

# 一类非线性细分格式的保凸与分形性质\*

丁友东<sup>1</sup> 华宣积<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(上海大学计算机学院 上海 200072)

<sup>2</sup>(复旦大学数学系 上海 200433)

E-mail: ydding@citiz.net

**摘要** 在分析 Dyn 等人的经典 4 点线性插值离散细分格式的基础上, 提出了一类函数型非线性离散细分格式, 它具有保凸性质, 即在满足一定条件时, 这种格式保证了对于凸数据, 其每一步细分多边形都是凸的, 从而极限曲线也是凸的, 数值例子说明, 在不光滑情况下, 这种格式会产生具有分形性质的曲线。

**关键词** 非线性, 细分格式, 保凸, 分形。

**中图法分类号** TP391

在 CAD/CG 领域, 曲线和曲面的生成是一个重要的研究方向, 因为曲线和曲面的最终形式是一组离散点, 在计算机终端上我们常用对离散点列进行分片线性插值的方式画出曲线和曲面。曲线和曲面设计的经典方法是, 先从控制点列得到曲线曲面的数学表达式(如 Bézier 方法), 然后用递归赋值算法进行赋值(如用 de Casteljau 算法), 即走离散到连续再到离散的路子, 这样做需要进行大量的计算。在应用上, 如果能从原始控制点列出发, 用不断细分的多边形或多边形网格在允许的误差范围内来代替曲线曲面, 则只需存储离散点列, 正好适合计算机存储和绘制曲线曲面的特点——从离散到离散, 无疑可以大大加快计算和生成显示的速度。离散细分算法——曲线、曲面的离散化造型方法, 是指根据初始数据由计算机直接生成曲线、曲面或其他几何形体的一类方法, 正好提供了这样一种快速生成曲线曲面的方法。1975 年前后, 随着 CAD/CAM 的蓬勃兴起, Chaikin<sup>[1]</sup>, Riesenfeld<sup>[2]</sup>等人发现了离散细分算法在光滑曲线曲面的快速生成上的应用而得到广泛注意。1987 年, 以色列的 Dyn<sup>[3]</sup>等人提出了经典的插值两步型四点细分格式, Cavaretta<sup>[4]</sup>等人在此基础上提出了一类较广泛的细分法——稳定细分法(stationary subdivision scheme), 因为其计算和实现简单而得到广泛讨论与应用<sup>[5~10]</sup>。近年来, 人们开始将此方法应用到计算机辅助设计和图形学(CAD/CG)领域中来<sup>[11, 12]</sup>。我们知道, Bézier 方法作为一种几何造型方法, 最大的优点就是它具有很好的保形性质, 即当给定的数据点为凸时, 相应定义的曲线也是凸的, 而这种方法的主要缺点之一是不具有插值性质, 即除了端点, 控制点一般不在曲线上。在几何造型的许多实际问题中, 我们都要处理保形性问题, 同时又希望具有较好的插值性质, 但在现有的线性稳定离散细分算法中, 保形性较难满足, 这主要是由于受线性权因子的限制。Le Mchaut<sup>[13]</sup>等人讨论了一类函数型散乱数据的保凸插值细分, Dyn<sup>[14]</sup>等人也提出了一种对参数型离散点列的保凸插值细分格式, 但这两类方法均须对每个细分点进行独立判断, 选择相应的参数, 虽然每步采用线性细分格式, 但总的格式不是稳定的, 即每步采用不同的线性权因子, 这样就需要花费大量的非计算时间。这里, 我们在分析 Dyn 等人的经典 4 点插值细分格式的基础上, 提出一类函数型非线性离散细分格式, 在一定的条件下, 这种格式保证了对于凸数据其每一步细分多边形都是凸的, 从而极限曲线也是凸的。有趣的是, 在不光滑条件下, 这种格式往往产生具有分形性质的曲线。

