

应用可变形模型进行曲线曲面光顺*

经玲 席平 唐荣锡

(北京航空航天大学制造工程系 北京 100083)

摘要 根据物理模型的造型技术可以从另一个角度研究曲线曲面的光顺问题。基于能量的可变形曲线曲面可用于光顺一批有误差的散乱数据点。该方法不要求数据点有序的条件,通过在数据点与曲线和曲面之间连接假想弹簧,可以克服“光顺”和“插值”的矛盾,得到所需形状。文章采用三次B样条几何表达形式,建立了光顺模型,分析了光顺机理,并给出了一个算法和几个应用实例。

关键词 可变形模型,光顺,散乱数据,B样条,有限元方法,假想弹簧。

中图分类号 TP391

光顺问题是CAGD的经典问题之一。在造船、航空、汽车等工业部门的外形设计中占有重要地位。在数学放样中,原始的外形信息一般是离散的型值点,这些数据点往往带有一定的误差。由这些测量点拟合成曲线或曲面时就会产生波动。

常用的曲线光顺方法有两大类:(1)整体光顺法,如最小二乘法、能量法、回弹法等,都是将光顺问题转化为目标函数的极小化问题。其基本思想是一致的,目标函数包含型值点的偏离和光顺两部分的加权平均,光顺时要用到全部型值点来进行修改。(2)局部光顺法,如圆率法、基样条法等,都是选点修改法,是在假设大多数型值点都是好的或比较好的基础上,把少数坏点挑出来逐个予以修改。但当连续出现多个坏点时,往往不容易处理好。

有关曲面光顺问题讨论得很少。实际工作中,通常将此问题转化为沿两个参数方向网格曲线的光顺问题。这时改动一个数据点,要考虑到过该点的两条网格线的影响。所以,修形工作通常沿两个参数方向交替反复进行,直到双向网格线都达到光顺为止。然而,曲面网格线光顺了,并不等于样条曲面就光顺了。故曲面的整体光顺问题一直是个难点。

以上光顺方法所用到的数据点都假设分布在网格线上,即是有序的,而且所采用的参数化方法通常与数据点的分布情况有关。对于无序的数据,用以上方法则难以处理好,而且有序化这些点也是困难和耗时的。本文讨论用可变形模型对散乱数据点进行光顺。

可变形曲线和曲面由 Terzopoulos 等人于 1987 年引入 CAGD^[1],随后,有许多文献对此进行讨论。^[2-6]该模型将参数化描述的几何信息与能量极小化算法相结合,赋予曲线、曲面力学特性,如拉伸刚度、弯曲刚度等。可变形模型在一定约束条件下使内在变形成能达到极小,其变形形态在一定程度上与弹性梁或板壳的变形形态相似,因而具有自然、光顺的特点。该模型被文献^[7]用于通过交互修改形状的参数来达到光顺目的,但数据点仍是有序的。后来,文献^[8,9]讨论了散乱数据的光顺问题,但仅限于平面曲线及 Hermite 几何形式。本文将采用 B 样条形式,对曲线、曲面的有关问题进行讨论。

1 光顺模型

1.1 可变形曲线、曲面模型

在一定的几何约束及外力作用下,变形曲线、曲面发生形变,最终将达到平衡状态,此时曲线、曲面的内在变形成 $U(r)$ 达到极小。该变形成是定义在曲线曲面整个参数域上的积分泛函,它与曲线和曲面的微分几何量有关。

对于曲线 $r=r(u)=(x(u), y(u), z(u))$, 内在变形成定义为

$$U(r) = \int \left[\alpha \frac{dr^T}{du} \frac{dr}{du} + \beta \frac{d^2r^T}{du^2} \frac{d^2r}{du^2} + \gamma \frac{d^3r^T}{du^3} \frac{d^3r}{du^3} \right] du \quad (1)$$

