h(2N-4) & & & & -h(1) & h(0) \end{bmatrix}_{n \times 2n}. \tag{12}$$

将 H 与 G 重新按奇偶列有

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & h(2) & \dots & h(2N-2) \dots (1) & h(3) & \dots & h(2N-1) \\ & h(0) & h(2) & \dots & h(2N-2) \dots h(1) & h(3) & \dots & h(2N-1) \\ & & \dots & & & & & \\ h(4) \dots h(6) \dots & h(0) \dots & h(5) \dots h(7) \dots & h(1) \\ h(2) \dots h(4) \dots & h(0) & h(3) \dots h(5) \dots & h(1) \end{bmatrix}_{n \times 2n}, \tag{13}$$

$$G = \begin{bmatrix} -h(2N-1) & -h(2N-3) & \dots & -h(1) \dots & h(2N-2) & h(2N-4) & \dots & h(0) \dots \\ & -h(2N-1) & -h(2N-3) & \dots & h(2N-2) & h(2N-4) \dots \\ & & \dots & & & & & \\ -h(2N-3) & -h(2N-5) \dots & -h(2N-1) & h(2N-4) & h(2N-6) \dots & h(2N-2) \end{bmatrix}_{n \times 2n}. \tag{14}$$

记置换矩阵:将单位阵的第 1 行置换到最后一行为:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}. \tag{15}$$

定义变换矩阵 $T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha I & \sin \alpha I \\ -\sin \alpha E_2 & \cos \alpha E_2 \end{pmatrix}$ 与逆变换矩阵 $T^{-1}(\alpha) : T^{-1}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha I & -\sin \alpha E_2^T \\ \sin \alpha I & \cos \alpha E_2^T \end{pmatrix}$, 其中 I 是单位

矩阵. $T(0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ 显然是满足行正交条件式(3)的, 记 $F_N = \begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix}$.

定理 3(充分性). 设 $N \geq 1, F_{N-1} = \begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 是形如式(11)、式(12)或式(13)、式(14)排列的矩阵($n \times 2n$ 阶), 如果

F_{N-1} 满足行正交条件式(3), 在滤波器新增一个参数 α , 取

$$F_N = F_{N-1} T(\alpha) \tag{16}$$

也是行正交的, 且其中 H_N, G_N 排列方式与式(11)、式(12)或式(13)、式(14)相同.

证明: 正交性是明显的, 因为 $\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 与 $T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha I & \sin \alpha I \\ -\sin \alpha E_2 & \cos \alpha E_2 \end{pmatrix}$ 都是正交矩阵, 另外注意 $\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 的排列方

式与 E_2 是置换阵, 按矩阵乘法直接验证式(16)中 F_N 的排列形式即可.

事实上, 定理 3 是定理 1 的等价形式.

定理 4(必要性). 记 $N \geq 1$, H_N, G_N 是形如式(11)、式(12)或式(13)、式(14)排列的, 矩阵($n \times 2n$ 阶), 如果 H_N 满足行正交条件式(3), 则存在一个 α 使得:

$$\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha I & -\sin \alpha E_2^T \\ \sin \alpha I & \cos \alpha E_2^T \end{pmatrix} \quad (I \text{ 是单位矩阵}) \quad (17)$$

也是行正交的, 且 H_{N-1}, G_{N-1} 的非零元素至少比 H_N, G_N 少一个, 排列方式仍相同.

证明: 首先把 H_N, G_N 参数元素用向量写成式(5)、式(6), 根据式(3)中行正交性, 必然存在一个 α 使得式(9)、式(10)成立, 因此式(17)有意义, 容易得 H_{N-1}, G_{N-1} 也是正交矩阵. 另外注意 $\begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix}$ 的排列方式与 E_2 是置换阵, 按矩阵乘法直接验证 $\begin{pmatrix} H_{N-1} \\ G_{N-1} \end{pmatrix}$ 的排列形式即可, 注意到式(9)、式(10), 即知 H_{N-1}, G_{N-1} 的非零参数至少比 H_N, G_N 少一个.

事实上, 定理 4 是定理 2 的等价形式.

