第9卷第11期
1998年11月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol.9, No.11
Nov. 1998

次协调的模态逻辑*

程晓春 孙吉贵 姜云飞

（吉林大学计算机科学系 长春 130023）

摘要 将次协调模糊推理方法推广到模态逻辑，提出次协调的模态逻辑，其逻辑推理关系是次协调模糊蕴含的模态推广，既可处理不一致信息，又可表示多世界模型。给出了次协调模态逻辑的正确而且完备的Gentzen型推理系统。

关键词 模态逻辑，次协调逻辑，模糊逻辑，Gentzen型推理系统。

中图法分类号 TP18

实际使用的知识库，特别是大规模、分布式专家系统的知识库，往往是不一致的。人们对事物的不同认识、知识的不同来源与获取方式均会导致知识库的不一致，知识库的不一致还来源于一般说来正确但并非绝对正确的推理规则。要想保持知识库的绝对一致是非常困难的，甚至对大型知识库作一致性检查也很难实现。要求推理所依据的知识绝对一致是不切实际的，必须考虑利用不一致知识如何推理的问题。

逻辑是研究知识表示和推理的重要工具。经典逻辑的实质蕴涵有蕴涵悖论，例如，对任意公式 A,B 均有 $(\sim A\wedge A)\rightarrow B$ 有效，即任意公式均是矛盾公式的逻辑结果，从而经典逻辑中利用不一致知识的推理是无意义的。1912年，Lewis为了避免蕴涵悖论而建立了模态逻辑。然而，一直到50年代末，Kripke建立起模态逻辑的多世界语义模型，模态逻辑才获得真正的生命力，并受到逻辑学界之外的关注。模态逻辑比经典逻辑有更强的表达能力，是时态逻辑、动态逻辑和认知逻辑的理论基础。由于分布式人工智能和并行计算的兴起，模态逻辑不仅成为程序语义描述的有力工具，而且在研究知识的形式化表示和基于知识的推理方面也表现出越来越多的优越性。模态逻辑的自动推理方法已得到广泛的研究，例如Fitting的模态表演算[1]；Enjalbert与Farinas等人的模态归结方法。[2]但是，关于模态逻辑推理关系的合理性却缺少必要的研究。例如，当前提公式集 S 不一致时（即使仅仅一个可能世界中的子公式不一致），不存在模型满足 S，对于依据模型定义的逻辑推理关系，任意公式均是 S 的逻辑结果。经典的模态逻辑同经典逻辑一样，不能处理不一致的知识。

次协调逻辑[3,4]的研究目标便是为了保持在前提不一致时，推理不是无意义的。我们曾基于模糊逻辑，研究了模糊推理关系的合理性假设，并给出一种非单调、不含一般蕴涵悖论的模糊推理关系。[5]

本文将模态逻辑公式的真值域从{0,1}扩充到[0,1]，结合模糊逻辑推理关系的研究结果[5]，建立了能处理不一致知识的模态逻辑，并给出其可靠而且完备的Gentzen型推理关系。为方便起见，本文只讨论命题逻辑。

1 次协调的模态逻辑及其推理关系

1.1 经典模态逻辑的语法及其公理化系统

经典命题模态逻辑的语言是在经典命题逻辑语言的基础上，通过增加两个模态算子□（必然算子）和◇（可能算子）而得到的。

初始符号集包括命题变元集、逻辑联结词～、∨和模态算子□。

形成规则：(1) 命题变元是合式公式；(2) 若 A 是合式公式，则 $\sim A$，$\Box A$ 也是合式公式；(3) 若 A,B 是合式公式，则 $A\vee B$ 也是合式公式；(4) 公式中可以使用括号。

定义逻辑联结词→、∧和模态算子◇为：$A\rightarrow B\triangleq\sim A\vee B$；$A\wedge B\triangleq\sim(\sim A\vee\sim B)$；$\Diamond A\triangleq\sim\Box\sim A$。记模态逻辑

* 本文研究得到国家自然科学基金、国家攀登计划基金和国家教委博士点基金资助。作者程晓春，1973年生，博士，讲师，主要研究领域为模糊逻辑，模糊推理。孙吉贵，1962年生，博士，教授，主要研究领域为定理机器证明，自动推理。姜云飞，1945年生，教授，博导，主要研究领域为非单调逻辑，自动推理。

本文通讯联系人：程晓春，长春 130023，吉林大学计算机科学系

本文1997-04-04收到原稿，1997-11-05收到修改稿

合式公式的全体为 F.