* 本文研究得到国家自然科学基金资助。作者经玲,女,1969年生,博士,主要研究领域为曲线、曲面造型及应用。席平,女,1954年生,博士后,副教授,主要研究领域为CAD/CAM。唐荣锡,1928年生,教授,博士生导师,主要研究领域为CAD/CAM技术研究与应用。

本文通讯联系人,唐荣锡,北京100083,北京航空航天大学制造工程系703教研室

本文1997-03-04收到原稿,1997-06-09收到修改稿

对于曲面 $r=r(u, v)$, 内在变形能定义为

$$U(r) = \iint \left(a_{11} \frac{\partial r^T}{\partial u} \frac{\partial r}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial r^T}{\partial v} \frac{\partial r}{\partial v} + \beta_{11} \frac{\partial^2 r^T}{\partial u^2} \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} + \beta_{12} \frac{\partial^2 r^T}{\partial u \partial v} \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + \beta_{22} \frac{\partial^2 r^T}{\partial v^2} \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} \right) dudv \quad (2)$$

式(1)(2)中的 a, β 具有较明确的物理意义和几何意义, 它们分别相当于拉伸刚度和弯曲刚度, 控制着曲线、曲面的拉伸和弯曲变形。 γ 仅具有一定的几何意义, 当曲线的一阶导数的模长 $\| \frac{dr}{du} \|$ 很小时, 二阶导数的模长 $\| \frac{d^2r}{du^2} \|$ 近似于曲线的曲率 K , 这时, 三阶导数 $\frac{d^3r}{du^3}$ 可看作是曲率变化 $\frac{dK}{du}$ 的近似。由于圆弧和直线的曲率变化为零, 故当极小化曲线一阶、二阶导数模长平方和的同时, 加入三阶导数项可使曲线在约束允许的条件下趋于圆弧。

可变形曲线、曲面在受到外力作用时将发生形变, 由达朗伯方程可得曲线、曲面达平衡状态时的平衡方程为

$$\frac{\delta U(r)}{\delta r} = f_{\text{external}} \quad (3)$$

式中 δ 表示一阶变分, f_{external} 为外力。

1.2 可变形曲线、曲面的光顺模型

利用可变形模型进行光顺时, 除了考虑使所得曲线、曲面光顺外, 还应使所得形状保持原始曲线、曲面的特征, 即与型值点之间的距离保持在一定允许范围内。对于这种有约束的极值问题(条件极值), 我们采用罚函数法, 通过罚因子将约束引入能量泛函式中, 转化为无条件极值问题进行处理。经过这样的修改后, 光顺模型的内在变形能为

$$E(r) = U(r) + \sum_{i=1}^M K_i \| p_i - r(u) \|^2 \quad (4)$$

其中 M 表示型值点个数, $K_i \geq 0$ 为对应于型值点 P_i 的罚因子。通过调整式(4)中罚因子的大小, 可以改变曲线、曲面的光顺程度及对型值点的逼近程度。即光顺问题可表示为: 求 r_0 , 使

$$r_0 = \min_r E(r) \quad (5)$$

从式(4)可以看出, 本文的能量函数中包含所有的型值点, 是一种整体光顺法。它由两部分组成, 第1部分是光顺项, 它决定所得曲线、曲面的光顺性; 第2部分是误差项, 它决定所得形状与型值点的偏离程度。从这一方面来看, 与以前的整体光顺法相似, 但又有区别, 如光顺项。对于曲线, 式(3)中不仅含有二阶导数项, 而且还增加了一阶导数和三阶导数项。对于曲面, 式(3)中不仅含有二阶偏导数项, 而且增加了一阶偏导数、二阶混合偏导数项。通过选取不同类型的权因子, 可使所得曲线、曲面更合乎型值点分布的要求。另外一个区别是误差项的计算问题。对于以前的整体光顺法, 型值点与曲线、曲面上的点之间有一一对应关系, 故误差项是对应点间距离的平方和。这种计算方法要求型值点间有顺序, 而式(4)中的误差项是型值点与曲线或曲面最短距离的平方和, 这就避免了“型值点的有序性”这个问题。

