第10卷第3期
1999年3月

软件学报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 10, No. 3
Mar. 1999

复小波在图像编码中的应用*

许 刚

(中国科学院软件研究所 北京 100080)

E-mail: ljf@ox.ios.ac.cn

摘要 讨论了复值小波基的解法以及相应滤波器组的构造. 从得到的复值滤波器组的结果来看,其滤波器组的实部具有偶数长的对称性和线性相位. 同时,将复小波对应的滤波器组和其他几种小波在图像编码上利用相同的量化器进行了对比,复小波在图像压缩性能上有较好的结果.

关键词 复值小波,小波变换,图像编码.

中图法分类号 TP391

目前,有关小波应用于图像编码的文献很多. 但从小波基的观点出发,在图像编码中主要有正交和双正交小波两大类. Mallat 算法[1]是小波变换的核心,其算法中仅仅用到了小波所对应的滤波器组对图像进行分解和重构. 实正交的滤波器组其能量是守恒的,但是缺乏线性相位,并且要求利用信号或图像作不连续的周期性边界扩展,在一定程度上使重构的图像信号引入了人为的高频. 双正交滤波器组具有线性相位,并且允许利用图像边界作连续的扩展,但是在变换区域中能量是不守恒的. 目前,已构造出很多正交和双正交滤波器组[2~4],但是出于滤波器组长度及压缩性能上的考虑,使得小波对应的滤波器组的使用变得十分有限,因此,对于高性能滤波器组和新一类小波滤波器组的研究是我们在图像压缩应用中感兴趣的问题. 本文从复小波及滤波器的构造、性质和在图像编码中的应用等几个方面进行论述,并和其他几种典型小波在图像压缩还原质量上进行分析和比较,结果说明,复小波在图像编码中有较好的性能.

1 复小波和滤波器组

$L^2(R)$上的多分辨率分析是闭子空间$V_j\subset L^2(R)$的一个序列且

$$V_j\subset V_{j+1},\quad \bigcap_j V_j=\{0\},\quad \overline{\bigcup_j V_j}=L^2(R),$$
$$f(x)\in V_0\Leftrightarrow f(x-1)\in V_0,\quad f(x)\in V_0\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},\tag{1}$$

则存在一个平方可积尺度函数$\varphi\in V_0$,使$\{\varphi_{0,k}(x)=\varphi(x-k)\,|\,k\in Z\}$是$V_0$的一组正交基,令

$$\varphi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx-k),\quad j,k\in Z,\tag{2}$$

$\{\varphi_{j,k}\}$是空间V_j的一组正交基. 由于$\varphi\in V_0\subset V_1$,因此,存在一个复数序列$\{a_k\}$满足$\sum_k a_k=1$,且

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_k a_k\varphi(2x-k).\tag{3}$$

多分辨率分析的目的在于将$L^2(R)$分解成

$$L^2(R)=V_{j_0}\oplus\sum_{j\geq j_0}W_j,\tag{4}$$

其中,子空间W_j定义为V_j在V_{j+1}上正交补子空间:$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$. 对于一个给定的尺度j,空间W_j是由相应于多分辨率分析的正交小波基$\Psi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx-k)$的集合来生成. 由于$\Psi\in W_0\subset V_1$,因此,存在一个复数序列$\{b_k\}$,使得

---

* 本文研究得到中国科学院重点项目基金资助. 作者许刚,1963年生,博士后,主要研究领域为信号和图像处理.
本文通讯联系人:许刚,北京100080,中国科学院软件研究所
本文1997-11-04收到原稿,1998-03-09收到修改稿

$$\Psi(x)=\sqrt{2}\sum_k b_k\varphi(2x-k). \tag{5}$$

其中 $b_k=(-1)^k\bar{a}_{1-k}$,保证集合$\{2^{\frac{j}{2}}\Psi_j(2^jx-k),k\in Z\}$是 W_j 的一组正交基.在通常情况下,若一个函数 $f(x)\in V_{j_{\max}}$,则它可用下式来表示.

