

一种高精度估计的基础矩阵的线性算法*

陈泽志, 吴成柯

(西安电子科技大学 综合业务网国家重点实验室, 陕西 西安 710071)

E-mail: chenzezhi@263.net

http://www.xidian.edu.cn

摘要: 通过引入与余差有关的代价函数, 给出了一种高精度估计基础矩阵的线性算法——加权平移算法。首先将原始输入数据加权, 计算加权后数据的重心坐标, 将坐标原点平移到该重心坐标, 再作归一化处理。然后用 8 点算法求出基础矩阵 F 阵的 8 个参数, 实现了 F 阵的高精度估计。实验结果表明, 此算法具有良好的鲁棒性, 且余差和对极距离都小于其他线性算法, 提高了基础矩阵的精度。

关键词: 对极几何; 基础矩阵; 加权平移; 线性算法; 鲁棒性

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A

对极几何关系是对来自同一景物的两幅非定标图像(uncalibration)进行分析的基本工具。这一关系是可以从匹配点对中获得的惟一信息。对极几何关系可以用一个 3 阶的秩 2 矩阵——基础矩阵(F 阵)来表示, 它是匹配点对之间对应关系的数学表示, 包括了摄像机的所有内参和外参信息。因而, 对极几何问题就转化为对基础矩阵 F 的估计问题。对 F 阵的估计是三维重建、运动估计、像机定标(calibration)、匹配和跟踪的基础^[1-4]。对于已知 8 个或 8 个以上匹配点的情况, 经常引用的有效算法是 8 点算法^[5]和改进的 8 点算法^[6], 其优点在于它们都是易于实现的线性算法。但由于 8 点算法对噪声或错误数据(outliers)异常敏感, 因而使其使用范围受到限制; 改进的 8 点算法虽然在一定程度上消除了噪声的干扰, 但对极点的稳定性和 F 阵的精度需进一步研究。估计 F 阵常用的非线性算法有 M-估计法、最小中值法(least-median-of-squares, 简称 LmedS)、6 点综合算法和双对极约束算法^[7-12], 还可以利用交比计算^[13], 这些方法的共同点就是把问题最终归结为无约束最优化问题, 而当有噪声或错误数据存在时, 很难求出全局最优解。在改进的 8 点算法中, 当作规范化处理时, Hartley 认为每个匹配点对于 F 阵的影响都是相同的, 而实际上, 每个点的误差不同, 它们对 F 阵的影响是各不相同的。本文在 8 点算法的基础上, 引入了与余差和对极距离有关的函数作为权因子, 以排除噪声干扰, 尤其是错误数据(错误的位置或错误的匹配)的干扰, 提出了加权平移线性算法, 其主要思想是:

- (1) 使高精度的匹配点对求解 F 阵的影响大, 低精度的匹配点对求解 F 阵的影响小;
- (2) 由于在未进行加权归一化处理前, 基础矩阵中最重要的元素是那些具有最大相对扰动的元素, 而在对图像坐标加权归一化后, 所有的基础矩阵元素都被认为是近似相同的, 没有哪一个比其他更重要。匹配点集经加权归一化处理后, 使匹配点的 3 个坐标具有近似相同的数量级, 可以有效地改善基础矩阵的条件数, 从而提高基础矩阵的鲁棒性。

算法的主要步骤如下:(1) 计算权因子;(2) 将原始数据加权, 计算二维数据点的重心坐标, 将图像的坐标中心平移至该重心坐标;(3) 作归一化处理, 使匹配点的齐次坐标的 3 个分量具有相同的数量级;(4) 用 8 点算

* 收稿日期: 2000-06-19; 修改日期: 2000-10-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(69972039;60002007);香港研究基金委员会资助项目(CUHK4310/98E);中法先进研究计划项目(PRA SI 00-04)

作者简介: 陈泽志(1963 -),男,陕西石泉人,博士生,副教授,主要研究领域为计算机视觉,计算机图形学,计算机辅助几何设计,模式识别,人工智能;吴成柯(1938 -),男,安徽黄山人,教授,博士生导师,主要研究领域为图像通信,计算机视觉,多媒体移动通信。

法估计 F 阵的 8 个参数.大量实验结果表明,此方法不但大大提高了运算速度,而且进一步提高了 F 阵的精度.

