算法复杂性函数渐近优超等价类的结构性质*

张再跃 张宏裕

(扬州大学数学与计算机科学系 扬州 225002)

摘要 本文建立了算法复杂性函数渐近优超等价类数学结构,并应用递归论研究中的方法和技巧对该结构的性质进行了系统的研究,证明了该结构具有强 Friedberg Muchnic 性质和在偏序意义下的稠密性定理.

关键词 算法复杂性,渐近优超.

中图法分类号 TP301.5

程序是算法的表示,算法分析的任务是研究算法在计算机实现时的复杂程度.一个程序员在关注程序是否正确的同时,也应关注程序的运行效率.众所周知,解决一个问题的方法是多种多样的,因而其算法也具多样性.假定 Q 是一个实际问题,P_f 和 P_g 是针对 Q 的两个不同的算法而编写的程序,则 P_f 和 P_g 的优劣在很大程度上由支持它们的算法来决定.假定 f 和 g 分别是这两种算法的复杂性函数,若 f 所消耗的计算机资源(如时间和空间等)比 g 少,则 P_f 比 P_g 优越.算法复杂性函数与完成算法的程序相关,但从本质上来说,与具体问题的性质更为密切.所以我们可以脱离具体计算机和程序语言,从理论上对复杂性函数间的关系进行研究.这是一项十分有意义的工作.早在60年代,由 Blum 证明的加速定理[1](Speed-up Theorem)便是该领域研究的重要成果之一,它在理论上证明了针对一个具体计算,不存在最好的程序.70年代初,人们采用渐进分析(Asymptotic Analysis)法[2]对算法复杂性函数进行计算,并引进大O概念[3]将研究对象加以分类,通过对某个具体函数的研究来揭示一类函数的性质.到了80年代,算法复杂性函数的研究已逐步形成较为完整的理论体系,这一时期出现的大量著作对此作了具体的阐述和总结.[4,5]

算法复杂性研究和可计算性理论的研究有着密切的关系.利用归约手段将算法复杂性函数分类,并通过建立相关的数学结构对函数间的相关性质进行研究是算法复杂性研究的一种新的尝试,可以认为是递归函数论研究的思想和方法在该领域的推广和应用.研究图林归约下递归可枚举度集 **R** 的结构性质是递归论研究的重要组成部分.著名的 Post 问题的解决正是对 **R** 结构性质研究的结果.在递归论的研究和发展中,逐步形成的一整套的数学思想方法,如有穷损害方法、无穷损害方法、极小对方法和 $0'''$ 方法等等,不仅推动了递归论的发展,在其他的学科领域也得到了广泛的应用.有关递归论方面的知识,读者可参阅文献[6,7].受上述思想的启发,本文用渐近优超的概念将算法复杂性函数进行分类,同时定义了以类作为研究对象的数学结构 **A**[**F**],并应用递归论的有关思想方法对 **A**[**F**]的结构性质进行研究,证明了结构 **A**[**F**]具有强 Friedberg-Muchnic 性质(见定义2.2),并且在偏序意义下是稠密的.

描述算法复杂性的函数通常定义在 ω 集上.若 f 是定义在 ω 集上的算法复杂性函数,则最多对有穷个 n,$f(n)$ 可以无定义或取负值.[8]因此,我们在研究这些函数渐近优超(见定义1)性质时可以把它们看成是 ω 到 ω 上的函数,令 **F** 表示所有这些函数的全体,即 $\mathbf{F}=\{f;f\in\omega^\omega\}$,定义 **F** 上的序"$\leqslant_a$"如下:

定义1.[9]设 f,g 是复杂性函数,若存在自然数 c 和 m,使得对所有 $n\geqslant m$ 都有 $f(n)\leqslant cg(n)$,则称 g 渐近优超(Asymptotically Dominates)f,记为 $f\leqslant_a g$.

显然,"$\leqslant_a$"关系满足反身性和传递性,因而是 **F** 上的偏序.如果 $f\leqslant_a g$,则 g 比 f 增长速度快,或说 f 比 g 消耗较少的资源.

定义2. 设 $f\in\mathbf{F}$,若存在 b 使得 $(\forall n\in\omega)[f(n)\leqslant b]$,则称 f 为有界函数,否则,称 f 为无界函数.

定义3. 设 $f\in\mathbf{F}$ 为一算法复杂性函数,若存在 m 使得 $(\forall n\geqslant m)[f(n)=0]$,则称该算法是免费的.