根据式(16)和式(17)有

$$F_N = F_{N-1} T(\alpha) = T(0) T(\alpha_1) T(\alpha_2) \dots T(\alpha_N). \quad (18)$$

$T(0)$ 在实际计算时可以不考虑, 它仅仅是一个置换阵, 逆变换为

$$\begin{aligned} F^{-1}_N &= T^{-1}(\alpha) F^{-1}_{N-1} = (T(0) T(\alpha_1) T(\alpha_2) \dots T(\alpha_N))^{-1} \\ &= (T^T(\alpha_N) T^T(\alpha_{N-1}) \dots T^T(\alpha_1) T^T(0)). \end{aligned} \quad (19)$$

推论 1. 如果将式(16)或式(17)中的置换阵 E_2 用其他置换阵(但非单位矩阵, 否则式(16)或式(17)的形式是十分平凡的)代替, 不改变定理的结论, 但是 H_N, G_N 的排列方式也作相应的置换.

推论 2. 如果将式(16)或式(17)中的置换阵 E_2 或单位矩阵用其他正交阵代替, 不改变定理的结论, 但是 H_{N-1}, G_{N-1} 与 H_N, G_N 的排列方式可以没有一致性(这时有可能会失去变换的意义), 非零参数个数也可能没有递增(减)性.

例 1: 设有 $a_1 = 0.1054963$, $a_2 = -0.4998413$, $a_3 = 1.1797431$ 三个参数角, 此时 $2n$ 至少为 6, 取 $T(\alpha)$ 或 $T^{-1}(\alpha)$ 为 6×6 矩阵即可, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$, 则有

$$T^{-1}(a_3) T^{-1}(a_2) T^{-1}(a_1) \vec{e}_1 = (0.3326705, 0.4598775, -0.0854412, 0.8068915, 0.1350110, 0.0352262)^T.$$

此式为 $N=3$ 时 Daubechies 基滤波器系数, 前 3 项为偶数项, 后 3 项为奇数项.

对任意一组满足正交条件式(3)的滤波器系数向量:

$$\vec{h}(N) = (C(N), S(N))^T = (h(0), h(2), \dots, h(2N-2), h(1), h(3), \dots, h(2N-1))^T,$$

我们可以根据式(9)、式(10)来计算参数角: 令 $\vec{h}_N(N) = \vec{h}(N)$, $k=N$.

$$\text{Step1. } \alpha_k = \arctg\left(\frac{h(1)}{h(0)}\right),$$

$$\text{Step2. } \vec{h}_{k-1}(N) = T(\alpha_k) \vec{h}_k(N), k=k-1; \text{ if } k>0, \text{ goto Step1 else stop.}$$

根据此方法我们可以算出, 当 $N=5$ 时 Daubechies 基滤波器参数角为 $(0.020831934932, -0.132405340675, 0.401726035315, -0.816369448387, 1.311614982211)$. 小波分解与重构算法程序设计如下.

算法 1. 小波分解.

取向量 $X_0 \in R^{2n}$, 并将 X_0 进行奇偶重排.

Step 1. $k=0$, 计算 $X_{k+1} = T(a_{N-k}) X_k$;

Step 2. $k=k+1$, if $k>N$ stop else goto Step 1.

算法 2. 小波重构.

Step 1. $k=N-1$, 计算 $X_k = T^T(a_{N-k}) X_{k+1}$;

Step 2. $k=k-1$, if $k=0$ stop else goto Step 1.

3 快速小波变换的加速方法

如果将变换矩阵 $T(\alpha)$ 改写为 $T(\alpha) = \cos\alpha \begin{pmatrix} I & \text{tg}\alpha I \\ -\text{tg}\alpha E_2 & E_2 \end{pmatrix}$, 如果不考虑 $T(0)$ 在实际计算时影响, 则式(16)可写成 $\begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \dots \cos\alpha_n \begin{pmatrix} I & \text{tg}\alpha_1 I \\ -\text{tg}\alpha_1 E_2 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \text{tg}\alpha_2 I \\ -\text{tg}\alpha_2 E_2 & E_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} I & \text{tg}\alpha_n I \\ -\text{tg}\alpha_n E_2 & E_2 \end{pmatrix}$. 根据前面的计算公式容易知道 $\cos\alpha_n \dots \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 = h(0)$. 因此, 易见每次计算的重点是做向量乘法. $\begin{pmatrix} H_N \\ G_N \end{pmatrix} X_{2n}$ 总计算量为 $2Nn+2n$ 乘法与 $2Nn$ 加法. 如果采用 Mallat 算法为 $4Nn$ 乘法与 $2n(2N-1)$ 加法, 其运算量相差近 1 倍. 同时, 本文的算法简单, 容易实现. 由此可见, 因为考虑到 H 与 G 已被按奇偶重新排列了, 因此要求将原数据也进行奇偶重排, 这一点与 FFT 完全相同.