1 引入权因子

对于从线性摄像机(针孔模型)获得同一景物的两幅非较正图像,它们之间的基本关系就是对极几何约束.我们知道,第 1 幅图像 I_1 上的每一点 m ,在第 2 幅图像上的对应点在其对应极线 l'_m 上,设 $m(x,y,1)^T$ 为 I_1 上的点,则由对极几何可知:它在 I_2 上的对极线方程由 $l'_m = Fm$ 给出,由于其对应点 $m'(x',y',1)^T$ 在 l'_m 上,因此有

$$m'^T Fm = 0, \tag{1}$$

3×3 矩阵 F 称为基础矩阵,其秩为 2.

如果 m_i, m'_i 是对应点,则 $m_i'^T Fm_i = 0$,由于噪声和错误数据的存在,在一般情况下, $m_i'^T Fm_i \neq 0$,因此定义余差

$$r_i = |m_i'^T Fm_i| \tag{2}$$

和对极距离

$$d_i = \left(\frac{1}{\sqrt{(Fm_i)_1^2 + (Fm_i)_2^2}} + \frac{1}{\sqrt{(F^T m'_i)_1^2 + (F^T m'_i)_2^2}} \right) |m_i'^T Fm_i|, \tag{3}$$

其中 $(Fm)_j (j=1,2)$ 是向量 Fm_i 的第 j 个分量.

设 m' 和 l'_m 分别是 m 的对应点和对极线(如图 1 所示),则由对极线方程可知:

$$|Pm'| = \frac{|m'^T Fm|}{|(Fm)_2|}, \quad |Qm'| = \frac{|m'^T Fm|}{|(Fm)_1|}, \tag{4}$$

其中 $(Fm)_j$ 是向量 Fm 的第 j 个分量. $|Pm'|$ 和 $|Qm'|$ 分别是 m' 在 x 和 y 方向上的余差.

记 $r_x = \frac{1}{|Qm'|}, r_y = \frac{1}{|Pm'|}$,由于随着匹配点精度的提高, r_i 将趋于零,因此 r_{x_i} 将趋于无穷大.为了保证算法的稳定性,取 10^5 为阈值, r_{x_i} 按下式取值:

$$r_{x_i} = \begin{cases} r_{x_i}, & r_{x_i} < 10^5, \\ 10^5, & \text{其他} \end{cases}$$

定义权因子如下(N 是匹配点数):

$$w_{x_i} = \frac{r_{x_i}}{\sum_{i=1}^N r_{x_i}} - \frac{1}{N}, \quad w_{y_i} = \frac{r_{y_i}}{\sum_{i=1}^N r_{y_i}} - \frac{1}{N}, \quad w'_{x_i} = \frac{r_{x'_i}}{\sum_{i=1}^N r_{x'_i}} - \frac{1}{N}, \quad w'_{y_i} = \frac{r_{y'_i}}{\sum_{i=1}^N r_{y'_i}} - \frac{1}{N}. \tag{5}$$

2 输入数据的加权平移归一化处理

首先,由式(5)求出各匹配点的权值 $w_{x_i}, w_{y_i}, w'_{x_i}, w'_{y_i}$,以其作为对应坐标在计算重心坐标时的影响因子,使高精度的匹配点比低精度的匹配点对重心坐标的影响要大,其结果使重心坐标向高精度匹配点密集的地方偏移,计算方法如下:

首先求出重心坐标:

$$\text{记 } P_{m_i} = \begin{bmatrix} 1+w_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1+w_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P'_{m'_i} = \begin{bmatrix} 1+w'_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1+w'_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{则} \tag{6}$$

$$m_{new_i} = P_{m_i} m_i, m'_{new_i} = P'_{m'_i} m'_i,$$

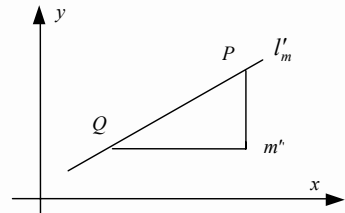


Fig.1 $Q'm$ and $P'm$ are the residual errors in x and y axes directions, respectively

图 1 $Q'm$ 和 $P'm$ 分别是在 x,y 方向上的余差

求出 m_{new}, m'_{new} 的重心坐标, 记为 (C_{mx}, C_{my}) 和 (C'_{mx}, C'_{my}) .