正规模态逻辑系统中，最基本的是 K 系统. 它有下述形式的公理模式和推理规则模式.

公理：(1) 经典命题逻辑的公理模式：

(A1) $(P\vee P)\rightarrow P$；

(A2) $P\rightarrow P\vee Q$；

(A3) $Q\vee P\rightarrow P\vee Q$；

(A4) $(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$.

(2) $\Box(A\rightarrow B)\rightarrow(\Box A\rightarrow\Box B)$ (K 公理).

推理规则：$MP:\dfrac{A\quad A\rightarrow B}{B}$； $Nec:\dfrac{A}{\Box A}$.

其他正规模态逻辑分别由命题模态逻辑 K 添加相应的公理模式得到.

$K4=K\cup\{\Box A\rightarrow\Box\Box A\}$；

$D=K\cup\{\Box A\rightarrow\Diamond A\}$；

$T=K\cup\{\Box A\rightarrow A\}$；

$D4=D\cup\{\Box A\rightarrow\Box\Box A\}$；

$S4=T\cup\{\Box A\rightarrow\Box\Box A\}$.

我们知道经典逻辑的公理系统由经典逻辑的公理模式和 MP 构成. Russell 定义的实质蕴涵($A\rightarrow B\triangleq\sim A\vee B$)有蕴涵悖论，例如$\forall G\in F$，$(\sim A\wedge A)\rightarrow G$ 有效；在推理规则 MP 下，实质蕴涵可看作是一种逻辑推理关系；上述蕴涵悖论说明了任意公式是矛盾式的逻辑结果，从而经典逻辑不能处理不一致的知识. Lewis 给出了严格蕴涵 $P\succ Q\triangleq\Box(P\rightarrow Q)$，试图反映前提和结论之间的必然联系，并由对蕴涵的讨论转向研究模态逻辑. 根据规则 Nec，不难发现$\forall G\in F$，$(\sim A\wedge A)\succ G$. 事实上，严格蕴涵本身仍然存在蕴涵悖论. 经典模态逻辑同经典逻辑一样，不能处理不一致的知识.

1.2 次协调的模态逻辑及其 Kripke 语义

次协调模态逻辑的语法与经典模态逻辑的语法完全相同. 次协调模态逻辑的 Kripke 模型是一个三元组 $M=\langle W,R,m\rangle$，其中 W 是可能世界的集合；R 是 W 上的二元可达关系；m 是每个可能世界中的公式在[0,1]上的真值指派，而且满足：对$\forall W_i\in W$，$\forall A,B\in F$，

$m(W_i,\sim A)=1-M(W_i,A)$，

$m(W_i,A\wedge B)=\min\{m(W_i,A),m(W_i,B)\}$，

$m(W_i,A\vee B)=\max\{m(W_i,A),m(W_i,B)\}$，

$m(W_i,A\rightarrow B)=\max\{1-m(W_i,A),m(W_i,B)\}$，

$m(W_i,\Box A)=\min\{m(W_j,A)\mid W_j\in W$ 且 $W_i\ R\ W_j\}$，

$m(W_i,\Diamond A)=\max\{m(W_j,A)\mid W_j\in W$ 且 $W_i\ R\ W_j\}$.

易证：$m(W_i,\sim\Box A)=m(W_i,\Diamond\sim A)$；$m(W_i,\Box\sim A)=m(W_i,\sim\Diamond A)$.

根据 Fitting 的统一记号[1]，可将非文字的命题模态公式分为 $\alpha,\beta,\upsilon,\pi$ 四类，并定义它们的直接子公式如下：

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2	υ	υ_0	π	π_0
$A\wedge B$	A	B	$A\vee B$	A	B	$\Box A$	A	$\sim\Box A$	$\sim A$
$\sim(A\vee B)$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim(A\wedge B)$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim\Diamond A$	$\sim A$	$\Diamond A$	A
$\sim(A\rightarrow B)$	A	$\sim B$	$A\rightarrow B$	$\sim A$	B				
$\sim\sim A$	A	A							

根据 Kripke 模型 $M=\langle W,R,m\rangle$ 可以定义公式在可能世界中的满足关系$\models$：对于$\forall W_i\in W$，$\forall A\in F$，$M,W_i\models A$ iff $m(W_i,A)\in[0.5,1]$. 易证：

若$M,W_i\not\models A$，则 $M,W_i\models\sim A$；

$M,W_i\models\alpha$ iff $M,W_i\models\alpha_1$ 且 $M,W_i\models\alpha_2$；

$M,W_i\models\beta$ iff $M,W_i\models\beta_1$ 或 $M,W_i\models\beta_2$；

$M,W_i\models\upsilon$ iff $\forall W_j\in W$，若 W_i R W_j则 $M,W_j\models\upsilon_0$；

$M,W_i\models\pi$ iff $\exists W_j\in W$，满足 W_i R W_j且 $M,W_j\models\pi_0$.