$$f(x)=\sum_k C_k^{j_{\max}}\varphi_{j_{\max},k}(x). \tag{6}$$

$f(x)\in L^2(R)$的离散多分辨率分析可表示为

$$f(x)=\sum_k C_k^{j_{\max}}\varphi_{j_0,k}(x)+\sum_{j=j_0}^{j_{\max}-1}\sum_k d_k^j\Psi_{j,k}(x), \tag{7}$$

其中 j_0 是一个给定的低分辨率尺度,系数 C_k^j 和 d_k^j 是多分辨率分析基上的正交投影.

$$C_k^j=\langle\varphi_{j,k},f\rangle,\quad d_k^j=\langle\Psi_{j,k},f\rangle. \tag{8}$$

利用 Daubechies 小波[1],有小波快速分解算法(FWT),它是由低通投影 $V_j\to V_{j-1}$和高通投影 $V_j\to W_{j-1}$组成.

$$C_n^{j-1}=\sqrt{2}\sum_k\bar{a}_{k-2n}C_k^j,\quad d_n^{j-1}=\sqrt{2}\sum_k\bar{b}_{k-2n}C_k^j. \tag{9}$$

同时,由 V_{j-1}和 W_{j-1}的元素能够组成在 V_j 上的一个唯一向量,这个重构将用逆 FWT 来实现:

$$C_n^j=\sqrt{2}\sum_k a_{n-2k}C_k^{j-1}+\sqrt{2}\sum_k b_{n-2k}d_k^{j-1}. \tag{10}$$

对称的复小波必需满足以下条件:

(1) φ 有紧支撑:对整数 J 要求 φ 在区间$[-J,J+1]$上有紧支撑,且对 $k=-J,-J+1,\ldots,J,J+1$,有 $a_k\neq 0$.

(2) $\{\varphi(x-k)\}$正交:由于我们是用 Daubechies 小波构造复小波,因此,这个条件在很大程度上取决于 Daubechies 小波.

定义(含负幂)多项式

$$H(z)=\sum_{n=-J}^{J+1}a_nz^n,\quad 且 H(1)=1, \tag{11}$$

其中 z 在单位圆上$|z|=1$.集合$\{\varphi_{0,k}(x),k\in Z\}$的正交性能够通过以下等式来说明.

$$P(z)-P(-z)=z. \tag{12}$$

其中,多项式 $P(z)$定义为

$$P(z)=zH(z)\overline{H}(z). \tag{13}$$

(3) 式(6)逼近的精确性:由尺度函数 φ 决定函数的正则性,根据式(11)要求小波具有 J 阶消失矩,即

$$H'(-1)=H''(-1)=\ldots=H^{(J)}(-1)=0. \tag{14}$$

(4) 对称性:这个条件相当于 $a_k=a_{1-k}$,并且可以写成

$$H(z)=zH(z^{-1}). \tag{15}$$

在以上 4 个条件下,Lawton 已证明了对 J 为偶数时,复值函数 φ 和 Ψ 是存在的[5].其求解过程可利用等式(12)、(14)和(15)求解参数.由等式(12),定义一个多项式:

$$P_J(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^{2J+2}q_J(z^{-1}). \tag{16}$$

其中

$$q_J(z)=\sum_{j=0}^{2J}r_j(z+1)^{2J-j}(z-1)^j,且\begin{cases}r_{2j}=(-1)^j2^{-2J}\begin{pmatrix}2J+1\\ j\end{pmatrix}, & j=0,1,2,\ldots,J.\\ r_{2j+1}=0\end{cases}$$

显然 $P_J(z)$满足等式(12).