\* 本文研究得到国家自然科学基金(No. 69603009)、上海市博士后基金(No. KL28001)和上海市高校青年基金(No. B-54)资助。作者丁友东, 1967 年生, 博士, 副教授, 主要研究领域为计算机辅助几何设计, 计算机图形学, 计算机应用。华宣积, 1939 年生, 教授, 主要研究领域为计算几何, 应用几何。

本文通讯联系人: 丁友东, 上海 200072, 上海大学计算机学院

本文 2000-02-28 收到原稿, 2000 04 26 收到修改稿

### 1 非线性 4 点插值细分格式与保凸性

给定一组离散实数  $\{y_i \in \mathbb{R}; i = -2, -1, \dots, n+2\}$ , 记  $y_i^{(0)} = y_i, \forall i$ , 定义下面细分格式

$$\begin{cases} y_{2i}^{(k+1)} = y_i^{(k)}, & -1 \leq i \leq 2^k n + 1, \\ y_{2i+1}^{(k+1)} = \frac{1}{2} (y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}) + \frac{2\omega |\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| \cdot |\Delta^2 y_i^{(k)}|}{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| + |\Delta^2 y_i^{(k)}|}, & -1 \leq i \leq 2^k n, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $k=1, 2, \dots, \Delta^2 y_i^{(k)} = y_i^{(k)} - 2y_{i+1}^{(k-1)} + y_{i+2}^{(k-1)}, i \in \mathbb{Z}$  为二阶向前差分, 且规定式(1)第 2 式中分式的分母为 0 时, 该分式也为 0. 显然, 对任意  $k \geq 1$ , 我们可以从  $\{y_i^{(k)}\}$  得到新的一组离散实数  $\{y_i^{(k+1)}\}$ , 且数集  $\{y_i^{(k)}\} \subset \{y_i^{(k+1)}\}$ .

定义  $P^{(k)}$  为满足在参数  $2^{-k}i$  处取值  $y_i^{(k)}$ , 即  $P^{(k)}(2^{-k}i) = y_i^{(k)}, -1 \leq i \leq 2^k n + 1$  的分片线性插值多边形, 则我们要讨论的是当  $k \rightarrow \infty$  时, 多边形  $P^{(k)}$  的极限状态及其性质.

我们首先考虑收敛性, 从多边形曲线  $P^{(k)}$  的参数化及式(1), 我们有

$$\|P^{(k+1)}(t) - P^{(k)}(t)\|_\infty = \max |y_{2i+1}^{(k+1)} - (y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)})/2| = \max \left| \frac{2\omega |\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| \cdot |\Delta^2 y_i^{(k)}|}{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| + |\Delta^2 y_i^{(k)}|} \right| \leq 2|\omega| \max |\Delta^2 y_i^{(k)}|. \quad (2)$$

引理 1. 令  $\alpha = 4|\omega| + 1/2$ , 则有对任意  $k \geq 0, \max |\Delta^2 y_i^{(k+1)}| \leq \alpha \max |\Delta^2 y_i^{(k)}|$ .

证明: 由式(1), 我们有

$$\Delta^2 y_{2i}^{(k+1)} = y_{2i}^{(k+1)} - 2y_{2i+1}^{(k+1)} + y_{2i+2}^{(k+1)} = -4\omega \frac{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| \cdot |\Delta^2 y_i^{(k)}|}{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| + |\Delta^2 y_i^{(k)}|}, \quad (3)$$

$$\Delta^2 y_{2i+1}^{(k+1)} = y_{2i+1}^{(k+1)} + y_{2i+3}^{(k+1)} - 2y_{2i+2}^{(k+1)} = \frac{1}{2} \Delta^2 y_i^{(k)} + 2\omega \left\{ \frac{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| \cdot |\Delta^2 y_i^{(k)}|}{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| + |\Delta^2 y_i^{(k)}|} + \frac{|\Delta^2 y_i^{(k)}| \cdot |\Delta^2 y_{i+1}^{(k)}|}{|\Delta^2 y_i^{(k)}| + |\Delta^2 y_{i+1}^{(k)}|} \right\}, \quad (4)$$

