

三维空间中的最短路问题*

施海虎

(海信集团技术中心 青岛 266071)

(北京大学计算机科学与技术系 北京 100871)

摘要 在包含一组相互分离凸多面体的三维空间中为任意两点寻找最短路的问题是 NP 问题. 当凸多面体的个数 k 任意时, 它为指数时间复杂度; 而当 $k=1$ 时, 为 $O(n^2)$ (n 为凸多面体的顶点数). 文章主要研究了 $k=2$ 情形下的最短路问题, 提出一个在 $O(n^2)$ 时间内解决该问题的算法. 所得结果大大优于此情形下迄今为止最好的结果—— $O(n^3 \log n)$. 另外, 将此结果应用到 $k>2$ 的情形后, 获得的结果为 $O(\sum 12^{i-1} n_i^2)$.

关键词 最短路, 凸多面体, 计算几何, 测地线, Voronoi 图.

中图法分类号 TP301

近年来, 最短路问题作为运动规划的基本问题之一. 在机器人、野外航行、工业自动化和计算机动画等领域中越来越受到人们的关注. 通常, 在包含一组已知障碍物的环境中为一个给定智能系统寻找最优避障路径是相当困难的. 但是, 当将障碍物看成凸多面体、将智能系统看成移动点时, 最短路问题就变成可解的了.

对于二维空间中的最短路问题, 采用可视图的办法可以在 $O(n^2)$ 时间内计算出最短路^[1]; 在三维空间中, 求解该问题则变得十分困难. 在包含一组相互分离凸多面体的三维空间中为任意两点寻找最短路的问题是个 NP 问题^[2]. 当 k 任意时, 指数时间复杂度是最好的结果^[3]; 当 k 固定时, 该问题就简单了. 文献[4]对 $k=1$ 时的问题最早进行研究, 并给出 $O(n^3 \log n)$ 的算法. 后来, 这个结果被文献[5]改进到 $O(n^2)$; 对于 $k=2$ 和 $k>2$ 的情形, 目前最好的结果仍为 $O(n^3 \log n)$ ^[6] 和 $O(n^4)$ ^[7].

在本文中, 我们将文献[1]的技术推广到 $k=2$ 的情形, 提出一个在 $O(n^2)$ 时间内解决该问题的算法. 本文第 1 节简要介绍 $k=1$ 情况下的最短路问题, 第 2 节重点介绍我们在 $k=2$ 情况下的工作, 最后给出几个重要结果 (包括 $k>2$ 的情况).

1 单个凸多面体表面上的最短路问题

设 P 是一个给定的凸多面体, S 是 P 的表面, n 为 P 的顶点数, 我们用 n 表示 P 的复杂度. 单个凸多面体表面上的最短路问题, 即给定始点 $X \in S$, 对于任意点 $Y \in S$, 要求计算沿 S 从 X 到 Y 的最短路.

为了处理问题方便起见, 需要将 S 进行三角剖分, 得到一个新的凸多面体 P' , 使 X 也成为 P' 的顶点, 这个过程的时间复杂度为 $O(n \log n)$ ^[8]. 另外, P' 的复杂度不变, 即 P 的顶点数为 $O(n)$.

本文使用如下定义.

(1) 点 $Y \in S$ 被称为 ridge 点 (相对于给定的始点 X), 如果在 S 上至少存在两条从 X 到 Y 的最短路. 我们用 R 表示 S 上所有 ridge 点的集合.

(2) 对于任意点 $Y \in S - R$, $\Pi(X, Y)$ (简记为 $\Pi(Y)$) 表示从 X 到 Y 的唯一最短路.

(3) 序列 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 表示 $\Pi(Y)$ 沿 S 穿过的边所构成的边序列; $f = (f_0, \dots, f_m)$ 表示 $\Pi(Y)$ 沿 S 穿过的

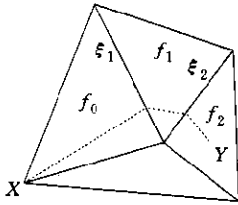
* 本文研究得到国家自然科学基金、国家 863 高科技项目基金和中国科学院院长特别基金资助. 作者施海虎, 1969 年生, 博士后, 讲师, 主要研究领域为人工智能, 知识工程, 计算机动画, 软件工程, CAI.