$q_J(z)$的 $2J$ 个根显示了明显的对称性:一个根的共轭和逆也是其根.如果取根 $x_{k=1,2,\ldots,J}$在单位圆($|x_k|<1$)内并且 $\bar{x}_k=x_{J+1-k}$,则

$$q_J(z)=\prod_{k=1}^{J}\left(\frac{z-x_k}{1-x_k}\right)\prod_{k=1}^{J}\left(\frac{z-\bar{x}_k^{-1}}{1-\bar{x}_k}\right), \tag{17}$$

且低通滤波器 $H(z)$ 能够写成

$$H(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^{1+J}\rho(z^{-1}),\quad \rho(z)=\prod_{m\in R}\left(\frac{z-x_m}{1-x_m}\right)\prod_{n\in R'}\left(\frac{z-\bar{x}_n^{-1}}{1-\bar{x}_n^{-1}}\right),\tag{18}$$

其中 R,R' 是 $\{1,2,3,\ldots,J\}$ 的两个子集. $P(z)=zH(z)\overline{H}(z)$ 频谱的因式分解说明 $q_J=z^J\rho(z^{-1})\bar{\rho}(z)$ 导致在 R 和 R' 上的以下限制条件

$$k\in R\Leftrightarrow k\notin R'.\tag{19}$$

其 根的这一选择完全满足(1)，(2)和(3)的条件. 当 $R=\{1,2,3,\ldots,J\}$ 和 $R'=\{/\}$ 相应于用 $n=2J+2$ 的 Daubechies 方法来得到其解时，对称性条件(4)的补充定义为等式(19)求解的一个子集，它相应于以下限制条件

$$k\in R\Leftrightarrow J-k+1\in R' \text{ 且 } k\notin R'.\tag{20}$$

对于 J 的任何偶数值，这相当于在“Daubechies 小波”(2^J 个复的和实的元素)原集上定义了 $2^{\frac{J}{2}}$ 复数解的一个子集(注意一个解的复数共轭也是一个解).

考虑一个解的特例，它对应以下根的选择：

$$R=\{1,3,5,\ldots,2k+1,\ldots,J-1\},\quad R'=\{2,4,\ldots,2k,\ldots,J\},$$

这明显满足(20)式. 因此，复尺度函数和复小波能够写成

$$\varphi(x)=h(x)+\mathrm{i}g(x),\quad \Psi(x)=w(x)+\mathrm{i}v(x),$$

其中 h,g,w 和 v 都是实函数. 表 1 中(a)、(b)、(c)给出了其 $\sum_k a_k=\sqrt{2}$ 的滤波器组系数.

表 1　复对称滤波器组(其中 $a_k=a_{1-k}$)

k	$\mathrm{Re}[a_k]$	$\mathrm{Im}[a_k]$
1	0.662 912	0.171 163
2	0.110 485	−0.085 581
3	−0.066 291	−0.085 581

(a) $J=2$

k	$\mathrm{Re}[a_k]$	$\mathrm{Im}[a_k]$
1	0.643 003	0.182 852
2	0.151 379	−0.094 223
3	−0.080 639	−0.117 947
4	−0.017 128	0.008 728
5	0.010 492	0.020 590

(b) $J=4$

k	$\mathrm{Re}[a_k]$	$\mathrm{Im}[a_k]$
1	0.678 892	0.018 139 8
2	0.134 037	−0.050 801 3
3	−0.119 820	−0.027 302 9
4	−0.012 946	0.034 159 6
5	0.032 145	0.027 032 2
6	−0.000 417	0.000 926 8
7	−0.004 785	−0.002 154 2

(c) $J=8$

基于二维小波变换，可以用两个多尺度空间 V_j 的张量积来构造二维多尺度分析. 详细的二维小波变换算法可以参考文献[1].