所以,  $\max |\Delta^2 y_i^{(k+1)}| \leq \max \{4|\omega| + 1/2, 4|\omega|\} \cdot \max |\Delta^2 y_i^{(k)}| = \alpha \max |\Delta^2 y_i^{(k)}|$ . □

将引理 1 代入式(2), 就可得到

$$\|P^{(k+1)}(t) - P^{(k)}(t)\|_\infty \leq 2|\omega| \max |\Delta^2 y_i^{(k)}| \leq 2|\omega| \alpha \max |\Delta^2 y_i^{(k-1)}| \leq \dots \leq 2|\omega| \alpha^k \max |\Delta^2 y_i^{(0)}|, \quad (5)$$

即, 我们有以下定理

定理 2. 如果  $\alpha = 4|\omega| + 1/2 < 1$ , 即  $|\omega| < 1/8$ , 则由细分格式(1)定义的多边形曲线  $P^{(k)}$  一致收敛到一条在  $[0, n]$  上连续的曲线  $P(t)$ .

下面, 我们主要来讨论细分格式(1)的保凸性. 设  $\{y_i^{(k)}\}$  为一组凸数据, 即满足  $\Delta^2 y_i^{(k)} \geq 0, \forall i$ . 由引理 1 的式(3), 当  $\omega \leq 0$  时,  $\Delta^2 y_{2i}^{(k+1)} \geq 0$ . 又因为

$$0 \leq \frac{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| \cdot |\Delta^2 y_i^{(k)}|}{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}| + |\Delta^2 y_i^{(k)}|} \leq \min \{|\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}|, |\Delta^2 y_i^{(k)}|\}, \quad (6)$$

当  $-1/8 \leq \omega$  时, 由式(4),  $\Delta^2 y_{2i+1}^{(k+1)} \geq (1/2 + 4\omega) \Delta^2 y_i^{(k)} \geq 0$ , 所以有以下定理.

定理 3. 设  $\{y_i^{(k)}\}$  为一组凸数据, 即  $\Delta^2 y_i^{(k)} \geq 0, \forall i$ , 则当  $\omega \in [-1/8, 0^-]$  时, 由细分格式(1)生成的  $\{y_i^{(k+1)}\}$  也为一组凸数据, 即  $\Delta^2 y_i^{(k+1)} \geq 0, \forall i$ .

由定理 2 和定理 3, 我们可以得到定理 4.

定理 4. 设  $\{y_i^{(0)}\}$  为一组凸数据, 则当  $\omega \in [-1/8, 0^-]$  时, 对任意  $k \geq 0$ , 由细分格式(1)生成的多边形曲线  $P^{(k)}$  是一条满足单调递减性质, 即对任意  $t \in \mathbb{R}, P^{(k+1)}(t) \leq P^{(k)}(t)$  的凸多边形, 且多边形曲线  $P^{(k)}$  的极限为一条满足插值性质  $P(i) = y_i, \forall i$  的连续曲线  $P(t)$ .

证明: 由定理 2 和定理 3, 我们只需证单调递减性质. 而由多边形曲线  $P^{(k)}$  的定义, 在区间  $[2^{-k}i, 2^{-k}(i+1)]$  上,  $P^{(k)}$  为连接点  $(2^{-k}i, y_i^{(k)})$  和  $(2^{-k}(i+1), y_{i+1}^{(k)})$  的线段,  $P^{(k+1)}$  为连接点  $(2^{-k-1}2i, y_{2i}^{(k+1)}), (2^{-k-1}(2i+1), y_{2i+1}^{(k+1)})$  和  $(2^{-k-1}(2i+2), y_{2i+2}^{(k+1)})$  的折线段, 由细分格式(1), 我们只需证明点  $(2^{-k-1}(2i+1), y_{2i+1}^{(k+1)})$  在  $P^{(k)}$  的下方即可, 即要证明  $y_{2i+1}^{(k+1)} - (y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)})/2 \leq 0$ . 而由细分格式(1)及  $\omega \leq 0$ , 这是显然的. □