光顺模型的光顺机理如图1所示。式(4)中误差项的作用相当于在每个型值点与曲线或曲面之间引入弹簧约束, 弹簧的一端固定在型值点处, 另一端可在曲线或曲面上滑动, 以使弹簧伸长量达到极小, 即型值点与曲线、曲面间距离最短。弹簧力的大小与最短距离成比例。 K_i 的作用类似于弹簧的刚度系数, 其值越大, 弹簧刚度越大, 曲线和曲面越接近型值点, 但光顺效果就要差一些。可见, 曲线、曲面的光顺性往往是以牺牲曲线、曲面插值于给定型值点的精确性作为代价的。光顺模型是可变形系统与弹簧系统的合成, 其第1项是可变形系统的能量, 第2项是弹簧系统的能量。

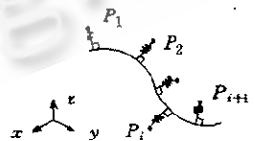


图1 光顺机理示意图

2 光顺过程

2.1 光顺算法

光顺时, 先从某个初始形状开始, 该初始形状不一定是最优形状。这里所谓的最优形状, 是指在给定条件下满足设计要求的曲线或曲面。计算出每个型值点到初始形状的最短距离 d_i 及曲线或曲面相应的能量函数 $E(r)$, 然后判断曲线曲面是否满足设计要求。我们称之为收敛性条件检查, 若条件满足, 则停止; 否则, 改变条件, 求出新的曲线曲面。重复以上步骤后, 可得所需形状。收敛性条件可根据具体设计目的而定。

例如, 选能量函数相对变化率 $\frac{E^{(i+1)}(u) - E^{(i)}(u)}{E^{(i)}(u)} < \epsilon$ 为准则, 其中 $E^{(i)}(r)$ 表示第 i 次得到的曲线曲面的能量函数值, 这时强调的是光顺性; 或选最大的最短距离 $\max\{d_1, \dots, d_m\} < \epsilon$ 为准则, 这时注重的是插值精确性。其中 ϵ 为预先给定的某个精度。本文采用第2种方法。具体算法如下。

STEP1: 由位于边界处的所给数据拟合出一个初始形状, 并给出一组初始弹簧刚度系数及刚度系数迭代步长;

- STEP2: 在给定条件下,根据平衡方程(3),得到经过光顾后的曲线或曲面;
- STEP3: 计算型值点与STEP2中所得曲线、曲面间的距离 d_i ;
- STEP4: 进行收敛性检查.若收敛性条件满足,则终止,否则分两种情况:
 - (1) 若 $\max\{d_1, d_2, \dots, d_M\} \ll \epsilon$ 时,则按步长减小弹簧弹性系数 K_i ;
 - (2) 若 $\max\{d_1, d_2, \dots, d_M\} > \epsilon$ 时,则按步长增大弹簧弹性系数 K_i ;
 转STEP2.

2.2 曲线、曲面的几何表达形式及求解方法

在大多数的几何设计中,二阶导数连续已能满足设计要求.但也可根据具体情况采用高阶形式,本文采用三次B样条形式,对于高阶情形仍适用.

三次B样条情形可表示为

$$C(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,4} P_i \tag{6}$$

式中 $N_{i,4}(u)$ 为定义在非减节点序列 $\{u_i\}$ 上的三次B样条基函数, P_i 为控制顶点.令

$$P = [P_1^T \ P_2^T \ \dots \ P_n^T]^T$$

$$N(u) = \begin{bmatrix} N_{1,4}(u) & 0 & 0 & \dots & N_{n,4}(u) & 0 & 0 \\ 0 & N_{0,4}(u) & 0 & \dots & 0 & N_{n,4}(u) & 0 \\ 0 & 0 & N_{0,4}(u) & \dots & 0 & 0 & N_{n,4}(u) \end{bmatrix}$$