2　小波和图像编码

2.1　滤波器的设计和选择

前面我们已叙述过，在小波变换中实际上只用到了小波对应的滤波器组，因此，对滤波器组的设计和选择是十分重要的. 在滤波器组的设计中有一些约束条件，如完全重构、有限长度和一定的正则性等. 滤波器组的正则性在小波变换和完全重构之间有重要的关系，它曾经作为评价滤波器组的一个标准而提出来，但是从我们的实验和文献[4]可以看到，在滤波器的正则性和重构图像质量之间仅仅有部分相关. 在设计和选择滤波器时还有一个需要考虑的重要性质是线性相位，具有线性相位的滤波器在图像处理中是十分重要的[9]，这一点限制了很多正交滤波器的使用. 但是双正交滤波器组、样条滤波器和复小波滤波器完全满足这一条件. 双正交滤波器组最早是由 Cohen 和 Daubechies 设计的[6]，并由 Antonini 首次引入图像编码[3]. 本文利用双正交滤波器组的目的在于和复小波滤波器进行图像编码的对比.

我们考察了等式(1)中 $2J\leqslant 28$ 的所有复解，其结果是有总数为 127 个正交滤波器组，从压缩性能上看，有些滤波器的性质并不好，此外，滤波器长度太长(≥30)，增加了在进行小波变换时的计算量，同时也增加了应用的复杂性，因此我们给出了表 1 中 3 种复小波的滤波器的值. 文献[5]只给出了表 1(a)的值，并只对一维信号作了简单的解释. 在第 1 节中，有 $\Theta(x,y)\cong G(x,y)$ 和 $\Psi(x,y)\cong\alpha G(x,y)$，由于 α 值较小，因此实部值要比虚部值大

得多.所以,在进行小波变换时我们只用到了滤波器的实部值,虚部值的舍去虽然使滤波器的能量有所损失,但对整幅图像而言,比图像量化所带来的损失要小得多.此外,从求解出的复滤波器值来看,其长度为偶数且具有对称性,这一点比奇数长滤波器有更好的性质.

2.2 图像编码

小波在图像编码中的应用通常由以下部分组成:

小波变换⇒量化和位分配⇒熵编码.

小波变换以 Mallat 算法为核心,其基本思想和金字塔方案[7]及子带编码方案[8]相近似,它将输入图像分解成按不同频带宽度、不同分辨率的子带图像,每一层有 4 个子带图像,每次将 4 个子带图像中的低频子带再次分解,第 k 次分解后,其总的子带数为 $3k+1$.在一定精度下,小波逆变换能够完全重构原始图像.为了得到较高的压缩率,需要对变换系数进行量化处理.变换系数被量化以产生符号流,每一标号对应着特定的量化阶层的标记,信息的损失一般是在量化级上.位分配技术通常用到量化级上,在小波图像编码中,它是对各个子带动态地分配量化位数来实现压缩和自适应图像信号,关于位分配技术的详细内容可见文献[9].量化后的符号流通常使用二维 Huffman 编码,但是,目前国际上用性能更佳的算术编码[10]来代替 Huffman 编码.在实验中,我们用到的是算术编码.

2.3 实验结果和分析

我们利用 3 幅国际标准灰度图像来进行实验,它们是 Lean,GoldHill 和 Barbara,其图像大小为 512×512,8b/pixel.利用几种典型小波对应的滤波器和复小波对应的滤波器进行图像编码的实验结果如表 2 和表 3 所示.

表 2 几种小波对应的滤波器在分层结构均匀矢量量化下的对比

小波类型	LEAN PSNR	GOLDHILL PSNR	BARBARA PSNR
Antonini1	34.91	31.82	29.09
Antonini2	35.73	32.05	29.70
Antonini3	18.90	18.94	17.82
Daub4	34.36	31.31	28.13
Daub6	34.75	31.51	28.81
Daub8	34.95	31.40	29.07
Villasenor3	35.77	32.11	29.70
Villasenor5	35.17	31.84	28.91
Complex2	27.64	28.69	25.57
Complex4	26.07	27.50	24.37
Complex8	35.25	31.93	29.95