现在, 我们把细分格式(1)进行推广. 实际上, Dyn 的四点插值细分格式可以写成如下形式

$$\begin{cases} y_{2i}^{(k+1)} = y_i^{(k)}, \\ y_{2i+1}^{(k+1)} = \frac{1}{2} (y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}) + \frac{\omega}{2} (\Delta^2 y_i^{(k)} + \Delta^2 y_{i+1}^{(k)}). \end{cases} \quad (7)$$

其中格式第 2 项的后半部分为关于  $\Delta^2 y_i^{(k)}, \Delta^2 y_{i+1}^{(k)}$  的算术平均的  $\omega$  倍. 而我们前面讨论的细分格式(1)的第 2 项的后半部分为关于  $|\Delta^2 y_i^{(k)}|, |\Delta^2 y_{i+1}^{(k)}|$  的调和平均的  $\omega$  倍, 因此, 我们可以定义一类非线性离散细分格式:

$$\begin{cases} y_{2i}^{(k+1)} = y_i^{(k)}, \\ y_{2i+1}^{(k+1)} = \frac{1}{2}(y_i^{(k)} + y_{i+1}^{(k)}) + \omega F(\Delta^2 y_i^{(k)}, \Delta^2 y_{i+1}^{(k)}). \end{cases} \quad (8)$$

其中  $F(x, y)$  为  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  上的连续函数,  $\omega$  为任意实参数. 当  $F(x, y)$  取为关于  $x, y$  的算术平均时即为 Dyn 的四点格式, 当  $F(x, y)$  取为关于  $|x|, |y|$  的调和平均时即为前面讨论的非线性四点格式(1). 类似地, 定义  $P^{(k)}$  为满足在参数  $2^{-k}i$  处取值  $y_i^{(k)}$ , 即  $P^{(k)}(2^{-k}i) = y_i^{(k)}, -1 \leq i \leq 2^k n + 1$  的分片线性插值多边形曲线, 我们有以下定理.

**定理 5.** 如果存在正数  $\beta$ , 使得对任意  $x, y \in \mathbb{R}, |F(x, y)| \leq \beta \max(|x|, |y|)$ , 且  $\alpha = 2\beta|\omega| + 1/2 < 1$  (即  $|\omega| < 1/4\beta$ ), 则由细分格式(8)定义的多边形曲线  $P^{(k)}$  一致收敛到一条在  $[0, n]$  上连续的曲线.

证明: 类似于式(3)和式(4), 对于式(8), 我们有

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_{2i}^{(k+1)} &= y_{2i}^{(k+1)} + y_{2i+2}^{(k+1)} - 2y_{2i+1}^{(k+1)} = -2\omega F(\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}, \Delta^2 y_i^{(k)}), \\ \Delta^2 y_{2i+1}^{(k+1)} &= y_{2i+1}^{(k+1)} + y_{2i+3}^{(k+1)} - 2y_{2i+2}^{(k+1)} = \frac{1}{2}\Delta^2 y_i^{(k)} + \omega \{F(\Delta^2 y_{i-1}^{(k)}, \Delta^2 y_i^{(k)}) + F(\Delta^2 y_i^{(k)}, \Delta^2 y_{i+1}^{(k)})\}. \end{aligned}$$

由已知条件, 我们有

$$\max |\Delta^2 y_i^{(k+1)}| \leq \max(2\beta|\omega| + 1/2, 2\beta|\omega|) \cdot \max |\Delta^2 y_i^{(k)}| = \alpha \max |\Delta^2 y_i^{(k)}|,$$