本文通讯联系人: 施海虎, 青岛 266071, 青岛市江西路 11 号海信集团技术中心

本文 1997-11-11 收到原稿, 1998-07-20 收到修改稿

面所构成的面序列, 其中 $\xi_i = f_{i-1} \cap f_i, i = 1, \dots, m; X \in f_0, Y \in f_m$ (如图 1 所示).

(4) 给定 $\Pi(Y)$ 的边序列和面序列, 可以将 f_0, \dots, f_m 展开到同一个平面 L 中. 其具体做法可通过一个循环过程来描述. 首先将面 f_0 放在 L 中, 使 X 与初始位置一致; 假设我们已经将 f_0, \dots, f_{i-1} 展开, 并且都放入 L 中, 那么可以沿着 ξ_i 将 f_i 展开, 使之与 f_{i-1} 同面, 这时, f_i 也处于 L 中, 并且处于 ξ_i 的另一边. 我们称 L 为 ξ 的展开平面, 并记 X, Y, ξ, f 在 L 中的映射为 X', Y', ξ', f' (如图 2 所示).



$\xi = \{\xi_1, \xi_2\}$ $f = \{f_0, f_1, f_2\}$

图1 单个凸多面体上最短路的边、面序列

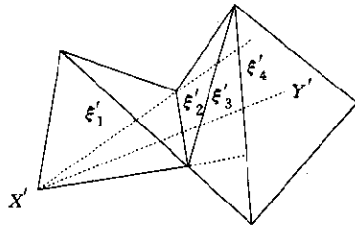


图2 ξ 的展开平面及影子的说明

(5) 影子 $shadow(X', \xi'_i, \xi'_{i+1})$, 即在 L 上, ξ'_i 以 X' 为源点在 ξ'_{i+1} 上的影子 (如图 2 所示).

当 $i=0$ 时, $shadow(X', \Phi, \xi'_1) = \{Y' | Y' \in \xi'_1\}$, 其中 Φ 表示空集合;

当 $0 < i < m$ 时, $shadow(X', \xi'_i, \xi'_{i+1}) = \{Y' | Y' \in \xi'_{i+1}, \text{并且直线段 } X'Y' \text{ 依次与 } \xi'_1, \dots, \xi'_i \text{ 相交}\}$.

我们将 $shadow(X', \xi'_i, \xi'_{i+1})$ 在 S 上的映射 $shadow(X, \xi'_i, \xi'_{i+1})$ 称为 ξ'_i 以 X 为源点在 ξ'_{i+1} 上的影子.

(6) 影子 $shadow(X', \xi'_i, f'_i)$, 即在 L 上, ξ'_i 以 X' 为源点在 f'_i 上的影子 (参见图 2).

当 $i=0$ 时, $shadow(X', \Phi, f'_0) = \{Y' | Y' \in f'_0\}$, 其中 Φ 表示空集合;

当 $0 < i < m$ 时, $shadow(X', \xi'_i, f'_i) = \{Y' | Y' \in f'_i, Y' \in \xi'_i, \text{并且直线段 } X'Y' \text{ 依次与 } \xi'_1, \dots, \xi'_i \text{ 相交}\}$.

我们将 $shadow(X', \xi'_i, f'_i)$ 在 S 上的映射 $shadow(X, \xi'_i, f'_i)$ 称为 ξ'_i 以 X 为源点在 f'_i 上的影子. 注意, $shadow(X, \xi'_i, \xi'_{i+1}) = shadow(X, \xi'_i, f'_i) \cap \xi'_{i+1}$, 并且影子可能为空.