表 3 几种小波对应的滤波器在类似零树量化下的对比

小波类型	LEAN PSNR	GOLDHILL PSNR	BARBARA PSNR
Antonini1	35.40	32.12	28.09
Antonini2	36.08	32.56	29.70
Antonini3	17.95	19.07	17.70
Daub4	34.62	31.90	28.36
Daub6	35.19	31.94	28.75
Daub8	35.37	32.12	28.94
Villasenor3	35.92	32.63	29.57
Villasenor5	35.68	32.76	29.00
Complex2	27.63	28.62	25.34
Complex4	26.05	27.42	24.26
Complex8	35.43	32.39	29.92

在我们的实验中,离散小波变换的层数是 5,其设定的压缩比为 16:1. Antonini1,Antonini2 和 Antonini3 为 Antonini 在文献[3]中给出的双正交滤波器组. Daub4,Daub6 和 Daub8 为 Daubechies 在文献[2]中给出的实正

交滤波器. Villasenor3 和 Villasenor5 为 Villasenor 在文献[4]中给出的具有偶数长度双正交分析/综合滤波器组. Complex2,Complex4 和 Complex8 为本文表 1 中给出的复滤波器组. 此外,在实验中使用了两种量化策略,一种是分层结构均匀标量量化,另一种是类似于 Shapiro 零树量化[11]策略,但算法略为简单一些. 由于本文的侧重点是复滤波器的设计和编码结果,因此,两种量化算法将另文叙述. 对于重构图像的质量,我们采用标准的 PSNR 计算方法.

从我们的实验结果来看,Daubechies 小波对应的实正交滤波器重构图像的 PSNR 值对 3 幅图像来说,其结果差异不大. Daub8 的综合性略好一点,但是 Daubechies 小波不具有对称性,并且其对应的实滤波器不具有线性相位. Antonini 的 3 组滤波器处理图像的结果有较大的不同,其中 Antonini3 的结果是不能令人满意的,而 Antonini1和 Antonini2 有很好的结果. Antonini3 滤波器是用 Burt 的金字塔数据[7]计算出来的分析/综合滤波器组,但是 Antonini2 是典型的双正交滤波器组. 目前,这种 7/9 带双正交滤波器组在小波图像编码中广为应用,可以说它是具有最佳性能的滤波器组. Villasenor3 和 Villasenor5 也有较好的结果,所不同的是,Villasenor 的分析/综合滤波器的长度同为偶数,而 Antonini 的分析/综合滤波器的长度同为奇数,相同之处是,它们都是双正交且具有线性相位. 复值滤波器 Complex 所得到的结果差异较大,其 Complex8 的结果是相当不错的. 根据我们对其他大量图像的测试,Complex8 和 Antonini2 有相近的结果. 但是,Complex8 仅仅用到了一个偶数长系数集合且具有线性相位,这是一个十分重要的结论.

表 2 和表 3 的实验结果为 5 层离散小波变换,共得到 10 个子带图像,在小波图像编码中进行多少次离散小波分解才能使重构的图像质量有较好的结果,这在很多文献中都没有具体叙述,因为这与使用滤波器的长度和图像的大小有关,但通常分解在 3～5 层之间. 为了更进一步了解离散小波变换的分解层次和重构图像质量之间的关系,我们给出了在几个分解层上的图像重构的结果. 如表 4 所示,这里我们只选用了 Antonini2 7/9 带双正交滤波器和复滤波器 Complex8,后者滤波器的长度为 14.

表 4　不同分解层在分层结构均匀标量量化下的结果

小波类型	LENA PSNR			GOLDHILL PSNR			BARBARA PSNR		
	3 层	4 层	5 层	3 层	4 层	5 层	3 层	4 层	5 层
Antonini2	35.31	35.73	35.73	31.97	32.04	32.05	29.52	29.72	29.70
Complex8	35.50	35.49	35.25	31.96	31.98	31.93	29.83	30.04	29.95

表 4 设定的压缩比为 16:1,两种滤波器在不同层的结果略有变化,但不十分明显. 此外,由于我们使用了位分配量化技术,因此,图像的压缩比是可调的,我们给出在不同位率下 Complex8 小波编码 3 幅图像的处理结果,如表 5 所示.