其次, 再按下述方法将图像坐标作归一化处理. 设:

$$T_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -C_{mx} \\ 0 & 1 & -C_{my} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{mx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{my}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -C'_{mx} \\ 0 & 1 & -C'_{my} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C'_{mx}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C'_{my}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

则

$$T_1 = T_{12}T_{11}, T_2 = T_{22}T_{21}, \quad (9)$$

$$\bar{m}_i = T_1 m_i, \bar{m}'_i = T_2 m'_i, \quad (10)$$

\bar{m}_i 和 \bar{m}'_i 是变换后的新坐标.

3 算法步骤

算法的主要步骤如下:

第 1 步. 用 8 点算法估计基础矩阵;

第 2 步. 计算权值 $w_{x_i}, w_{y_i}, w'_{x_i}, w'_{y_i}$;

第 3 步. 计算变换矩阵 T_1, T_2 , 将两幅图像的坐标原点分别移到 $o_1(C_{mx}, C_{my})$ 和 $o'_1(C'_{mx}, C'_{my})$ 并做归一化处理;

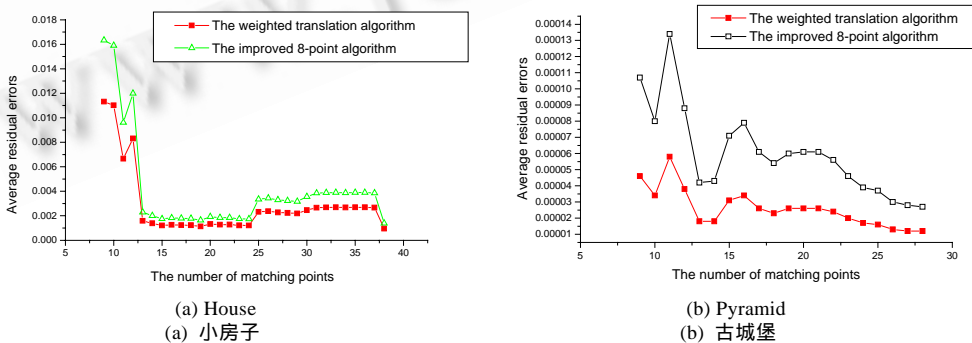
第 4 步. 以匹配点的新坐标为输入数据, 再利用 8 点算法求出基础矩阵 \bar{F} ;

第 5 步. 让 $F = T_2^T \bar{F} T_1$.

4 实验结果

4.1 真实图像数据的试验结果

图 2 给出了从不同视点获得的两个景物(小房子和古城堡)的 4 幅图像, 用加权平移算法和改进的 8 点算法进行实验的结果. 表 1 给出了 3 种线性算法对于真实图像的平均余差和平均对极距离的比较. 从图 2 和表 1 中我们可以看出, 加权平移化算法明显优于 8 点算法和改进的 8 点算法, F 阵的精度有较大提高.



平均余差, 匹配点数, 加权平移算法, 改进的八点算法.

Fig.2 The residual errors variation of real images

图 2 真实图像的余差的变化

Table 1 The comparison of estimation errors of the three algorithms with real images