设 S 是公式集，规定 $M,W_i\models S$ iff $\forall A\in S, M,W_i\models A$. 称公式(集)$A$ 在模型 $M=\langle W,R,m\rangle$ 中有效，iff $W_i\in W$, $M,W_i\models A$.

用 K 表示可能世界间可达关系没有特殊限制的模型类，分别用 $K4,D,D4,T,S4$ 表示可能世界间可达关系满足下面条件的模型类：

(1) 传递性；

(2) 连续性，即 $\forall W_i\in W, \exists W_j\in W$，满足 $W_i \mathrm{R} W_j$；

(3) 连续性和传递性；

(4) 自反性；

(5) 自反性和传递性.

设 L 是某一类模型，称公式(集)A 是 L 有效的(记为 $\models_L A$)，如果对 L 中的任一模型 M 和 M 中的每一个可能世界 W_i 有 $M,W_i\models A$；否则，记为 $\not\models_L A$. 显然公式集的有效性与其所含公式的合取式的有效性相同.

我们可以证明下述次协调逻辑的语义和语法的一致性定理.

定理 1. 正规模态逻辑 L 中的公理在次协调模态逻辑的 L 模型中有效，其中 $L\in\{K,K4,D,D4,T,S4\}$.

证明：首先证明 K 公理在 K 模型中的有效性：$G=\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)=\Diamond\sim(A\to B)\vee(\Diamond\sim A\vee\Box B)=\Diamond(A\wedge\sim B)\vee\Diamond\sim A\vee\Box B$. 对任意 K 模型 $M=\langle W,\mathrm{R},m\rangle$, $\forall W_0\in W$，若 W_0 无可达世界，则 $M,W_0\models\Box B$，从而 $M,W_0\models G$. 否则，$\exists W_i\in W, W_0 \mathrm{R} W_i$；若 $M,W_0\not\models\Diamond(A\wedge\sim B)$ 且 $M,W_0\not\models\Diamond\sim A$，往证 $M,W_0\vdash\Box B$；由于 $M,W_0\not\models\Diamond(A\wedge\sim B)$, $\forall W_i\in W$，若 $W_0 \mathrm{R} W_i$，则 $M,W_i\not\models A\wedge\sim B$，于是 $M,W_i\models\sim A\vee B$；由于 $M,W_0\not\models\Diamond\sim A$, $\forall W_i\in W$，若 $W_0 \mathrm{R} W_i$，则 $M,W_i\not\models\sim A$；于是 $\forall W_i\in W$，若 $W_0 \mathrm{R} W_i$，则 $M,W_i\models B$；即 $M,W_0\models\Box B$，从而 $M,W_0\models G$. 由 M 和 W_0 的任意性知 K 公理在 K 模型中有效.

同理可证，传递公理在可能世界间可达关系有传递性模型中有效；自反定理在可能世界间可达关系有自反性的模型中有效；连续定理在可能世界间可达关系有连续性模型中有效. 不难验证，经典逻辑的公理在任意模型中有效. □

另外，在次协调的模态逻辑中，Nec 规则也是保可证的：在任意模型中，若 A 有效，则 $\Box A$ 有效.

1.3 次协调模态逻辑的推理关系

设 L 是某一类模型，其中 $L=\{K,K4,D,D4,T,S4\}$，称公式 A 是公式集 S 的 L 逻辑结果，如果对 L 中的任一模型 M 及 M 中的每一个可能世界 W_i，若 $M,W_i\models S$，则 $M,W_i\models A$，记为 $S\models_L A$；否则，记为 $S\not\models_L A$. 显然，当公式集 S 为空时，$S\not\models_L A$ iff A 是 L 有效的；即 $\varnothing\models_L A$ iff $\models_L A$.

命题 1. 对任意公式集 S，均存在公式 G，使得 $S\not\models_L G$，其中 $L\in\{K,K4,D,D4,T,S4\}$.