4 自适应小波变换方法

根据式(18), 我们可以非常简单地改变参数 α , 同时还能保证正交性条件, 使 $T(\alpha)$ 迅速发生改变, 使我们有能力自适应地选择小波变换基来适应目标信号, 这就是本文的重要目标. 对任意一个向量 $x = (x^{\text{even}}, x^{\text{odd}})^T \in R^{2n}$, $T(\alpha)x = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x^{\text{even}} + \sin\alpha \cdot x^{\text{odd}} \\ -\sin\alpha \cdot E_2 x^{\text{even}} + \cos\alpha \cdot E_2 x^{\text{odd}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. 比如选择 α , 使分量 v 或 u 范数最小, 或者最大分量达到最小, 目标函数可根据图像、语音等处理信号的不同而设置.

5 小波变换加速算法举例分析

国际小波分析应用研究中心成功研制了“小波变换脑电信号分析仪”(此设备已用于医学临床应用). 最初我们用传统小波算法, 其结果始终满足不了医院临床要求, 后来改用本文提出的新算法, 其效果很好. 下面具体分析本文提出的小波变换加速算法在脑电图信号的分解和压缩问题中的应用. 这些信号是“小波变换脑电信号分析仪”具体处理过的信息, 对脑电信号临床应用有指导意义.

例 2: 图 1 是一个病人的原始脑电图信号图及其分析结果图. 利用本文提出的加速方法可以方便地对其各种成分进行有序分解, 快速提取有用的信息, 利用特征信息达到高压存储信息的目的. 其计算速度比 Mallat 算法快 1.102 倍, 效果令人满意.

例 3: 图 2 是一个有严重问题病人的原始脑电图信号图及其分析结果图. 本文的加速方法能快速地对其实施有序分解, 其结果清晰可辨. 其计算速度比 Mallat 算法快 1.057 倍.

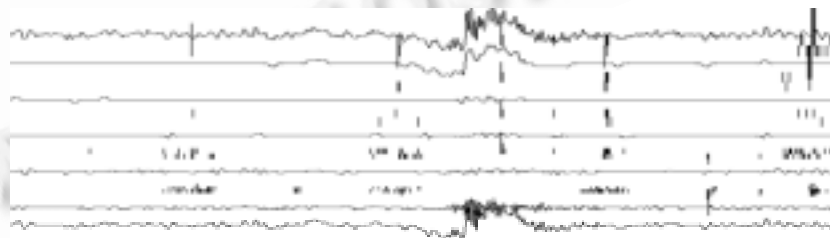


Fig.1 Brain signal processing of patient

图 1 病人脑电信号分析

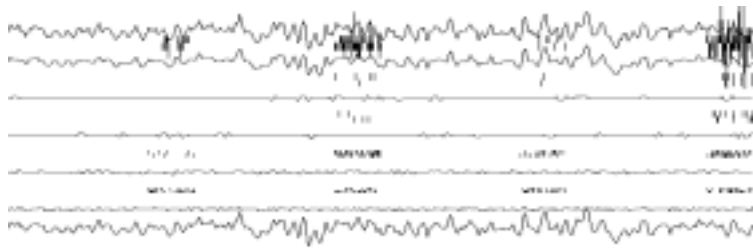


Fig.2 Brain signal processing of serious patient

图 2 严重脑故障病人信号分析

6 结 论

本文在对 Mallat 算法进行深入剖析的基础上,基于其基本思想和基本原理提出了一种新的小波变换加速算法.该算法比 Mallat 算法快 1 倍以上,其技巧和速度也优于著名的金字塔算法^[12]和文献[13]中提到的小波软件,效率高、效果好、自适应性和应用范围广,尤其适合图像、语音处理和海量数据压缩等许多方面,对电子签名和 CA 认证算法等研究有直接参考作用.