这里 P 为广义坐标,其维数是 $3 \times (n+1)$. 则式(6)可改写为

$$C(u) = N(u)P \tag{7}$$

以二次B样条曲面可表示为

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{i,4}(u) N_{j,4}(v) P_{i,j} \tag{8}$$

式中 $P_{i,j}$ 为控制顶点, $N_{i,4}(u), N_{j,4}(v)$ 分别为定义在非减节点序列 $\{u_i\}, \{v_j\}$ 上的三次B样条基函数.令

$$P = [P_{0,0}^T \ P_{0,1}^T \ \dots \ P_{m,n-1}^T \ P_{m,n}^T]^T$$

$$N(u, v) = \begin{bmatrix} N_{0,4}(u)N_{0,4}(v) & 0 & 0 & \dots & N_{m,4}(u)N_{n,4}(v) & 0 & 0 \\ 0 & N_{0,4}(u)N_{0,4}(v) & 0 & \dots & 0 & N_{m,4}(u)N_{n,4}(v) & 0 \\ 0 & 0 & N_{0,4}(u)N_{0,4}(v) & \dots & 0 & 0 & N_{m,4}(u)N_{n,4}(v) \end{bmatrix}$$

这里 P 是广义坐标,其维数为 $3(m+1)(n+1)$. 则式(8)可写为

$$S(u, v) = N(u, v)P \tag{9}$$

一般情况下,对于刚性物体的空间问题,常转化为3个相互独立的 x, y, z 方向的问题来求解.但对于非刚性物体,受力时将发生形变.当受到沿某个坐标方向的外力时,物体不可能仅沿该方向发生形变,其他两个方向也将发生形变.本文的光顺模型即是一种可变形物,故用“广义坐标”统一求解3个坐标分量,就是基于这个原因.

曲线、曲面在弹簧力作用下发生变形,最终达到平衡状态,其平衡方程可写为

$$KP = f$$

式中 K 为曲线或曲面的刚度矩阵, f 为载荷列阵.具体推导及表示见文献[4].实际应用时,我们采用了类似有限元法的一种方法,不妨称之为“变形有限元法”.该方法先利用曲线或曲面上的型值点进行网格剖分,这与有限元法一致;然后再将有限的剖分单元对应到变形有限元的控制顶点单元上去.这样对于三次均匀B样条曲线,有限元单元有2个结点,而变形有限元单元有4个结点;对于双三次均匀B样条曲面,有限元单元有4个结点,而变形有限元有16个结点.图2给出了曲线有限元单元与变形有限元单元之间的对应关系.

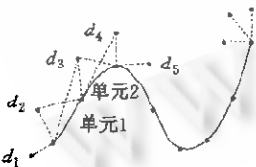


图2 有限元法与变形有限元法单元节点对应关系

2.3 最短距离 d_i 的计算

求最短距离的问题可描述为“已知空间一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 和一条三次均匀B样条曲线 $r=r(u), u \in [0, 1]$, 或 $r=r(u, v), u, v \in [0, 1]$, 求一点 Q , 满足 $Q=r(u_Q)$ 或 $Q=r(u_Q, v_Q)$, 使得 $|PQ| = \min |P-r|$ ”.

因为 $|PQ| = \sqrt{(P-Q)^T(P-Q)}$, 为避免开方运算,考虑 $|PQ|^2$ 的极小化问题.对于曲线,问题可表述为

$$\begin{cases} \min G(u) = (P-r(u))^T(P-r(u)) \\ s.t. \quad 0 \leq u \leq 1 \end{cases} \tag{10}$$

$r(u)$ 是3次多项式函数,故 $G(u)$ 为6次多项式函数.求 $G(u)$ 的极小化问题转化为求 $g(u) = \frac{dG(u)}{du} = 0$ 的解的问题.