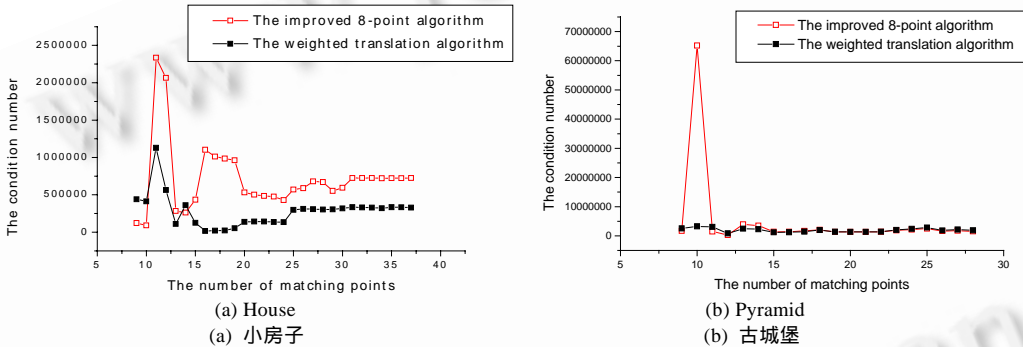
表1 3种算法对于真实图像的部分数据结果的比较

Algorithms	House (38 pairs of matching points)		Pyramid (28 pairs of matching points)	
	Average residual errors	Average epipolar distance	Average residual errors	Average epipolar distance
The 8-point algorithm	0.031 626	0.063 252	0.003 152	0.006 304
The improved 8-point algorithm	0.003 279	0.026 316	0.000 027	0.000 054
The weighted translation algorithm	0.000 960	0.001 919	0.000 012	0.000 023

算法, 小房子(38对匹配点), 古城堡(28对匹配点), 平均余差, 平均对极距离, 8点算法, 改进的8点算法, 加权平移算法.

为了定量地分析 F 阵的鲁棒性, 我们求出了 F 阵的条件数, 结果如图 3 所示. 图 3 给出了两幅真实图像的基础矩阵的条件数随匹配点的变化情况. 矩阵的条件数直接反映了矩阵的鲁棒性, 条件数越大, 对噪声越敏感. 从实验结果可以看出, 加权平移算法已明显地改善了 F 阵的条件数.

图 4 给出了实验所用的小房子(512×512)和古城堡(576×384)的 4 幅图像.



条件数.

Fig.3 The condition number of fundamental matrix

图 3 基础矩阵的条件数



Fig.4 The real images for experiment

图 4 实验所用的真实图像

4.2 模拟数据的实验结果

对于模拟数据, 我们还进一步求出了用加权平移算法估计出的对极点与理想对极点的欧氏距离. 我们采用的第 1 组数据, 左对极点的精确位置是(210.4, 202.0), 右对极点的精确位置是(209.32342, 202.070339), 当给模拟数据加上标准方差为 5.0 的高斯噪声时, 计算结果见表 2. 第 2 组数据, 左对极点的精确位置是(70.000, 140.000), 右对极点的精确位置是(16.171189, 142.110168), 当给模拟数据加上 5 个像素的均匀噪声时, 计算结果见表 3. 从模拟数据的试验结果来看, 无论是存在高斯噪声还是均匀噪声, 本文所给出的算法都能以

较高的精度获得对极点,其鲁棒性比改进的 8 点算法都有明显的改善.

Table 2 The comparison of the positions of the epipole for different algorithms (the first group)

表 2 各种算法计算的对极点位置的比较(第 1 组数据)

Algorithm	Left epipole	Right epipole	The distance between the real epipole and the estimating epipole	
			Left	Right
The improved 8-point algorithm	(210.419,196.353)	(206.486,201.046)	5.646	15
The weighted translation algorithm	(210.231,199.633)	(210.922,198.585)	Left	3.033
			Right	94
			Left	2.343
			Right	43
			3.834	76

左对极点, 右对极点, 真实对极点与所求对极点之间的距离, 左, 右.

Table 3 The comparison of the positions of the epipole for different algorithms (the second group)

表 3 各种算法计算的对极点位置的比较(第 2 组数据)

Algorithm	Left epipole	Right epipole	The distance between the real epipole and the estimating epipole	
			Left	Right
The improved 8-point algorithm	(102.09,196.232)	(45.603 5,179.985)	60.452	3
The weighted translation algorithm	(68.022 2,156.238)	(13.802 7,169.918)	Right	47.966
			Left	16.358
			Right	27.908
			8	

5 结 论

本文通过引入与余差有关的权因子,提出了加权平移线性算法,此方法具有明显的几何意义.大量的实验结果表明,本文所给方法在 F 阵的鲁棒性和精度两方面都大大优于 8 点算法,对于高精度的匹配点相对集中的数据,其效果尤为突出.从真实图像(小房子)的实验结果来看,加权平移算法的精度是传统的 8 点算法的 33 倍,是抗噪声能力较强的改进的 8 点算法的 3.4 倍.从古城堡的实验结果来看,加权平移算法的精度是传统的 8 点算法的 262.7 倍,是抗噪声能力较强的改进的 8 点算法的 2.25 倍.本算法的另一个优点在于,它是一个易于实现的线性算法,因而速度快,且避免了众多非线性算法的多解性,为高精度的估计基础矩阵提供了一个实用的方法.