这里列出单个凸多面体表面上最短路的若干拓扑特性^[4]:

- (1) 最短路不会通过 P 的顶点 (始点或终点为顶点的情况除外);
- (2) 最短路与 P 的每条边 (或每个面) 的交点 (或交线) 最多不超过 1 个 (或 1 条);
- (3) 最短路不会自我相交;
- (4) 任何两条具有相同始点的最短路, 要么互不相交, 要么其中的某条是另一条的子路;
- (5) 在凸多面体表面任意两点之间一定存在测地线, 连接这两点之间的最短路是测地线;
- (6) 如果测地线与边序列相交, 那么此测地线在 ξ 的展开平面上是一根直线段.

计算 $\Pi(Y)$ 的问题可分解成下面两个子问题, 即求解了这两个子问题, 等价于求解了最短路问题:

- (1) 求 $\Pi(Y)$ 的边序列 ξ ;
- (2) 计算 $\Pi(Y)$ 与 ξ 中各条边的交点.

根据测地线的展开性, 第 2 个子问题容易解决. 而解决第 1 个子问题的一般方法是: 给定 X , 希望对 P 进行预处理后, 对于任意目标点 Y , 能够快速计算出从 X 到 Y 的最短路. 通常, 预处理所需要的时间决定了最短路问题的时间复杂度. 文献[1]用序列树 (sequence tree) 的方法来解决找 ξ 的问题, 并提出“一个角一个分叉”算法来构造序列树, 用该算法生成的序列树的层数为 n , 并且每一层的宽度为 $O(n)$. 该算法的主要思路是: 给定凸多面体 P 及其表面 S , 对于 S 上的始点 X , 求沿 S 从 X 到任意点 $Y \in S$ 的最短路. 首先, 构造 X 的序列树, 序列树的根结点为 X , 非根结点为具有相同最短路边序列的点集; 其次, 从序列树上找出 Y 所对应的结点, 则由从该结点出发到根结点的所有边构成的序列即为 X 到 Y 最短路的边序列; 最后, 根据测地线性质的, 求出最短路与该边序列中各条边的交点.

2 两个凸多面体间的最短路问题

给定两个相互分离且悬空的凸多面体 P_1, P_2 , 它们的表面和顶点数分别为 S_1, S_2 和 n_1, n_2 ; 并给定 $X \in S_1$, 对

于任意点 $Y \in S_2$, 要求计算沿 S_1 和 S_2 从 X 到 Y 的最短路 $\Pi(Y)$. 下面针对该问题进行讨论.

两个凸多面体间的最短路具有如下拓扑特性^[5,6]:

(1) 最短路包含 3 个子段: 沿 S_1 从 X 到“起飞点” $t \in S_1$ 的最短路、从 t 到“着落点” $l \in S_2$ 的直线段以及沿 S_2 从 l 到 Y 的最短路(如图 3 所示).

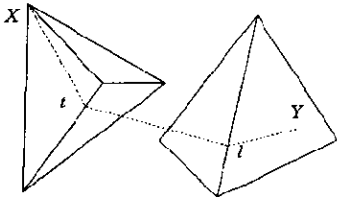


图3 两个凸多面体间的最短路

(2) 若 X 与 l 可视(两点可视, 即它们的连线与 P_1, P_2 的内部无任何交点), 则 $t=X$; 若 t 与 Y 可视, 则 $l=Y$; 除非 $t=X$ (或 $l=Y$), 否则 t (或 l) 处于对应多面体表面的边上.

(3) 最短路不会经过 S_1, S_2 上的任何顶点 (X, Y 本身是多面体顶点和 X 与 Y 可视这两种情况除外).

在最短路的 3 段子路中, 第 2 段为直线段, 第 1、3 段属于单个凸多面体情形, 可使用文献[5]的算法来计算. 因此, 两个凸多面体间的最短路问题可归结为找起飞点和着落点的问题. 设最短路所经过的边序列为

$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1+m_2})$, 其中 $\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1} \in S_1, \zeta_{m_1+1}, \dots, \zeta_{m_1+m_2} \in S_2, t \in \zeta_{m_1}, l \in \zeta_{m_1+1}$, 则该最短路问题又可分为下面两个子问题:

- (1) 找起飞点 t 和着落点 l 所在的边 $\zeta_{m_1}, \zeta_{m_1+1}$;
- (2) 找起飞点 t 和着落点 l .