对于曲面,问题可描述为

$$\begin{cases} \min G(u,v) = (P - r(u,v))^T(P - r(u,v)) \\ \text{s.t. } 0 \leq u, v \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

同理, $G(u,v)$ 分别是 u,v 的6次多项式函数,求极小化问题转化为解方程组 $\begin{cases} \frac{\partial G(u,v)}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial G(u,v)}{\partial v} = 0 \end{cases}$ 的问题.

3 应用实例

例1,从半径为1的半圆上取出13个数据点进行拟合.假设数据点间有顺序且无误差.当曲线能量函数中的参数 α, β, γ 取不同的值时,将产生不同的效果,如图3所示.图3(a)显示的是当 $\alpha=1.0, \beta=0.0, \gamma=0.0$ 时生成的插值三次B样条曲线,这时能量函数中只有与拉伸有关的项,图中曲率分布较混乱.当 $\alpha=0.0, \beta=1.0, \gamma=0.0$ 时的图形见图3(b),这时能量函数中只有与弯曲有关的项,曲率分布较均匀.但在两端处,曲率突然变得很大,这不符合原始数据点所描述的图形特性.图3(c)描述的是当 $\alpha=0.1, \beta=0.1, \gamma=100$ 时所生成图形.这时三阶导数项在能量函数中起到一定的作用,生成的曲线与圆弧较接近.

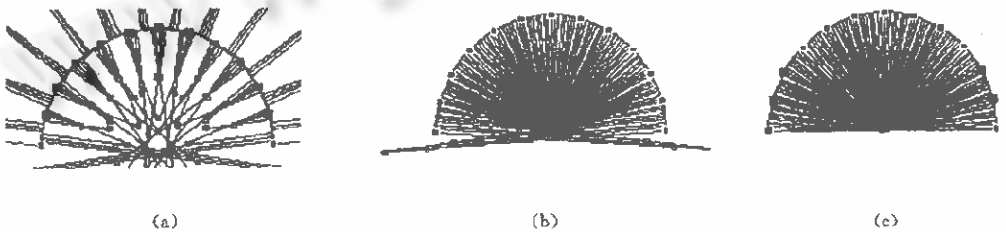


图3

例2,图4(a)是某汽车柴油发动机进气道的一段截面线,它是一条通过12个数据测量点构造的三次B样条曲线.图中细实线是曲线上各点的曲率半径,可见其光顺性较差.图4(b)是经光顺后的曲线,其曲率变化比较规律,光顺性大大改善了,型值点最大位移=0.053 325mm,最小位移=0.000 002mm.



图4 光顺前后某汽车发动机进气道截面线图

例3,图5(a)是某汽车柴油发动机进气道的 33×20 个数据测量点构造的插值曲面,从等照度线可看出光顺性很差.通过光顺后能得到光顺性较好的曲面,等照度线的分布变得均匀,如图5(b)所示,型值点最大位移=0.933 825mm,最小位移=0.000 116mm.

光顺时,我们总希望相对于测量点的偏差在边界处为零,而在曲面内部允许有一定的偏差,这种偏差量的大小由式(4)中的弹簧刚度系数 K_i 来决定.对于相同的一批数据点,当边界点的 K_i 远大于内部点的 K_i 值时,虽然能保证在边界处最大位移为零,但生成的曲面将在边界处发生严重的皱折现象.我们所做的大量试验表明,当边界点处的 K_i 为内部点处 K_i 的100倍时,将产生较理想的情形.

本文所给算法只与边界处的数据点分布有关,与内部数据点分布无关.因此,在生成曲线或曲面时,可以根据边界数据点的分布特点采用不同的参数化方法.在以上示例中,所给数据点分布较均匀,故实现时采用了均匀三次B样条几何表达形式,所得曲线曲面的光顺效果较好.另外,由于采用有限元方法统一计算,可以对曲线或曲面进行大范围的整体光顺.对于例3所示 33×20 个数据点的曲面,用本文算法可在486/66微机上几秒钟内完成整体光顺工作.