表 5　复小波 Complex8 在分层结构均匀标量量化下不同位率的结果

PSNR / NAME	RATE(BIT/PIXEL)									
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
LENA	28.95	31.61	33.19	34.10	35.27	36.04	36.61	36.81	37.23	37.91
GOLDHILL	27.38	29.15	30.45	31.24	31.94	32.86	33.49	34.23	34.66	35.16
BARBARA	23.70	25.94	26.94	28.61	29.95	30.78	31.75	32.25	33.25	34.04

3　结　论

复小波目前在国际上的研究还处于起步阶段,特别是在图像编码应用中复小波所出现的文献还不多. 本文利用复值滤波器的实部系数进行小波变换,这一点在图像编码中是很重要的. 复滤波器的实部系数具有偶数长的对称性,能够较好地适应图像压缩. 从我们的实验中可以看到,复滤波器重构图像的质量和最佳滤波器得到的重构图像质量基本相同. 此外,复滤波器仅仅用到了一个系数集合,这和双正交滤波器用到两个系数集合是不同的,这一点减少了计算的复杂性,有利于硬件实现.

本文所得到的复滤波器是从 Daubechies 小波中衍生出来的,这一点和 Antonini 构造的双正交滤波器(利用样条)有相似之处. 不同之处是将实滤波器的设计方法扩展到复域. 在小波图像编码中,小波变换只是编码的一

个组成部分,图像重构的质量不能完全取决于滤波器的选择,特别是和小波变换后系数的量化策略有很大的关联,同一滤波器用不同的量化算法其结果会有所不同.因此,一个完备的小波图像编码系统应该是由高性能滤波器加最佳量化算法及相应的熵编码组成.

参考文献

1 Mallat S G. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989,11(7):674~693

2 Daubechies I. Orthonormal basis of compactly supported wavelets. Communications on Pure Applied Mathematics, 1988,41(10):909~996

3 Antonini M *et al*. Image coding using wavelet transform. IEEE Transactions on Image Processing, 1992,1(2):205~220

4 Villasenor J D *et al*. Wavelet filter evaluation for image compression. IEEE Transactions on Image Processing, 1995,4(8):1053~1060

5 Lawton W. Applications of complex valued wavelet transforms to subband decomposition. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993,41(12):3566~3568

6 Cohen A *et al*. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1992,51(9):485~560

7 Burt P J *et al*. The Laplacian pyramid as a compact image code. IEEE Transactions on Communications, 1983,31(4):532~540

8 Woods J W *et al*. Subband coding of images. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1986,34(5):1278~1288

9 Shoham Y *et al*. Efficient bit allocation for an arbitrary set of quantizer. IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing, 1988,36(9):1445~1453

10 Witten I H *et al*. Arithmetic coding for data compression. Communications of ACM, 1987,30(6):520~540

11 Shapiro J M. Embedded image coding using zerotree of wavelet coefficients. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993,41(12):3445~3462

Application of Image Coding Using Complex-valued Wavelets

XU Gang

(*Institute of Software The Chinese Academy of Sciences Beijing* 100080)

Abstract The solution on complex-valued wavelet basis and the corresponding construction of complex-valued filter bank are discussed in this paper, the real part of the complex-valued filter bank has linear phase, and its length is even which can be obtained from the complex-valued filter bank. Furthermore, the complex-valued filter bank is compared with other real filter using the same quantizer on coding of image, the complex-valued filter bank achieves well compressing performance.

Key words Complex-valued wavelet, wavelet transform, image coding.