根据文献[6]中关于两条边可视的定义可得:

- (1) 设点 $X \in S_1$ 与边 $\xi_1 \in S_2$ 可视, 那么, ξ_1 最多可分成两段, 使其中的某段与 X 可视, 而另一段与 X 不可视;
- (2) 设边 $\xi_1 \in S_1$ 与 $\xi_2 \in S_2$ 可视, 那么, ξ_1 最多可分成 3 段, 使其中的某段与 ξ_2 不可视, 而另两段与 ξ_2 可视. 对于 ξ_2 亦然.

为了便于讨论, 我们将半平面记为 $f(l)$, 其中 l 为半平面的边; 将半平面 $f(l)$ 的补记为 $f^*(l)$, 它也是一个半平面, 与 $f(l)$ 位于同一个平面上, 边相同, 但方向相反; 将三角面记为 $f_{ABC}(BC)$ (简记为 $f(BC)$).

两个平行半平面上两点间的最短路问题: 即设半平面 $f(l_1)$ 与 $f(l_2)$ 相互平行, 并且互不相交, 并设点 $X \in f(l_1), Y \in f(l_2)$, 要求计算从 X 到 Y 依次经过 l_1, l_2 的最短路. 因为在 $X \in l_1$, 两个半平面同面以及 l_1 与 l_2 平行这 3 种情形下的最短路问题容易求解, 所以在以后的讨论中假定 X, Y 不在半平面的边上, 两个半平面不同面, 并且它们的边不平行.

作为预备性知识, 这里先给出若干性质.

定理 1. 给定平面 L 以及直线 l_1, l_2 , 它们满足:

- (1) $l_1 \in L$;
- (2) $l_2 \notin L$, 但与 L 平行;
- (3) l_1 与 l_2 既不平行, 又不垂直.

那么, 点 $X \in l_2$ 以 l_1 为轴旋转后与 L 相交于点 X_1, X_2 , 当 X 遍历 l_2 上所有点时, 其对应的所有 X_1, X_2 所构成的轨迹为双曲线.

证明: 略.

双曲线具有如下性质:

定理 2. 设 W 为双曲线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 (x > 0)$; 对于任意点 $x < 0$, 从 x 出发的任意两条射线最多将 W 分割成 5 段, 而这两条射线之间最多包含 3 条曲线段.

证明: 略.

在后面的讨论中, 假定两条射线之间只有 1 条曲线段, 即从 X 出发的每条射线最多只与双曲线相交于一点. 对于包含 3 条曲线段的情况, 只要将下面的过程重复 3 次即可讨论完毕.

根据定理 1 和定理 2 可得:

定理 3. 对于两个平行半平面间的最短路问题, 设 X 到 Y 的最短路与 l_1, l_2 的交点为 A, B , 并设以 l_1 为轴, l_2 的旋转轨迹与 $f^*(l_1)$ 的交线为 W_2 ; 以 l_2 为轴, l_1 的旋转轨迹与 $f^*(l_2)$ 的交线为 W_1 ; 点 A 绕 l_2 旋转后与 W_1 相交

于 A' ; 点 B 绕 l_1 旋转后与 W_2 相交于 B' , 则在包含 $f(l_1)$ 的平面 L_1 内, X, A, B' 三点共线; 在包含 $f(l_2)$ 的平面 L_2 内, A', B, Y 三点共线 (如图 4 所示).

证明: 根据单个凸多面体最短路的特性(6)即可证明.