致谢 感谢法国国立信息与自动化研究院 INRIA(National Research Institute of Information and Automation)提供的真实场景数据,同时感谢 TSUI Hung Tat 教授和 QUAN Long 博士的指导.

References:

- [1] Faugeras, O. Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint. Cambridge, MA: MIT Press, 1993.
- [2] Deriche, R., Zhang, Z., Luong, Q.T., *et al.* Robust recovery of the epipolar geometry for an uncalibrated stereo rig. In: Eklundh, O.J., ed. Proceedings of the 3rd European Conference on Computer Vision. Vols. 800~801 of Lecture Notes in Computer Science. Stockholm: Springer-Verlag, 1994. 567~576.
- [3] Faugeras, O. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig? In: Sandini, G., ed. Proceedings of the 2nd European Conference on Computer Vision. Vol.588 of Lecture Notes in Computer Science. Santa Margherita Ligure: Springer-Verlag, 1992. 563~578.
- [4] Quan, Long, Kanade, Takeo. Affine structure from line correspondences with uncalibrated affine cameras. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997,19(8):834~845.
- [5] Longuet-Higgins, H.C. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. Nature, 1981,293(9):133~135.
- [6] Richard, H.I. In defence of the 8-point algorithm. In: Grimson, E., ed. Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision. Cambridge: IEEE Computer Science Press, 1995. 1064~1070.
- [7] Zhang, Z., Deriche, R., Faugeras, O., *et al.* A robust technique for matching two uncalibrated images. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995,82(2):1129~1139.
- [8] Wang, W., Wu, Cheng-ke. Six-Point synthetic method to estimate fundamental matrix. Science in China (Series E), 1997,

27(2):165~170.

- [9] Chen, Ze-zhi, Shen, Pei-yi, Liu, Yong, *et al.* Two-Epipole constraint of estimating fundamental matrix and it's analyzing. In: Latecki, L.J., Melter, R.A., Mount, D.M., *et al.*, eds. Proceedings of the SPIE—The International Society for Optical Engineering, Vol 3811. Denver, Colorado: SPIE Press, 1999. 337~344.
- [10] Ma, Song-de, Zhang, Zheng-you. Computer Vision: Fundamentals of Computational Theory and Algorithms. Beijing: Science Press, 1998 (in Chinese).
- [11] Zhang, Zheng-you. Determining the epipolar geometry and its uncertainty: a review. International Journal of Computer Vision, 1998,27(2):161~195.
- [12] Chen, Ze-zhi, Wu, Cheng-ke, Shen, Pei-yi, *et al.* A robust algorithm to estimate the fundamental matrix. Pattern Recognition Letters, 2000,21:851~861.
- [13] Luong, Q.T., Faugeras, O.D. On the determination of epipoles using cross-ratios. Computer Vision and Image Understanding, 1998,71(1):1~18.

附中文参考文献:

- [10] 马颂德,张正友.计算机视觉——计算理论与算法基础.北京:科学出版社,1998.

A Linear Algorithm with High Accuracy for Estimating Fundamental Matrix*

CHEN Ze-zhi, WU Cheng-ke

(National Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

E-mail: chenzezhi@263.net

<http://www.xidian.edu.cn>

Abstract: In this paper, a cost function relative to residual errors is introduced, and a linear algorithm by exploiting the strategy of weighted translation transformation is presented. Firstly, the original input data is weighted and the centroid coordinates are calculated, and the origins of coordinates are translated to their centroids. Then, the matching points are normalized. Finally, the eight parameters of fundamental matrix (F -matrix) can be solved and the procedure of estimating the fundamental matrix with high accuracy can be achieved. Experimental results show that this algorithm performs very well in terms of robustness to outliers and noises. The algorithm is superior to other algorithms in residual errors and average epipolar distance and improves the accuracy of F -matrix.

Key words: epipolar geometry; fundamental matrix; weighted translation; linear algorithm; robustness

* Received June 19, 2000; accepted October 16, 2000

Supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant Nos.69972039, 60002007; Hong Kong Research Grants Council under Grant No.CUHK4310/98E; France-China Advanced Research Program under Grant No.PRA SI 00-04