证明：令 $W=\{W_0\}$, $R=\{W_0 \mathrm{R} W_0\}$，对 S 中出现的任意命题变元 A，规定 $m(W_0,A)=0.5$. 考虑 S 的如下模型 $M=\{W,R,m\}$，显然，R 有连续性、自反性和传递性；M 是 $S4$ 模型，也是 $K,K4,D,D4,T$ 模型. 不难验证，$\forall H\in S$，有 $m(W_0,H)=0.5$，于是，$M,W_0\models S$. 令 G 是不在 S 中出现的命题变元，在 S 的 L 模型 M 中增加对 G 的赋值，规定 $m(W_0,G)=0$，则 $M,W_0\not\models_L S$. 于是，$S\not\models_L G$. □

命题 1 说明，在次协调的模态逻辑 $K,K4,D,D4,T,S4$ 中，即使前提是不一致的，也不会推出所有公式有结论；从而其推理关系是次协调的，比经典模态逻辑的推理关系更合理.

2 次协调模态逻辑的 Gentzen 型推理系统

本节给出次协调模态逻辑的 Gentzen 型推理系统，其中推导式形如 $S\Rightarrow_L H$, $L\in\{K,K4,D,D4,T,S4\}$，其中前提 S 和结论 H 都是公式集；记 H 中公式的析取式为$(\vee H)$，规定 $S\Rightarrow_L H$ 有效 iff H 中公式的析取式是 S 的 L 逻辑结果，即 $S\models_L(\vee H)$.

2.1 次协调模态逻辑 *K* 的 Gentzen 型推理系统 GPK

公理：(A1) $S\cup\{p\}\Rightarrow_K H\cup\{p\}$；(A2) $S\Rightarrow_K H\cup\{\sim p,p\}$.

逻辑规则：

$$\alpha_L:\frac{S\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}\Rightarrow_K H}{S\cup\{\alpha\}\Rightarrow_K H};\qquad \alpha_R:\frac{S\Rightarrow_K H\cup\{\alpha_1\}\quad S\Rightarrow_K H\cup\{\alpha_2\}}{S\Rightarrow_K H\cup\{\alpha\}};$$

$$\beta_L:\frac{S\cup\{\beta_1\}\Rightarrow_K H\quad S\cup\{\beta_2\}\Rightarrow_K H}{S\Rightarrow_K H\cup\{\beta\}};\qquad \beta_R:\frac{S\Rightarrow_K H\cup\{\beta_1,\beta_2\}}{S\Rightarrow_K H\cup\{\beta\}}.$$

模态 K 规则：

$$\pi_L:\frac{S\#\cup\{\pi_0\}\Rightarrow_K H_b}{S\cup\{\pi\}\Rightarrow_K H};\qquad \upsilon_R:\frac{S\#\Rightarrow_K H_b\cup\{\upsilon_0\}}{S\Rightarrow_K H\cup\{\upsilon\}}.$$

其中 $S\# = \{\upsilon_0 \mid \upsilon \in S\}$；$H_b = \{\pi_0 \mid \pi \subset H\}$.

称推导式 $S \Rightarrow_K H$ 在 GPK 中可证，iff 存在 $S \Rightarrow_K H$ 逆向使用 GPK，规则得到的一棵倒生树，每个叶节点满足 GPK 公理，记为 $\vdash S \Rightarrow_K H$，此时该倒生树便称为 $S \Rightarrow_K H$ 的 GPK 证明；否则，记为 $\nvdash S \Rightarrow_K H$. GPK 保持推理过程中任意推导式 $\Rightarrow_K$ 左的公式集来自前提，$\Rightarrow_K$ 右的公式集来自结论，更易于分析推理关系的合理性.

2.2 Gentzen 型推理系统 GPK 的可靠性与完备性

定理 2. Gentzen 型推理系统 GPK 是可靠的，即若 $\vdash S \Rightarrow_K H$，则 $S \Rightarrow_K H$ 有效.

证明：对 $S \Rightarrow_K H$ 在 GPK 中的证明过程所用到的规则数 RNGPK$(S \Rightarrow_K H)$ 归纳.

若 RNGPK$(S \Rightarrow_K H) = 0$，则 $S \Rightarrow_K H$ 满足公理. 不难验证，满足 GPK 公理的推导式有效，即若 $S \Rightarrow_K H$ 满足 GPK 公理，则 H 中公式的析取式是 S 的 K 逻辑结果.