根据定理 3 可得:

定理 4. 对于两个平行半平面间的最短路问题, 设 $Y_1, Y_2 \in f(l_2)$ ($Y_1 \neq Y_2$), X 到 Y_1 (Y_2) 的最短路与 l_1, l_2 的交点分别为 A_1, B_1 (A_2, B_2); 并设以 l_1 为轴, l_2 的旋转轨迹与 $f^*(l_1)$ 的交线为 W_2 ; 以 l_2 为轴, l_1 的旋转轨迹与 $f^*(l_2)$ 的交线为 W_1 ; 点 A_1, A_2 绕 l_2 旋转后与 W_1 相交于 A'_1, A'_2 ; 点 B_1, B_2 绕 l_1 旋转后与 W_2 相交于 B'_1, B'_2 ; 设 $f(l_1) \in L_1, f(l_2) \in L_2$ (如图 5(a) 所示), 则在 L_2 内, $A'_1 Y_1$ 与 $A'_2 Y_2$ 互不相交.

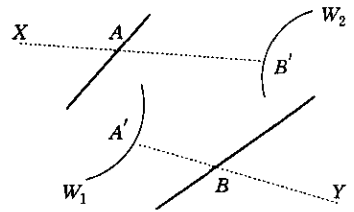


图4 三点共线定理

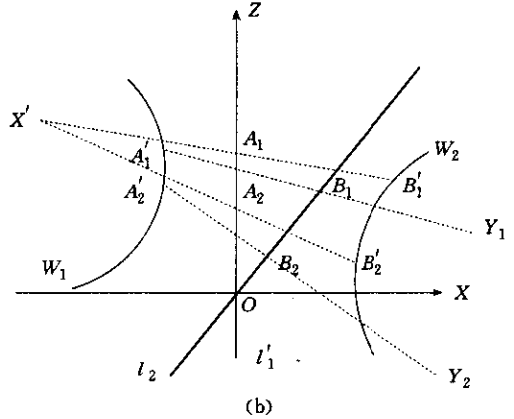
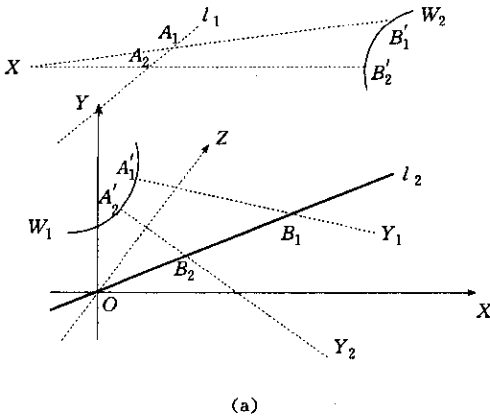


图5 不相交定理

证明: 设 l_1 与 l_2 的公垂线 l 与 l_2 相交于 O , 过 O 在平面 L_2 上作 l_1 的平行线 l'_1 , 以公垂线 l 为 Y 轴, l'_1 为 Z 轴, 过 O 垂直于 l_1, l'_1 的直线为 X 轴建立右手直角坐标系, 设 l'_1 与 l_2 的夹角为 α , 并将 X , 曲线 W_2 垂直投影到 L_2 上, 得到如图 5(b) 所示的投影图. 于是, 在平面 (X - Z 坐标系) 中, l'_1, l_2, W_1, W_2 的方程分别为:

$$\begin{aligned}
 l'_1: & x=0, \\
 l_2: & x=\operatorname{tg}\alpha \cdot z, \\
 W_1: & (\operatorname{tg}^2\alpha-1) \cdot x^2+2\operatorname{tg}\alpha \cdot xz+a^2=0(x<0), \\
 W_2: & x=(a^2+\operatorname{tg}^2\alpha \cdot z^2)^{1/2},
 \end{aligned}$$

其中 a 为直线 l_1, l_2 间的距离. 很显然, W_1 (W_2) 上的点与 l_2 (l'_1) 上的点一一对应.