显然,免费算法消耗的资源最少.一般地,如果函数 f 和 g 相互优超,则相应的两种算法所消耗的资源几乎是等

---

* 本文研究得到国家863高科技项目基金资助.作者张再跃,1961年生,博士,副教授,主要研究领域为基础数学(集论,递归论).张宏裕,1935年生,教授,主要研究领域为集合论,算法复杂性理论.

本文通讯联系人:张再跃,扬州225002,扬州大学数学与计算机科学系

本文1997-01-10收到原稿,1997-05-15收到修改稿

同的.因此,我们可以把相互优超的函数等同对待.为此,我们引进了优超等价类的概念.

1 优超等价类偏序结构

本节我们给出优超等价类偏序结构定义,并证明该结构的一些基本性质.

定义 1.1. 设 $f,g\in \mathbf{F}$ 为算法复杂性函数,如果有 $f\leqslant_a g$ 并且 $g\leqslant_a f$,则称 f 和 g 是等价的,记为 $f\equiv g$.

不难验证,关系"$\equiv$"是 $\mathbf{F}$ 上的等价关系,利用这一等价关系,我们作 $\mathbf{F}$ 的商集 $\mathbf{F}/\equiv=\{[f]:f\in \mathbf{F}\}$,其中 $[f]=\{g:g\equiv f\}$.我们在商集上定义大小关系"$\preccurlyeq$"如下:

定义 1.2. 对任意的 $[f],[g]\in \mathbf{F}/\equiv$,如果 $f\leqslant_a g$,则称 $[f]$ 小于 $[g]$,记为 $[f]\preccurlyeq[g]$.若 $f\leqslant_a g$ 并且 $g\not\leqslant_a f$,则称 $[f]$ 严格小于 $[g]$,记为 $[f]\prec[g]$.

性质 1.3. 大小关系"$\preccurlyeq$"是定义在 $\mathbf{F}/\equiv$ 上的偏序.

定义 1.4. 数学结构 $\langle \mathbf{F}/\equiv,\preccurlyeq\rangle$ 称为算法复杂性函数优超等价类偏序结构,记为 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$.

定义 1.5. 对任意 $[f],[g]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,如果存在 $[h]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,满足 $[f]\preccurlyeq[h]$,$[g]\preccurlyeq[h]$,则称 $[h]$ 为 $[f]$ 和 $[g]$ 的一个上界.如果对任意 $[f]$ 和 $[g]$ 的上界 $[h']$ 都有 $[h]\preccurlyeq[h']$,则称 $[h]$ 是 $[f]$ 和 $[g]$ 在 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 中的上确界,记为 $[h]=[f]\vee[g]$.

性质 1.6. 对任意 $[f],[g]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 和任意 $n<\omega$,令 $h(n)=\max\{f(n),g(n)\}$,则 $[h]=[f]\vee[g]$.

证明:由函数 h 的定义知,$f\leqslant_a h$,$g\leqslant_a h$,因而有 $[f]\preccurlyeq[h]$,$[g]\preccurlyeq[h]$.对任意的 $[h']\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,如果有 $[f]\preccurlyeq[h']$,$[g]\preccurlyeq[h']$,我们证明 $[h]\preccurlyeq[h']$.

由 $[f],[g]\preccurlyeq[h']$ 知 $f\leqslant_a h'$ 和 $g\leqslant_a h'$,因而

$$(\exists\ c_1)(\exists\ m_1)(\forall\ n)[n\geqslant m_1\Rightarrow f(n)\leqslant c_1h'(n)]$$

$$(\exists\ c_2)(\exists\ m_2)(\forall\ n)[n\geqslant m_2\Rightarrow g(n)\leqslant c_2h'(n)]$$

取 $c=\max\{c_1,c_2\}$,$m=\max\{m_1,m_2\}$,则当 $n\geqslant m$ 时,有 $h(n)\leqslant ch'(n)$,因而有 $h\leqslant_a h'$,所以 $[h]\preccurlyeq[h']$. □

定义 1.7. 对任意 $[f],[g]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,如果存在 $[h]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,满足 $[h]\preccurlyeq[f]$,$[h]\preccurlyeq[g]$,则称 $[h]$ 为 $[f]$ 和 $[g]$ 的一个下界.如果对任意 $[f]$ 和 $[g]$ 的下界 $[h']$ 都有 $[h']\preccurlyeq[h]$,则称 $[h]$ 是 $[f]$ 和 $[g]$ 在 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 中的下确界,记为 $[h]=[f]\wedge[g]$.