假设 RNGPK$(S \Rightarrow_K H) < X+1$ 时有效；往证 RNGPK$(S \Rightarrow_K H) = X+1$ 时，也有 $S \Rightarrow_K H$ 有效. 对 $S \Rightarrow_K H$ 的 GPK 证明中用到的第 1 条规则分情况讨论：

(1) 若 $S \Rightarrow_K H$ 的 GPK 证明中用到的第 1 条规则为逻辑规则，利用事实：对任意 K 模型 M 及 M 中的任一可能世界 W_i，$M, W_i \models \alpha$ iff $M, W_i \models \alpha_1$ 且 $M, W_i \models \alpha_2$；$M, W_i \models \beta$ iff $M, W_i \models \beta_1$ 或 $M, W_i \models \beta_2$，不难说明：

(1.1) 若 $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \Rightarrow_K H$ 有效，则 $S \cup \{\alpha\} \Rightarrow_K H$ 有效；

(1.2) 若 $S \Rightarrow_K H \cup \{\alpha_1\}$ 和 $S \Rightarrow_K H \cup \{\alpha_2\}$ 均有效，则 $S \Rightarrow_K H \cup \{\alpha\}$ 有效；

(1.3) 若 $S \cup \{\beta_1\} \Rightarrow_K H$ 和 $S \cup \{\beta_2\} \Rightarrow_K H$ 均有效，则 $S \cup \{\beta\} \Rightarrow_K H$ 有效；

(1.4) 若 $S \Rightarrow_K H \cup \{\beta_1, \beta_2\}$ 有效，则 $S \Rightarrow_K H \cup \{\beta\}$ 有效.

从而，利用归纳假设可说明在 RNGPK$(S \Rightarrow_K H) = X+1$ 时，也有 $S \Rightarrow_K H$ 有效.

(2) 若 $S \Rightarrow_K$ 的 GPK 证明中用到的第 1 条规则为 π_L：$\dfrac{S\# \cup \{\pi_0\} \Rightarrow_K H_b}{S \Rightarrow_K H}$；其中 $\pi \in S$；因为 RNGPK$(S \Rightarrow_K H) = X+1$，所以，RNGPK$(S\# \cup \{\pi_0\} \Rightarrow_K H_b) = X$；根据归纳假设，$S\# \cup \{\pi_0\} \Rightarrow_K H_b$ 有效. 设 $H_b = \{\pi_{10}, \ldots, \pi_{y0}\}$，据 H_b 的定义，有 $\{\pi_1, \ldots, \pi_y\} \subseteq H$. 对 S 的任意 K 模型 $M = \langle W, R, m \rangle$，$\forall W_i \in W$，因为 $\pi \in S$；如果 $M, W_i \models S$，则 $\exists W_j \in W$，$W_i \mathrm{R} W_j$ 且 $M, W_j \models S\# \cup \{\pi_0\}$；因为 $S\# \cup \{\pi_0\} \Rightarrow_K H_b$ 有效，所以，$\exists n \in \{1, \ldots, y\}$，$M, W_j \models \pi_{n0}$；于是，$M, W_i \models \pi_n$，从而 $M, W_i \models (\vee H)$. 由 M 和 W_i 的任意性，$S \Rightarrow_K H$ 有效.

(3) 若 $S \Rightarrow_K H$ 的 GPK 证明中用到的第 1 条规则为 υ_R：$\dfrac{S\# \Rightarrow_K H_b \cup \{\upsilon_0\}}{S \Rightarrow_K H}$；其中 $\upsilon \in H$；因为 RNGPK$(S \Rightarrow_K H) = X+1$，所以，RNGPK$(S\# \Rightarrow_K H_b \cup \{\upsilon_0\}) = X$；据归纳假设，$S\# \Rightarrow_K H_b \cup \{\upsilon_0\}$ 有效. 对 S 的任意 K 模型 $M = \langle W, R, m \rangle$，$\forall W_i \in W$，如果 $M, W_i \models S$，往证 $M, W_i \models (\vee H)$.

(3.1) 若不存在 $W_j \in W$ 满足 $W_i \mathrm{R} W_j$，则 $M, W_i \models \upsilon$，从而 $M, W_i \models (\vee H)$.

(3.2) $\forall W_j \in W$，若 $W_i \mathrm{R} W_j$，由于 $M, W_i \models S$，所以，$M, W_j \models S\#$，因为 $S\# \Rightarrow_K H_b \cup \{\upsilon_0\}$ 有效，所以，$M, W_i \vee (H_b \cup \{\upsilon_0\})$.

(3.2.1) 如果 $\forall W_j \in W$，若 $W_i \mathrm{R} W_j$ 则 $M, W_j \models \upsilon_0$，此时 $M, W_i \models \upsilon$，从而 $M, W_i \models (\vee H)$；

(3.2.2) 否则，存在 $W_j \in W$，$W_i \mathrm{R} W_j$ 且 $M, W_j \not\models \upsilon_0$，由于 $M, W_j \models \vee (H_b \cup \{\upsilon_0\})$，必有 $M, W_j \models \vee (H_b)$. 于是 $M, W \models (\vee H)$.