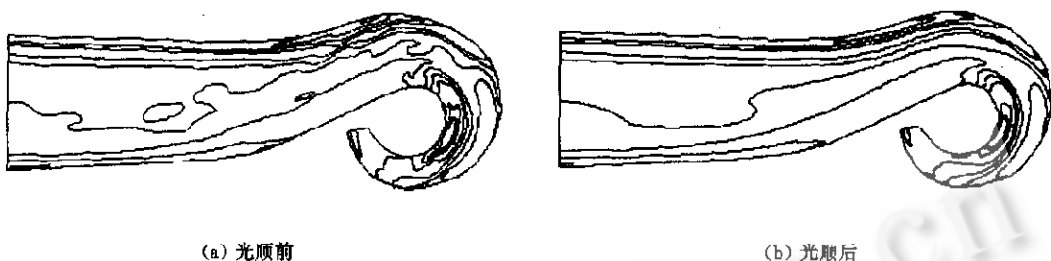


图5 光顺前后某汽车发动机进气道插值曲面图

4 结论

基于可变形模型,本文讨论了由一批有误差的散乱数据点拟合成光顺B样条曲线和曲面的问题.所生成的曲线和曲面具有较好的光顺性.该方法也适用于数据点有序的情形.

致谢 作者对为本文工作提供大力支持和帮助的王亚平等老师表示衷心的感谢!

参考文献

- 1 Terzopoulos D, Platt J, Barr A *et al.* Elastically deformable models. *Computer Graphics*, 1987,21(4):205~214.
- 2 Celniker G, Gossard D. Energy-based models for free-form surface design. In: *Proceedings of the ASME Design Automation Conference'89*. Montreal, Sep. 1989. 1~14
- 3 Celniker G, Gossard D. Deformable curve and surface finite elements for free-form shape design. *Computer Graphics*, 1991,25(4):257~266
- 4 Terzopoulos D, Qin H. Dynamic NURBS with geometric constraints for interactive sculpture. *ACM Transactions on Graphics*. 1994,13(2):103~136
- 5 关志东,经玲,宁涛等.基于物理模型的变形曲线曲面研究及应用. *计算机学报*,1996,19(增刊):188~193
(Guan Zhi-dong, Jing Ling, Ning Tao *et al.* Study and application of physical-based deformable curves and surfaces. *Chinese Journal of Computers*, 1996,19(supplement):188~193)
- 6 Jing Ling, Guan Zhi-dong, Ning Tao *et al.* Interactive design of deformable model. *CADDM*, 1997,7(1):1~10
- 7 Celniker G, Gossard D. Continuous deformable curves and their application to fairing 3D geometry. In: *Proceedings of the IFIP TC5/WG 5.2 Working Conference on Geometric Modelling*. Rensselaerville, NY: Springer-Verlag, 1990. 16~21
- 8 Fang L, Dossard D C. Fitting 3D curves to unorganized data points using deformable curves. In: *Proceedings of the International Conference'92 on Computer Graphics*. North-Holland, 1992. 535~543
- 9 Fang L, Dossard D C. Multidimensional curve fitting to unorganized data points by nonlinear minimization. *Computer-Aided Design*, 1995,27(1):48~58

Fairing 3D Curves and Surfaces Using Deformable Models

JING Ling XI Ping TANG Rong-xi

(Department of Manufacturing Engineering Beijing University of Aeronautics and Astronautics Beijing 100083)

Abstract The problem of curve and surface fairness is studied from the point of view of physics-based modeling techniques. Energy-based deformable models are used to fit a set of unorganized data points. This method needs no connectivity information about data points. The contradictory of "smooth" and "fit" can be mediated by anchoring an imaginary spring between each data point and deformable curve or surface. The cubic B-spline is adopted as the basis for the deformable curve and surface. The fairing model is established. The principle is analyzed and the algorithm is presented. Some examples are presented.

Key words Deformable model, fairing, unorganized data points, B-spline, finite-element method, imaginary springs.