性质 1.8. 对任意 $[f],[g]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 和任意 $n<\omega$,令 $h(n)=\min\{f(n),g(n)\}$,则 $[h]=[f]\wedge[g]$.

证明:由函数 h 的定义知,$h\leqslant_a f$,$h\leqslant_a g$,因而有 $[h]\preccurlyeq[f]$,$[h]\preccurlyeq[g]$.对任意的 $[h']\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,如果有 $[h']\preccurlyeq[f]$,$[h']\preccurlyeq[g]$,我们证明 $[h']\preccurlyeq[h]$.

由 $[h']\preccurlyeq[f],[g]$ 知 $h'\leqslant_a f$ 和 $h'\leqslant_a g$,因而

$$(\exists\ c_1)(\exists\ m_1)(\forall\ n)[n\geqslant m_1\Rightarrow h'(n)\leqslant c_1f(n)]$$

$$(\exists\ c_2)(\exists\ m_2)(\forall\ n)[n\geqslant m_2\Rightarrow h'(n)\leqslant c_2g(n)]$$

取 $c=\max\{c_1,c_2\}$,$m=\max\{m_1,m_2\}$,则当 $n\geqslant m$ 时,有 $h'(n)\leqslant cf(n)$,$cg[n]$,因而

$$h'[n]\leqslant\min\{cf(n),cg(n)\}=c\min\{f(n),g(n)\}=ch(n)$$

即 $h'\leqslant_a h$,所以 $[h']\preccurlyeq[h]$. □

性质 1.9. 设 $[o]$ 是由所有免费算法复杂性函数组成的等价类,则 $[o]$ 在偏序"$\preccurlyeq$"下是 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 中的最小元.

性质 1.10. 在 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 中不存在最大元.

证明:任取 $[f]\in \mathbf{A}[\mathbf{F}]$,$[f]\neq[o]$,定义函数 g 如下:

$$(\forall\ n\in\omega)[g(n)=nf(n)]$$

则 $f\leqslant_a g$.我们证明 $g\not\leqslant_a f$.若不然,则存在 c 和 m,使得对所有的 $n\geqslant m$,有 $g(n)\leqslant cf(n)$.由于 f 不是免费的,因而存在 $n_1>m$,$n_1>c$,$f(n_1)\neq 0$.另一方面,由 $g(n_1)=n_1f(n_1)\leqslant cf(n_1)$ 推出 $f(n_1)=0$.矛盾.此矛盾说明 $g\not\leqslant_a f$,故有 $[f]\prec[g]$. □

2 A[F]的结构性质

本节将证明结构 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$ 具有强 Friedberg-Muchnic 性质以及在偏序"$\preccurlyeq$"意义下是稠密的.

定义 2.1. 设 $\langle \mathbf{S},\mathscr{R}\rangle$ 为一数学结构,其中 $\mathscr{R}$ 是定义在基集 $\mathbf{S}$ 上的偏序关系,任取 $x,y\in \mathbf{S}$,如果 $\neg(x\mathscr{R}y)$ 并且 $\neg(y\mathscr{R}x)$,则称 x 和 y 在关系 $\mathscr{R}$ 下不可比,记为 $x\nmid_{\mathscr{R}}y$.在关系 $\mathscr{R}$ 明确的情况下,简写成 $x\nmid y$.

定义 2.2. 称数学结构 $\langle \mathbf{S},\mathscr{R}\rangle$ 具有强 Friedberg-Muchnic 性质,如果对任意 $z\in \mathbf{S}$,存在 $x,y\in \mathbf{S}$ 满足 $z\mathscr{R}x$,$z\mathscr{R}y$,并且 $x\nmid y$.

定义 2.3. 称数学结构 $\langle \mathbf{S},\mathscr{R}\rangle$ 在偏序关系 $\mathscr{R}$ 下是稠密的,如果对任意 $x,y\in \mathbf{S}$ 满足 $x\mathscr{R}y$ 并且 $\neg(y\mathscr{R}x)$,存在 $z\in$

$S, z\neq x, z\neq y$，并且有 $x\mathscr{R}z\mathscr{R}y$.

定理 2.4. $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$具有强 Friedberg-Muchnic 性质.

证明：任取$[h]\in\mathbf{A}[\mathbf{F}]$，我们构造函数 f 和 g，满足以下条件.