设 $A_1, A_2, B_1, B_2, A'_1, A'_2, B'_1, B'_2$ 的坐标分别为

$$(z_1, x_1), (z_2, x_2), (z_3, x_3), (z_4, x_4), (z_5, x_5), (z_6, x_6), (z_7, x_7), (z_8, x_8).$$

根据前面的假设, 从 X 出发的每条射线最多只与 W_2 相交于 1 点, 那么 A_1 与 B'_1 一一对应, 即 A_1 与 B_1 一一对应. 同理可得 A_2 与 B_2 一一对应. 因此, 假设 $z_1 < z_2$, 那么可得 $z_3 < z_4, z_5 < z_6, z_7 < z_8$.

(1) 若 $A'_1 B_1$ 与 $A'_2 B_2$ 相交, 则 $A_1 B'_1$ 与 $A_2 B'_2$ 相交, 这与 $A_1 B'_1, A_2 B'_2$ 是从 X 出发的两条射线上的两条线段矛盾.

(2) 若 $B_1 Y_1$ 与 $B_2 Y_2$ 相交于 D , 那么从 X 到 D 存在两条最短路, 这与最短路的唯一性矛盾.

上述两点证明了线段 $A'_1 Y_1$ 与 $A'_2 Y_2$ 要么重合, 要么互不相交. □

在两个平行半平面间的最短路问题中, 如果存在线段 $\xi_1 \in l_1, \xi_2 \in l_2$, 那么最短路与 l_1, l_2 的交点可能会落在 ξ_1, ξ_2 的端点之外. 在这种情况下, 如果要求最短路必须经过线段 ξ_1, ξ_2 , 那么最短路将不得经过线段的端点位置. 此时, 如果最短路必须通过的端点已知, 那么上述的最短路问题可分解成若干个子问题, 其中的每个子问题都是计算两点间的最短路问题, 而根据前面的分析, 这些子问题都可以用很简单的算法计算出来. 由此可引出下

面的问题。

两个平行三角面间的最短路问题:给定平行且互不相交的两个三角面 $f_{ABC}(BC), f_{DEF}(EF)$,要求计算从 A 到 D ,并依次经过 BC, EF 的最短路。

很显然,最短路 $\Pi(A, D)$ 极有可能经过线段 BC, EF 的端点。若 $\Pi(A, D)$ 经过线段的端点(不失一般性,设该端点为 B),则 $\Pi(A, D)$ 可分解为 $\Pi(A, B)$ 与 $\Pi(B, D)$ 。根据前面的讨论, $\Pi(A, B)$ 与 $\Pi(B, D)$ 的计算相当简单,因此可得下面的结论:经过端点的最短路的计算是相当简单的。下面假定最短路不经过线段端点。

类似于两平行半平面间的最短路问题的讨论,可得:

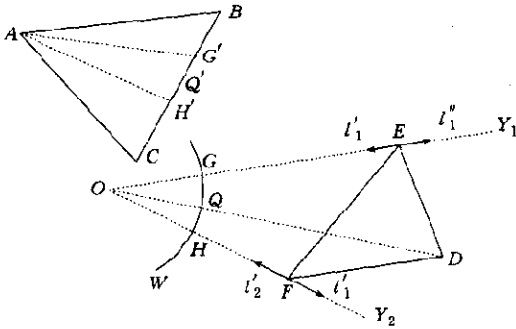


图6 定理5的说明

定理 5. 如图 6 所示,设三角面 $f_{ABC}(BC) \in L_1, f_{DEF}(EF) \in L_2, W$ 为 BC 绕 EF 旋转后在 L_2 上的轨迹, A 到 E, F 的最短路与 BC 的交点分别为 G', H' , 而 G', H' 在 W 上的对应点为 G, H, l_1 和 l_2 为分别通过点 E, G 和 F, H 的直线;并设从 A 到 D 的最短路为 $\Pi(A, D)$, 那么:

- (1) l_1 与 l_2 相交于点 O , 并且 O 在线段 FH 之外;
- (2) 若线段 OD 与 EF 相交(不包括端点 E, F), 则 $\Pi(A, D)$ 与 EF 相交且不交于端点; 否则, $\Pi(A, D)$ 与端点 E 或 F 相交。