References:

- [1] Mallat, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989,11(7):674~693.
- [2] Li, Jian-ping. Wavelet Analysis & Signal Processing: Theory, Applications and Software Implementations. Chongqing: Chongqing Publishing House, 1997 (in Chinese).
- [3] Li, Jian-ping. Vector product wavelet transform. Computer Science, 2000,27(1):88~90 (in Chinese).
- [4] Li, Jian-ping. Analytic construction of wavelet filter coefficients. Computer Science, 2000,27(1):91~97 (in Chinese).
- [5] Li, Jian-ping. Wavelet Analysis & Signal Processing: Theory, Applications and Software Implementations. 2nd ed., Chongqing: Chongqing Publishing House, 2001 (in Chinese).
- [6] Li, Jian-ping, Tang, Yuan-yan. The Applications of Wavelet Analysis Method. Chongqing: Chongqing University Press, 1999 (in Chinese).
- [7] Li, Jian-ping. The up to the Minute Technology of Computer Network and Electronic Commerce: Theory on Vector Product Wavelet Transform. Chongqing: Chongqing Publishing House, 2001 (in Chinese).
- [8] Sun, Rong-hong, Li, Jian-ping. Introduction of Queue Theory. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese).
- [9] Li, Jian-ping. Solution of the mathematical model and identifiability of parameters for a double porosity medium system based on wavelet analysis. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2001,21(4):385~397 (in Chinese).
- [10] Li, Jian-ping. From Fourier analysis to wavelet analysis: recall and development. Computer Science, 1999,26(12):29~31 (in Chinese).
- [11] Li, Jian-ping. Construction of nontensor product spline wavelet basis of $L^2(\mathbb{R}^d)(d \geq 3)$ space. Computer Engineering and Science, 2000,22(1):76~78 (in Chinese).
- [12] Burt, P.J., Adelson, E. The Laplacian pyramid as a compact image code. IEEE Transactions on Communications, 1983,31(4):532~540.
- [13] Wickhauser, M.V. Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software. New York: SIAM, 1994. 1~473.

附中文参考文献:

- [2] 李建平.小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现.重庆:重庆出版社,1997.
- [3] 李建平.矢量积小波变换.计算机科学,2000,27(1):88~90.

- [4] 李建平. 矢量积小波变换. 计算机科学, 2000, 27(1): 91~97.
- [5] 李建平. 小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现. 第2版. 重庆: 重庆出版社, 2001.
- [6] 李建平, 唐远炎. 小波分析方法的应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1999.
- [7] 李建平. 计算机网络与电子贸易的最新技术——矢量积小波变换理论. 重庆: 重庆出版社, 2001.
- [8] 孙荣恒, 李建平. 排队论基础. 北京: 科学出版社, 2001.
- [9] 李建平. 基于小波分析的双重孔隙集层系统的数学模型求解与参数识别. 系统科学与数学, 2001, 21(4): 385~397.
- [10] 李建平. 从傅里叶分析到小波分析: 回顾与发展. 计算机科学, 1999, 26(12): 29~31.
- [11] 李建平. $L^2(\mathbb{R}^d)$ ($d \geq 3$) 空间非张量积样条小波基的构造. 计算机工程与科学, 2000, 22(1): 76~78.

An Accelerate Algorithm on Fast Wavelet Transform for Signal Processing*

LI Jian-ping¹, YAN Zhong-hong¹, ZHANG Wan-ping²

¹(International Centre for Wavelet Analysis and Its Applications, Logistical Engineering University, Chongqing 400016, China);

²(Department of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

E-mail: jpli2222@yahoo.com

http://202.202.48.111

Abstract: A method of analytic construction for wavelet filter coefficients is put forward, and the corresponding fast wavelet transform is set up. It is more oversimplified and more speedy than the famous Mallat algorithm. This method can be used adaptively to signal processing for choosing corresponding parameters of wavelet filter.

Key words: wavelet transform; filter; fast algorithm; accelerative way; signal processing

* Received November 6, 2000; accepted April 17, 2001

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 69903012; the Chongqing Development Foundation for Information Industry of China; the Science Foundation of Logistical Engineering University of China