(1) $h\leqslant_a f, h\leqslant_a g$

(2) $f\not\leqslant_a h, g\not\leqslant_a h$

为此，我们首先引进配对函数 $\pi:\omega\times\omega\rightarrow\omega$ 如下：

$$\pi(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+2xy+y^2+y)$$

不难验证，π 是 1-1 到上的映射. 如果 $n=\pi(x,y)$，则令 $\pi_1(n)=x, \pi_2(n)=y$. 显然，$n\geqslant\pi_1(n),\pi_2(n)$. 利用配对函数 π，我们施归纳于 $n<\omega$ 定义 f 和 g 如下：

当 $n=0$ 时，令 $f(0)=g(0)=h(0)$. 固定 n，假定 $f(n)$ 和 $g(n)$ 已定义，我们定义 $f(n+1)$ 和 $g(n+1)$：如果 $n+1=2k$，则定义 $g(n+1)=h(n+1), f(n+1)=\pi_1(k)g(n+1)+1$；如果 $n+1=2k+1$，则定义 $f(n+1)=h(n+1), g(n+1)=\pi_1(k)f(n+1)+1$.

我们验证函数 f 和 g 满足条件(1)和(2)：由于在定义中，总有 $f(n)\geqslant h(n), g(n)\geqslant h(n)$，因而条件(1)满足. 对于 $f\not\leqslant_a g$，任给 c 和 m，我们取 $n=2k$，满足 $\pi_1(k)=c$ 并且 $n>m$，则有 $f(n)=\pi_1(k)g(n)+1>cg(n)$，因而 $f\not\leqslant_a g$. 类似地，可以证明 $g\not\leqslant_a f$. 所以条件(2)满足. 由条件(1)和(2)知$[h]\preccurlyeq[f],[g]$，并且$[f]|[g]$，故定理得证.

推论 2.5. 结构 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$上的偏序"$\preccurlyeq$"不是良序.

定理 2.6. 结构 $\mathbf{A}[\mathbf{F}]$在偏序"$\preccurlyeq$"下是稠密的.

证明：任取$[f],[g]\in\mathbf{A}[\mathbf{F}]$满足$[f]\prec[g]$. 我们将构造函数$[h]$，满足$[f]\prec[h]\prec[g]$. 由$[f]\preccurlyeq[g]$知 $f\leqslant_a g$，即

$$(\exists\ c)(\exists\ m)(\forall\ n)[n\geqslant m\Rightarrow f(n)\leqslant cg(n)] \tag{1}$$

再由$[g]\not\leqslant_a[f]$知 $g\not\leqslant_a f$，有

$$(\forall\ i)(\forall\ j)(\exists\ n)[n\geqslant j\&if(n)<g(n)] \tag{2}$$

为不失一般性，在式(1)中，我们可以假定对任意 $n\in\omega$，均有 $f(n)\leqslant cg(n)$. 由于 $g\notin[o]$，因而必有无穷多个 $n\in\omega, g(n)\neq 0$. 对任意 $i,j\in\omega$，我们令

$$n_{i,j}=\mu n[n\geqslant j\&if(n)<g(n)] \tag{3}$$

由式(2)知，对任意 $i,j\in\omega, n_{i,j}$存在，并且 $n_{i,j}\geqslant j, if(n_{i,j})<g(n_{i,j})$. 我们将 $n_{i,j}$排成如表 1 所列的形式.

表 1

$i\backslash j$	0	1	2	...
0	$n_{0,0}$	$n_{0,1}$	$n_{0,2}$	...
1	$n_{1,0}$	$n_{1,1}$	$n_{1,2}$	...
2	$n_{2,0}$	$n_{2,1}$	$n_{2,2}$	...
...	...	...	...	...

我们断言，该表中每行有无穷多个不同的元素. 若不然，取定 i，假定 i 行中只有有穷个不同元素，设为

$$n_{i,k_1}, n_{i,k_2}, \ldots, n_{i,k_t},$$

取 $j>\max\{n_{i,k_1}, n_{i,k_2},\ldots,n_{i,k_t}\}+1$，则对 i 和 j 有 $n_{i,j}$满足 $n_{i,j}\geqslant j$，使得 $if(n_{i,j})<g(n_{i,j})$. 显然，$n_{i,j}\neq n_{i,k_m}(m=1,2,\ldots,t)$，矛盾.