所以, 同理有

$$\|P^{(k+1)}(t) - P^{(k)}(t)\|_\infty \leq 2|\omega| \max |\Delta^2 y_i^{(k)}| \leq 2|\omega| \alpha \max |\Delta^2 y_i^{(k-1)}| \leq \dots \leq 2|\omega| \alpha^k \max |\Delta^2 y_i^{(0)}|,$$

由于  $\alpha < 1$ , 定理得证. □

类似地, 我们可以证明以下定理:

**定理 6.** 设  $\{y_i^{(k)}\}$  为一组凸数据, 即  $\Delta^2 y_i^{(k)} \geq 0, \forall i$ , 如果存在正数  $\beta$ , 使得对任意  $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0, 0 \leq F(x, y) \leq \beta \min(x, y)$ , 则当  $1/2 + 2\beta\omega \geq 0$  (即  $\omega \geq -1/(4\beta)$ ) 时, 由细分格式(8)生成的  $\{y_i^{(k+1)}\}$  也为一组凸数据, 即  $\Delta^2 y_i^{(k+1)} \geq 0, \forall i$ .

**定理 7.** 设  $\{y_i^{(0)}\}$  为一组凸数据, 即  $\Delta^2 y_i^{(k)} \geq 0, \forall i$ , 如果存在正数  $\beta$ , 使得对任意  $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$ , 有  $0 \leq F(x, y) \leq \beta \min(x, y)$ , 则当  $\alpha = 2\beta|\omega| + 1/2 < 1$  (即  $|\omega| < 1/4\beta$ ) 时, 对任意  $k \geq 0$ , 由细分格式(8)生成的多边形曲线  $P^{(k)}$  是一条凸多边形, 且满足单调递减性质, 即  $P^{(k+1)}(t) \leq P^{(k)}(t)$ , 对任意  $t \in \mathbb{R}$ , 多边形曲线  $P^{(k)}$  的极限为一条满足插值性质  $P(i) = y_i, \forall i$ , 的连续曲线  $P(t)$ .

实际上, 函数  $F(x, y)$  除了可以取为关于  $x$  和  $y$  的算术平均和调和平均以外, 还有很多取法, 例如可取

$$\begin{aligned} F(x, y) &= |xy| / (a|x| + b|y|), a, b \geq 0, \\ F(x, y) &= (x^2 y + x y^2) / (ax^2 + by^2), a, b \geq 0. \end{aligned}$$

另外, 当定理的保凸条件没有满足时, 细分格式生成的极限曲线一般不具有保凸性质, 有趣的是, 当合适的参数被选取时, 极限曲线出现分形性质. 实际上, 这时的细分格式就像生成分形图形的生成元一样, 每进行一步细分就是生成元的一次递归, 反复递归生成复杂的具有分形结构的图形, 我们将对这种现象作进一步地研究.

## 2 数值算例

给定数据为  $y_{-2} = 16.0, y_{-1} = 9.00, y_0 = 4.00, y_1 = 1.00, y_2 = 0.00, y_3 = 1.00, y_4 = 4.00, y_5 = 9.00, y_6 = 16.0$ , 将数据代入细分格式(8)得到的极限曲线如图 1~6 所示, 其中图 1~3 用的是经典四点格式(即  $F(x, y)$  取算术平均), 图 1 所取参数满足保凸条件, 图 2 所取参数不满足保凸条件, 图 3 所取参数使得极限曲线具有分形结构, 图 4~6 用的是格式(1)(即  $F(x, y)$  取调和平均), 图 4 所取参数满足保凸条件, 图 5 所取参数不满足保凸条件, 图 3 所示的是具有分形结构的极限曲线.