由 M 和 W_i 的任意性，$S \Rightarrow_K H$ 有效. 归纳完成. □

为了证明 GPK 的完备性，需要引入度的概念. 公式 G 的度记为 $d(G)$，递归定义如下：

(1) 若 G 是任意命题变元或其否定，则 $d(G) = 0$；

(2) $d(\alpha) = d(\alpha_1) + d(\alpha_2) + 1$；

(3) $d(\beta) = d(\beta_1) + d(\beta_2) + 1$；

(4) $d(\upsilon) = d(\upsilon_0) + 1$；

(5) $d(\pi) = d(\pi_0) + 1$.

公式集 S 的度 $d(S)$ 定义为 $d(S) = \sum_{G \in S} d(G)$.

定理 3. Gentzen 型推理系统 GPK 是完备的，即若 $S \Rightarrow_K H$ 有效，则 $\vdash S \Rightarrow_K H$.

证明：只需证明定理的逆否命题：若 $\nvdash S \Rightarrow_K H$ 则 $S \Rightarrow_K H$ 不有效.

由于 GPK 的推理规则均是对 $S \Rightarrow_K H$ 前项 S 和后项 H 的度减少操作，且对任意有限公式集 S 和 H，$d(S) + d(H)$ 有限，从而 GPK 的推理过程必终止. 对 $d(S) + d(H)$ 归纳：

(1) 若 $d(S)+d(H)=0$,推导式 $S\Rightarrow_K H$ 的前提和结论均是文字集,无规则可用;由于 $\nvdash S\Rightarrow_K H$,$S\Rightarrow_K H$ 不满足公理,于是 $S\cap H=\varnothing$ 且 H 不含互补对.对任意 K 模型 M 的任意可能世界 W_i,如下构造公式的真值指派 m:对任意原子 P,

若 $P\in S$ 且 $\sim P\in S$,令 $m(W_i,P)=0.5$;

若 $P\in S$ 且 $\sim P\notin S$,令 $m(W_i,P)=1$;

若 $P\notin S$ 且 $\sim P\in S$,令 $m(W_i,P)=0$.

显然,$M,W_i\models S$.$\forall G\in H$ 或者 $G\notin S$ 但是 G 的互补文字 $G'\in S$,此时,必有 $(W_i,G')=1$,$m(W_i,G)=1-m(W_i,G')=0$;或者 $G\notin S$ 且 G 的互补文字 $G'\notin S$,此时可令 $m(W_i,G)=0$;于是,$M,W_i\not\models(\vee H)$.因此,$S\Rightarrow_K H$ 不有效.

(2) 不妨设 $d(S)+d(H)\leqslant N$ 时,若 $\nvdash S\Rightarrow_K H$,则 $S\Rightarrow_K H$ 不有效;往证 $d(S)+d(H)=N+1$ 时,命题也成立.

(2.1) 若 S 或 H 含 α 型或 β 型公式,即有逻辑规则可用:

(2.1.1) 若 $S=S'\cup\{\alpha\}$,对 $S\Rightarrow_K H$ 实施 α_L 规则:$\dfrac{S'\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}\Rightarrow_K H}{S'\cup\{\alpha\}\Rightarrow_K H}$;因为 $\nvdash S\Rightarrow_K H$,所以,$\nvdash S'\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}\Rightarrow_K H$.$d(S'\cup\{\alpha_1,\alpha_2\})+d(H)=N$,据归纳假设,$S'\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}\Rightarrow_K H$ 不有效,即存在一 K 模型 M 及 M 中的一个可能世界 W_i,$M,W_i\models S'\cup\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 且 $M,W_i\not\models(\vee H)$.由于 $M,W_i\models\alpha$ iff $M,W_i\models\{\alpha_1,\alpha_2\}$,所以,$M,W_i\models S$ 且 $M,W_i\not\models(\vee H)$.从而 $S\Rightarrow_K H$ 不有效.

同理,利用事实:对任意 K 模型 M 以及 M 中任一可能世界 W_i,$M,W_i\not\models\alpha$ iff $M,W_i\models\alpha_1$ 且 $M,W_i\models\alpha_2$;$M,W_i\models\beta$ iff $M,W_i\models\beta_1$ 或 $M,W_i\models\beta_2$.不难完成下述情况的归纳证明:

(2.1.2) $\alpha\in H$;

(2.1.3) $\beta\in S$;

(2.1.4) $\beta\in H$.