证明: 设 l'_1 和 l''_1 为以 E 为源点、分别与矢量 EG 和 GE 同方向的射线; l'_2 和 l''_2 为以 F 为源点、分别与矢量 FH 和 HF 同方向的射线; 并设 $\Pi(A, D)$ 与 BC 的交点为 Q' , Q' 在 W 上的对应点为 Q , 则:

(1) 取任意点 $Y_1 \in l'_1$ 和 $Y_2 \in l''_1$, 则根据定理 4, 线段 GY_1 与 HY_2 互不相交, 从而可得 l_1 与 l_2 要么平行, 要么相交于 FH 之外的点。若 l_1 与 l_2 平行, 显然 W 与 EF 平行, 即 BC 与 EF 平行, 这与假设矛盾, 从而证明了定理的第 1 部分。

(2) 若 D 在由线段 EF 和射线 l''_1, l''_2 射线所构成的区域内(不包括 l''_1, l''_2 上的点), 则 $\Pi(A, D)$ 与 BC, EF 的交点肯定在线段 $G'H', EF$ 内; 否则, 若 Q 落在曲线段 GH 之外, 显然线段 QD 与 HF 或 GE 相交, 这与定理 4 矛盾。

同理可证, 若 D 在 EF, l''_1 和 l''_2 所构成的区域之外(包括 l''_1 和 l''_2 上的点), 则 $\Pi(A, D)$ 与 EF 的交点为 E 或 F 。 □

注意, 在图 6 中, $\Pi(A, D)$ 的长度为 $|AQ'| + |QD|$; 并且沿 DQ 方向, DQ 的延长线不一定经过点 O 。

因为可将 $X, \zeta_1, \dots, \zeta_{m_1}$ 与 $\zeta_{m_1+1}, \dots, \zeta_{m_1+m_2}, Y$ 分别展开到平面 L_1 与 L_2 上, 所以两个凸多面体间的最短路问题可描述为求从 $X \in L_1$ 到 $Y \in L_2$, 依次经过线段 $\zeta_{m_1}, \zeta_{m_1+1}$ 的最短路问题。若将 $X(Y)$ 与 $\zeta_{m_1}(\zeta_{m_1+1})$ 的两端点相连构成三角形, 则该最短路问题又可描述为求两平行三角形 $f(\zeta_{m_1})$ 与 $f(\zeta_{m_1+1})$ 间的最短路问题。

定理 4 和定理 5 说明, 两个凸多面体间的最短路问题可归结为两个平行三角形间的最短路问题, 即只要找到 t 与 l 所在的边(根据文献[5], 从序列树中找出 Y 所在的结点, 即找到了最短路的路径序列, 也即找到了 ζ_{m_1} 与 ζ_{m_1+1}), 就能在常数时间内求出 t 与 l 。参见定理 3 和图 4, 根据 ζ_{m_1} 与 ζ_{m_1+1} 求解 t 与 l 的算法可简单描述如下: 根据测地线的展开性, 由于 X', A, B' 三点成直线, A', B, Y 三点成直线, 解由两个直线方程构成的方程组即可求出 A, B 。

根据两条边可视性质的讨论, ζ_{m_1} (起飞点 t 所在的边) 与 ζ_{m_1+1} (着落点 l 所在的边) 最多可分为 3 个子段, 其中, ζ_{m_1} 上的两个子段(不妨设为 $seg_1(t), seg_2(t)$) 与 ζ_{m_1+1} 上的两个子段(不妨设为 $seg_1(l), seg_2(l)$) 两两可视。根据定理 2, $seg_1(t)$ 以 S 为源点在 $seg_1(l)$ 和 $seg_2(l)$ 上的投影最多各有 3 个子段, 即 $seg_1(t)$ 在 ζ_{m_1+1} 上的投影最多只有 6 个子段; 同理, $seg_2(t)$ 在 ζ_{m_1+1} 上的投影也最多只有 6 个子段。所以, ζ_{m_1} 以 S 为源点在 ζ_{m_1+1} 上的投影最多只有 12 个子段, 从而可得如下性质。