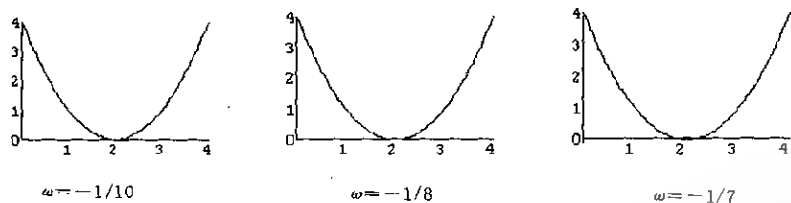


Fig. 1 Classical scheme, the preserving-convex conditions are satisfied

图 1 经典格式, 参数满足保凸条件

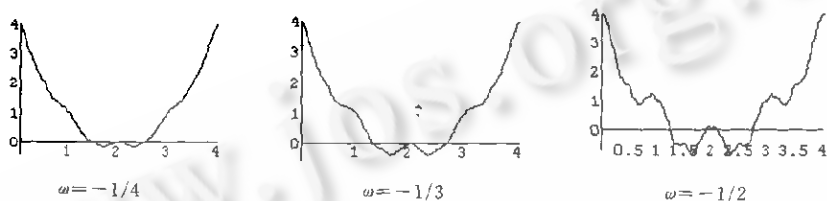


Fig. 2 Classical scheme, the preserving-convex conditions are not satisfied

图 2 经典格式, 参数不满足保凸条件

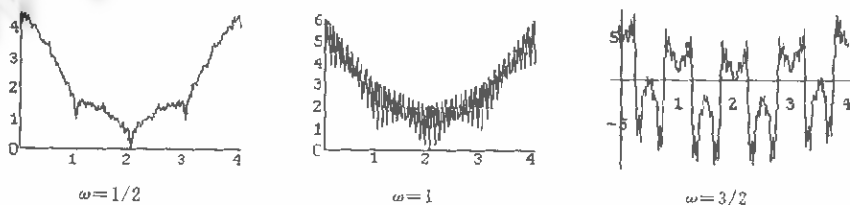


Fig. 3 Classical scheme, the limit curve is fractal-like

图 3 经典格式, 极限曲线具有分形结构

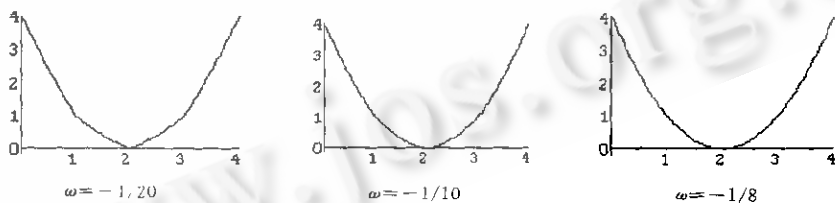


Fig. 4 Nonlinear scheme (1), the reserving-convex conditions are satisfied

图 4 非线性格式(1), 参数满足保凸条件

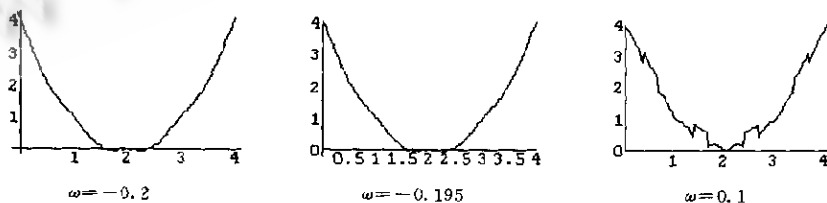


Fig. 5 Nonlinear scheme (2.1), the preserving-convex conditions are not satisfied