(2.2) 若 S 和 H 既不包含 α 型公式也不包含 β 型公式,即 S 和 H 中只含文字、υ 型公式或 π 型公式,不妨设:$S=\{A_{S1},\dots,A_{SX},\upsilon_{S1},\dots,\upsilon_{SY},\pi_{S1},\dots,\pi_{SZ}\}$,$H=\{A_{H1},\dots,A_{HX},\upsilon_{H1},\dots,\upsilon_{HY},\pi_{H1},\dots,\pi_{HZ}\}$.

(2.2.1) 因为 $\nvdash S\Rightarrow_K H$,$S\Rightarrow_K H$ 不满足公理,于是 $\{A_{S1},\dots,A_{SX}\}\cap\{A_{H1},\dots,A_{HX}\}=\varnothing$ 且 $\{A_{H1},\dots,A_{HX}\}$ 不含互补对,类似情形(1),可靠构造 K 模型 M_0 及其中的可能世界 W_0,使得 $M_0,W_0\models\{A_{S1},\dots,A_{SX}\}$ 而且 $M_0,W_0\not\models(\vee\{A_{H1},\dots,A_{HX}\})$.

(2.2.2) 因为有 π_L 规则,而且 $\nvdash S\Rightarrow_K H$,所以,$\forall i\in\{1,\dots,Z\}$,$\nvdash\{\upsilon_{S10},\dots,\upsilon_{SY0},\pi_{Si0}\}\Rightarrow_K\{\pi_{H10},\dots,\pi_{HZ0}\}$.根据归纳假设,$\{\upsilon_{S10},\dots,\upsilon_{SY0},\pi_{Si0}\}\Rightarrow_K\{\pi_{H10},\dots,\pi_{HZ0}\}$ 不有效,即存在 K 模型 M_{Si} 及 M_{Si} 中的可能世界 W_{Si},使得 $M_{Si},W_{Si}\models\{\upsilon_{S10},\dots,\upsilon_{SY0},\pi_{Si0}\}$,而且 $M_{Si},W_{Si}\not\models(\vee\{\pi_{H10},\dots,\pi_{HZ0}\})$.

(2.2.3) 因为有 υ_R 规则,而且 $\nvdash S\Rightarrow_K H$,所以,$\forall i\in\{1,\dots,y\}$,$\nvdash\{\upsilon_{S10},\dots,\upsilon_{SY0}\}\Rightarrow_K\{\pi_{H10},\dots,\pi_{HZ0},\upsilon_{Hi0}\}$.根据归纳假设,$\{\upsilon_{S10},\dots,\upsilon_{SY0}\}\Rightarrow_K\{\pi_{H10},\dots,\pi_{HZ0},\upsilon_{Hi0}\}$ 不有效,于是存在 K 模型 M_{Hi} 及 M_{Si} 中的可能世界 W_{Hi},使得 M_{Hi},$W_{Hi}\models\{\upsilon_{S10},\dots,\upsilon_{SY0}\}$,而且 $M_{Hi},W_{Hi}\not\models(\vee\pi_{H10},\dots,\pi_{HZ0},\upsilon_{Hi0})$.

不妨设模型 $M_0,M_{S1},\dots,M_{SZ},M_{H1},\dots,M_{Hy}$ 中的可能世界互不同名.设 M_{Si} 中 W_{Si} 与 W_{Si} 可达的可能世界集为 SW_{Si};W_{Si} 上的可达关系为 $S_{Si}(i\in\{1,Z\})$;设 M_{Hi} 中 W_{Hi} 与 W_{Hi} 可达的可能世界集为 SW_{Hi};W_{Hi} 上的可达关系为 R_{Hi},$i\in\{1,y\}$).我们可如下构造 K 模型 M,令 M 的可能世界集为 $W=\{W_0\}\cup SW_{S1}\cup\dots\cup SW_{SZ}\cup\dots\cup SW_{H1}\cup\dots\cup SW_{Hy}$,$M$ 可达关系为 $R=R_{S1}\cup\dots\cup R_{SZ}\cup R_{H1}\cup\dots\cup R_{Hy}\cup\{W_0\,\mathrm{R}\,W_{S1},\dots,W_0\,\mathrm{R}\,W_{SZ},W_0\,\mathrm{R}\,W_{H1},\dots,W_0\,\mathrm{R}\,W_{Hy}\}$,$M$ 的真值指派 m 由 $M_0,M_{S1},\dots,M_{SZ},M_{H1},\dots,M_{Hy}$ 对 W 中的可能世界的真值指派构成.容易证明:$M,W_0\models S$,而且 $M,W_0\not\models(\vee H)$,从而 $S\Rightarrow_K H$ 不有效.归纳完成. □

由 GPK 可靠性和完备性可知,$S\Rightarrow_K H$ iff $\vdash S\Rightarrow_K\{H\}$,因此,GPK 可作为次协调的模态逻辑 K 的证明论.