性质 1. ζ_{m_1} 在 ζ_{m_1+1} 上的影子最多只有 12 个子段。

3 结 论

将上面的性质应用到文献[5]的算法中,则该算法生成的序列树的层数为 n_1+n_2 ,在第 1 层与第 n_1 之间,树的宽度为 $O(n_1)$;在第 n_1+1 层至第 n_1+n_2 层之间,树的宽度为 $O(12n_2)$,由此可得如下结论.

定理 6. 给定两个凸多面体 P_1, P_2 , 它们的表面为 S_1, S_2 , 顶点数为 n_1, n_2 ; 并给定点 $X \in S_1$, 要求计算从 X 出发, 沿 S_1, S_2 到任意点 $Y \in S_2$ 的最短路. 此问题的解的时间复杂度为 $O(n_1^2+12n_2^2)$.

将此结果应用到给定固定数目的凸多面体中, 则可以得到下面的结论:

定理 7. 给定 k 个凸多面体 P_1, \dots, P_k , 设它们的表面为 S_1, \dots, S_k , 顶点数为 n_1, \dots, n_k , 并给定点 $X \in S_1$, 要求计算从 X 出发, 依次经过 S_1, \dots, S_k 到任意点 $Y \in S_k$ 的最短路. 此问题的解的时间复杂度为 $O(\sum 12^{i-1}n_i^2)$.

致谢 本文的主要研究工作在中国科学院数学研究所完成, 在此感谢各位领导和同志所给予的支持与帮助.

参 考 文 献

- 1 Lozano-Perez T, Wesley M A. An algorithm for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. *Journal of ACM*, 1979, 22: 560~570
- 2 Canny J, Reif J. New lower bound techniques for robot motion planning problems. In: *Proceedings of the 28th Annual IEEE Symposium*. New York: Foundations of Computer Science, IEEE, 1987. 49~60
- 3 John H R, James A S. A single-exponential bound for finding shortest paths in three dimensions. *Journal of ACM*, 1994, 41(5): 1013~1019
- 4 Sharir M, Schorr A. On shortest paths in polyhedral spaces. *SIAM Journal of Computing*, 1986, 15: 193~215
- 5 Chen Jin-dong, Han Yi-jie. Shortest paths on a polyhedron. In: *Proceedings of the 6th Annual Symposium on Computing Geometry*. 1990. 360~369
- 6 Baltan A, Sharir M. On the shortest paths between two convex polyhedra. *Journal of ACM*, 1988, 35(2): 267~287
- 7 Mount D M. The number of shortest paths on the surface of a polyhedron, *SIAM Journal of Computing*, 1990, 19(4): 593~611
- 8 Garey M R, Johnson D S. Triangulating a simple polygon. *Information Processing Letters*, 1978, 7(4): 175~179

The Problem of Shortest Path in 3D Space

SHI Hai-hu

(Hisense Technique Research Center Qingdao 266071)

(Department of Computer Science and Technology Beijing University Beijing 100871)

Abstract The problem of computing the euclidean shortest path between two points in the three dimensional space bounded by a collection of convex disjoint polyhedral obstacles is known to be NP-hard and in exponential time for arbitrarily many obstacles. It can be solved in $O(n^2)$ time for single convex polyhedron obstacle (here n is the total number of vertices of polyhedron). In this paper, the author mainly researchs the shortest problem of the case of two convex polyhedral obstacles, and presents an algorithm that solves this problem in $O(n^2)$ time, and improves improving significantly previous best result $O(n^3 \log n)$ for this special case. On the other hand, the author also presents a better result $O(\sum 12^{i-1}n_i^2)$ for the problem of shortest path amidst a fixed number of convex polyhedral obstacles.

Key words Shortest path, convex polyhedron, computing geometry, geodesics, Voronoi graph.