令 $R_i=\{n_{i,j}:j<\omega\}(i\in\omega)$，则由上述断言知，对任意 $i<\omega, R_i$ 是无穷集，我们定义两个无穷叙列$\{r_n\}_{n\in\omega},\{s_n\}_{n\in\omega}$如下：首先取 $r_0\in R_0, r_0=n_{0,0}, s_0=\mu n[n\in R_0\&n>r_0]$，假如 $r_k\in R_k$ 和 $s_k\in R_k$ 已定义，则令

$$r_{k+1}=\mu n[n\in R_{k+1}\&n>s_k]$$

$$s_{k+1}=\mu n[n\in R_{k+1}\&n>r_{k+1}]$$

显然，叙列$\{r_n\}$和$\{s_n\}$满足

$$r_n\in R_n, s_n\in R_n \tag{4}$$

$$(\forall\ n<\omega)[nf(r_n)<g(r_n)\&nf(s_n)<g(s_n)] \tag{5}$$

函数 h 的构造如下：

当 $k=0$ 时，对任意 $n\leqslant s_0$ 定义 $h(n)=0$，假定对任意 $n\leqslant s_k, h(n)$已定义，则对任意 $n, s_k<n\leqslant s_{k+1}$，我们令

$$h(n)=\begin{cases} f(n) & \text{如果 } s_k<n<s_{k+1} \\ (k+1)f(s_{k+1})+1 & \text{如果 } n=s_{k+1} \end{cases}$$

下面我们来验证$[h]$满足$[f]<[h]<[g]$. 为此，我们只要证明

(1) $f\leqslant_a h$ 并且 $h\not\leqslant_a f$

(2) $h\leqslant_a g$ 并且 $g\not\leqslant_a h$

对于(1)，$f\leqslant_a h$ 为显然. 假定有 $h\leqslant_a f$，则

$$(\exists c)(\exists m)(\forall n)[n\geqslant m\Rightarrow h(n)\leqslant cf(n)]$$

对上式中的 c 和 m，取 s_k，其中 $k=\mu k[k\geqslant c$ 并且 $s_k>m]$，由 h 的定义知

$$h(s_k)=kf(s_k)+1\geqslant cf(s_k)+1>cf(s_k)$$

从而引出矛盾，该矛盾说明 $h\not\leqslant_a f$.

对于(2)，先证明 $h\leqslant_a g$. 因为 $f\leqslant_a g$，所以存在 c，对所有 $n<\omega$，有 $f(n)\leqslant cg(n)$. 取 $c_1=c+1$，对任意 $n\in\omega$，如果 $n\neq s_k(k=1,2,\ldots)$，则 $h(n)=f(n)\leqslant cg(n)<c_1g(n)$；如果 $n=s_k(k=1,2,\ldots)$，则 $h(s_k)=kf(s_k)+1$，由 s_k 的定义知 $kf(s_k)<g(s_k)$，因而有 $h(s_k)\leqslant g(s_k)+1\leqslant c_1g(s_k)$，即对任意 n 均有 $h(n)\leqslant c_1g(n)$. 对 $g\not\leqslant_a h$，只要验证对任意的 c 和 m，存在 $n\geqslant m$ 使得 $ch(n)<g(n)$即可. 为此，取 $i\geqslant c$，$r_i>m$，则有 $ch(r_i)\leqslant ih(r_i)=if(r_i)<g(r_i)$. 至此，稠密性定理证明完毕. □

参考文献

1 Blum M. A machine-independent theory of the complexity of recursive functions. Joural of Association Computing Machinery, 1967, 14: 322~336

2 de Bruijn N G. Asymptotic method in analysis. North-Holland Publishing Company, 1970

3 Knuth D E. Big omicron and big omega and big theta. SIGACT News, April~June 1976

4 Daniel H G, Knuth D E. Mathematics for the analysis of algorithms. Birkhauser, Boston, 1981

5 Knuth D E. The art of computer programming. Reading, Mass.: Addison Wesley, second edition, 1973

6 Soare R I. Recursively enumerable set and degrees. Springer-Verlag, 1987

7 Odifreddi P. Classical recursion theory. North-Holland Publishing Company, 1992

8 Davis M D, Weyuker E J. Computability complexity and languages. Fundamentals of Thecretical Computer Science. New York: Academic Press, 1983

9 Stanat D F, Mcallisty D F. Discrete mathematics in computer science. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1977

Structure Properties about Asymptotically Dominating Equivalence Classes of Computational Complexity Functions

ZHANG Zai-yue　ZHANG Hong-yu

(*Department of Mathematics and Computer Science　Yangzhou University　Yangzhou*　225002)

Abstract　In this paper, the authors established a mathematical structure of asymptotically dominating equivalence classes of computational complexity functions and studied the properties of the structure systematically. Applying the methods and techniques of recursion theory to the study of this structure, they proved that the structure has strongly Friedberg-Muchnic property and is dense under the sense of partial ordering.

Key words　Computational complexity, asymptotically dominating.