2.3 其他次协调的正规模态逻辑的 Gentzen 型推理系统

由于 GPK 的公理和逻辑规则不涉及模态算子,可以证明在任意次协调的正规模态逻辑中,GPK 的公理均有效,GPK 的逻辑规则均保持推导式的有效性.对于其他次协调的正规模态逻辑系统,只需将模态 K 规则改为相应的模态规则.例如,对于模态 $S4$ 系统,只需将 GPK 的模态 K 规则改为模态 $S4$ 规则:

$$\pi_L:\frac{S\#\cup\{\pi_0\}\Rightarrow_{S4}H_b}{S\cup\{\pi\}\Rightarrow_{S4}H},\quad \pi_R:\frac{S\Rightarrow_{S4}H\cup\{\pi_0\}}{S\Rightarrow_{S4}H\cup\{\pi\}},$$

$$\upsilon_L:\frac{S\cup\{\upsilon_0\}\Rightarrow_{S4}H}{S\cup\{\upsilon\}\Rightarrow_{S4}H},\quad \upsilon_R:\frac{S\#\Rightarrow_{S4}H_b\cup\{\upsilon_0\}}{S\Rightarrow_{S4}H\cup\{\upsilon\}}.$$

其中 $S\#=\{\upsilon|\upsilon\in S\}$,$H_b=\{\pi|\pi\in H\}$,便得到相应的 Gentzen 型推理系统,其可靠性和完备性证明不再给出.

3 进一步工作

类似于经典Gentzen系统,本文讨论的次协调的命题模态逻辑的Gentzen型推理系统不是确定的,规则的使用是随意的.对于一个推导式,有多种可能的Gentzen演绎.我们可以系统地给出确定的推理过程.例如对于GPK,(1)要求逻辑规则先于模态K规则使用;(2)在使用模态K规则时,同时生成所有可能的后继,只要有一个后继可证即得到该推导式的证明类似于模糊择优逻辑中的作法.我们还可以通过对Gentzen型推理树进行剪枝以体现不同的择优关系,提高推理关系的合理性,详细讨论另文给出.在Gentzen演绎过程中结合模态推理的删除策略[6]和标记策略[7]以提高效率是我们进一步研究的任务.

参考文献

1 Fitting M. First-order modal tableaux. Journal of Automated Reasoning, 1988,(4):191～213

2 Enjalbert P, Farinas Del Cerro L. Modal resolution in clausal form. Theoretical Computer Science, 1989,(65):1～34

3 Benferhat S, Cayrol C, Dubois D *et al.* Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In: Selman B ed. Proceedings of the 13th International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1993. 640～645

4 Benferhat S, Dubois D, Prade H. How to infer from inconsistent beliefs without revising. In: Mellish Chris S ed. Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1995. 1449～1455

5 Cheng X C, Jiang Y F, Liu X H. The rationality and decidability of fuzzy implications. In: Mellish Chris S ed. Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence. San Mateo, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1995. 1910～1915

6 孙吉贵,刘叙华.模态归结弱包含删除策略.计算机学报,1994,17(5):321～329
(Sun Ji-gui, Liu Xu-hua. Deletion strategy using weak subsumption relation for modal resolution. Chinese Journal of Computers, 1994,17(5):321～329)

7 周萍,唐日昆,孙吉贵等.命题模态归结的一种变形.计算机学报,1994,17(9):662～668
(Zhou Ping, Tang Ri-kun, Sun Ji-gui *et al.* A variant of propositional modal resolution. Chinese Journal of Computers, 1994,17(9):662～668)

Paraconsistent Modal Logic

CHENG Xiao-chun SUN Ji-gui JIANG Yun-fei

(*Department of Computer Science Jilin University Changchun* 130023)

Abstract Generalize the methods of paraconsistent fuzzy reasoning into modal logic, propose a paraconsistent modal logic, whose logical consequence is a modal extension of a paraconsistent fuzzy implication, which has the abilities of both handling inconsistency and representing multi-world modals, and present its sound and complete Gentzen style inference system.

Key words Modal logic, paraconsistent logic, fuzzy logic, Gentzen system.