图 5 非线性格式(1), 参数不满足保凸条件

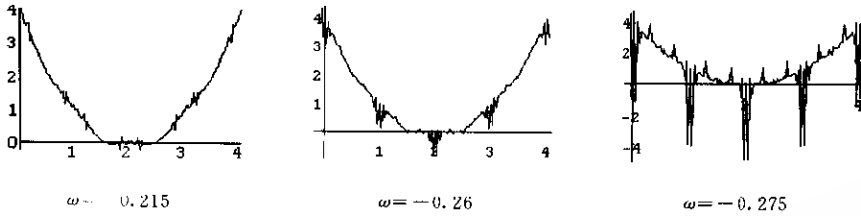


Fig. 6 Nonlinear scheme(1), the limit curve is fractal-like

图6 非线性格式(1),极限曲线具有分形结构

## 参考文献

- 1 Chaikin G M. An algorithm for high speed curve generation. *Computer Graphics & Image Processing*, 1974,3(3):346~349
- 2 Riesenfeld R F. On Chaikin algorithm. *Computer Graphics & Image Processing*, 1975,4(3):304~310
- 3 Dyn N, Levin D, Gregory J A. A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer-Aided Geometric Design*, 1987,4(3):257~268
- 4 Cararetta A S, Dahmen W, Micchelli C A. Stationary subdivision. *Memoirs of American Mathematical Society*, 1991,453(1):1~186
- 5 Cai Z J. Convergence, error estimation and some properties for four-point interpolation subdivision scheme. *Computer-Aided Geometric Design*, 1995,12(5):459~468
- 6 Cai Z J. Modified four-point scheme and its application. *Computer-Aided Geometric Design*, 1998,15(2):251~260
- 7 Dyn N, Levin D. Interpolating subdivision schemes for the generation of curves and surfaces. *International Series of Numerical Mathematics*, 1990,94(1):91~106
- 8 Dyn N, Levin D, Gregory J A. A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 1990,9(2):160~169
- 9 Zhu Song. 4-Point scheme—a method of discrete modeling [Ph.D. Thesis]. Institute of Mathematics, Fudan University, 1992  
(朱松. 四点法——一种离散造型方法[博士学位论文]. 复旦大学数学所, 1992)
- 10 Micchelli C A. Interpolatory subdivision schemes and wavelets. *Journal of Approximation Theory*, 1996,86(1):41~71
- 11 Ding Wei, Qi Dong-xu. Recursive Subdivision Algorithm for fractal generation and its application. *Journal of Image and Graphics of China*, 1998,3(2):123~128  
(丁玮, 齐东旭. 分形生成的递归细化算法及应用. *中国图象图形学报*, 1998,3(2):123~128)
- 12 Luo Yan-lin, Wang Guo-zhao. Subdivision method using in topography simulation. In: Fu Yu-xi ed. *Proceedings of the 7th National Conference of Young Computer Scientists of China*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Literature Press, 1998. 861~867  
(骆岩林, 汪国昭. 用于地形模拟的细分方法. In: 傅育熙主编, 第7届全国青年计算机学术会议论文集. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1998. 861~867)
- 13 Le Mehaute A, Utreras F. Convexity-Preserving interpolatory subdivision. *Computer-Aided Geometric Design*, 1994, 11:17~37
- 14 Dyn N, Levin D, Liu D. Interpolatory convexity-preserving subdivision schemes for curves and surfaces. *Computer-Aided Design*, 1992,24(3):211~216

## Preserving-Convexity and Fractal Properties of a Nonlinear Subdivision Scheme

DING You-dong<sup>1</sup> HUA Xuan-ji<sup>2</sup><sup>1</sup>(School of Computer Shanghai University Shanghai 200072)<sup>2</sup>(Department of Mathematics Fudan University Shanghai 200433)

**Abstract** Based on the analysis of the classical 4-point linear interpolatory subdivision scheme introduced by Dyn, a functional nonlinear discrete subdivision scheme is presented. This scheme has the preserving-convexity property, i. e., for any given convex discrete data, when some conditions are satisfied, the subdivision polygon curve produced in any step by this scheme is convex, so the limit curve is also convex. Some numerical examples show that the limit curves are fractal-like when the smooth condition is not satisfied.

**Key words** Nonlinear, subdivision scheme, preserving-convexity, fractal.