

三维分层分支树状模式的复原: 等式与推导*

杨敬安

(合肥工业大学人工智能研究所 合肥 230009)

摘要 本文提出一种三维分层分支结构建模与复原算法. 该算法利用模型成功地估计树图象的结构参数, 进行运动模式的光流分析, 且可由树类植物的单幅图象复原其 3D 模式的几何特性.

关键词 自遮挡, 三维分层分支结构, 最大梯度平面, 正交投影.

中图分类号 TP391

植物, 例如树和灌木等, 通常有干、支和叶构成的分层结构, 因此我们能利用三维分层分支结构对其建模. 由于这些结构通常为不透明, 但又足够稀疏, 没有完全遮挡它们以外的物体, 特别是它们的自阴影比较少, 有可能看到其内部结构, 这样此类植物 3D 模式的几何特性可从单幅图象得到复原.

在计算机图形学及计算机视觉中, 树可用分层分支模式进行逼真的建模. 在这些模式中, 各分支长度、厚度以及分支间的角度可用简单规则控制, 因此我们把由这些模型产生的三维模式看成树状模式. 根据三维模式进行树图象分析, M. Aono 已做些初步工作, 他描述了树状模式的模型, 分析由三维模式导出的图象, 研究半透明模式的特性^[1,2], E. R. Weibel 处理这种模式的截面图象, 从截面图象导出三维模式的特征^[3], 特别是描述空间分布的结构特性, 涉及半透明 3D 模式的投影图象, 并可从这种单幅图象导出 3D 模式有用的结构特性, 或者若能获得许多投影, 完整的 3D 模式可从其重建^[4,5], 而且在观察者运动的情况下, 分析光流的这种模式已取得某些成果.^[6]

过去对由投影获得的稀疏、不透明的 3D 模式复原景物结构的研究甚少, 这是令人遗憾的^[7], 因为这种模式对分析室外景物起重要作用. 本文还试图证明当观察者在运动的情况下, 我们能够进行关于这些模式的光流分析, 并从随机空间方向上许多这种形状的图象复原平面形状. 为分析与复原稀疏、不透明的 3D 模式和结构, 文中示出树类植物能用三维分层分支结构建模. 如果这些结构足够稀疏, 自遮挡就比较小, 它们的几何特性就可从单幅图象得到复原.

* 本文研究得到国家自然科学基金和安徽省自然科学基金资助. 作者杨敬安, 1943 年生, 教授, 博士导师, 主要研究领域为图象理解, 模式识别, 计算机视觉, 人工智能与机器人.

本文通讯联系人: 杨敬安, 合肥 230009, 合肥工业大学人工智能研究所

本文 1996-07-11 收到修改稿

1 模型的建立

在计算机图形学中,使用的树类植物模型基本上是分层递归的分支处理.在这种处理中,逐次分支的长度、厚度和角度可用简单规则控制,而且利用这些模型可产生复杂的树状模式,这些模式可构成具有各种特征的逼真的树.

分支模式可分类为:二叉(dichotomous)或单轴(monopodial)类.在二叉类分支中,每个父分支分成2个子分支,每个子分支指向与父分支不同的方向.在单轴类分支中,一个父分支分成2个子分支,其中一个子分支与父分支指相同的方向.值得注意的是在这2类分支模式中,两子分支在每个分支处产生.也可定义多分支模式,但这将另撰文讨论.

本文基于以下规则构造三维几何模型:

- (1)在分支处理的每个阶段,子分支的长度与厚度以常系数变小,且它们的分支角相同;
- (2)子分支位于其父分支的最大梯度平面,这个平面包含父分支,且在此平面内父分支指向z最大变化率的方向.作为一个规则,树干的子分支位于垂直平面.

最后这一处理生成的树由多代组成,下面我们建立这一模型,使用的符号定义如图1.

P_0P_1 :父分支

P_1P_2, P_1P_3 :子分支

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

父分支的根

$P_1 = (x_1, y_1, z_1)$:

父分支的终端,

也是其子分支的根

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$:子分支 P_1P_2 的终端

$P_3 = (x_3, y_3, z_3)$:子分支 P_1P_3 的终端

R_1 :长度比率 $\|P_1P_2\| / \|P_0P_1\|$

R_2 :长度比率 $\|P_1P_3\| / \|P_0P_1\|$

h_1 : P_0P_1 和 P_1P_2 间的分支角

h_2 : P_0P_1 和 P_1P_3 间的分支角

已知分支角和各长度比,分支终端坐标满足以下等式:

$$x_2 - x_1 = R_1((x_1 - x_0) \cdot \cosh h_1 - L/l(y_1 - y_0) \cdot \sinh h_1)$$

$$y_2 - y_1 = R_1((y_1 - y_0) \cdot \cosh h_1 - L/l(x_1 - x_0) \cdot \sinh h_1)$$

$$z_2 - z_1 = R_1((z_1 - x_0) \cdot \cosh h_1)$$

$$x_3 - x_1 = R_2((x_1 - x_0) \cdot \cosh h_2 - L/l(y_1 - y_0) \cdot \sinh h_2)$$

$$y_3 - y_1 = R_2((y_1 - y_0) \cdot \cosh h_2 + L/l(x_1 - x_0) \cdot \sinh h_2)$$

$$z_3 - z_1 = R_2((z_1 - z_0) \cdot \cosh h_2)$$

式中 $L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2} = \|P_0P_1\|$, $l = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

以上这些等式在索引A中给出.

当父分支 p_0p_1 垂直,例如树干,没有在其中会产生分支的单一最大梯度平面,而任何含

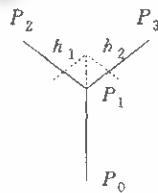


图1 父分支和子分支示意图

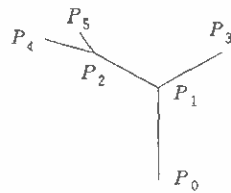


图2 用于模型参数复原的分支集合

分支的平面都是最大梯度平面.事实上, $x_1=x_0, y_1=y_0$, 结果 $l=0$, 因而我们不能使用在假定单一最大梯度平面的情况下导出的这些等式.

在此情况下, 我们可使用和 xz 平面成 θ 角的任意垂直分支平面, 对每个后继分支把其旋转一固定扩张角 α , 然后分支的终点由

$$x_i - x_1 = R_j L \cos \theta \sinh_j, \quad y_i - y_1 = R_j L \sin \theta \sinh_j, \quad z_i - z_1 = R_j L \cosh_j$$

给出. 对于垂直的父分支 $P_0P_1, L=(z_1-z_0)$.

2 复原等式与其导出

假设已知根据上述模型产生树的正交投影. 为不失一般性, 设投影方向为水平, 并把其看成与 y 轴平行, 因此分支终点的 x 's 和 z 's 为已知, 本节示出可从分支集合的投影复原的未知 y 坐标和 4 个模型参数 R_1, R_2, h_1, h_2 .

假设某观察者的位置即分支终点的 x 和 z 值可从投影精确地确定, 特别当所有分支和结点都可见, 即无分支投影重叠, 也没和其它投影共线, 那么分支投影在图象内就不产生伪“分支点”, 观测方向不平行分支平面或分支. 如前节所述, 单个分支仅提供用 8 个未知数(所有 4 个点的 y_i 和 4 个模型参数)表示 6 个等式. 然而, 父结点和 2 个子结点以及 1 个子结点的 2 个孙结点(见图 2)提供足够的等式能完全确定所有未知变量的值.

令 P_0P_1 为父分支, P_1P_2 和 P_1P_3 是 P_0P_1 子分支, P_2P_4 和 P_2P_5 是 P_1P_2 的子分支. 为不失其一般性, 假设 P_1P_2 和 P_2P_4 是由 R_1 和 h_1 产生的“边 1”子分支, P_1P_3 和 P_2P_5 是由 R_2 和 h_2 产生的“边 2”子分支. 这里用 s_i 表示分支 i 的边, 而 p_i 表示它的父终点, 如表 1 所示. 为简化这些等式, 我们定义

$$c_i = x_i - x_{p_i} \quad d_i = y_i - y_{p_i} \quad e_i = z_i - z_{p_i} \tag{1}$$

表 1 复原等式的分支符号

分支终点 i	父分支终点 p_i	分支边 s_i
1	0	—
2	1	1
3	1	2
4	2	1
5	2	2

式中 c 's 和 e 's 为已知, 而 d 's 含关于距离(y)的所有信息, 这些信息可从正交投影复原. 实际上, 我们可任意地置 $y_0=0$. 根据 c 's, d 's 和 e 's, 对 $i=2, 3, 4, 5$, 可得到模型等式为

$$c_i = c_{p_i} R_{s_i} \cosh_{s_i} - L_{p_i} / l_{p_i} \cdot R_{s_i} d_{p_i} \sinh_{s_i} \tag{2}$$

$$d_i = d_{p_i} R_{s_i} \cosh_{s_i} + L_{p_i} / l_{p_i} \cdot R_{s_i} \sinh_{s_i} c_{p_i} \tag{3}$$

$$e_i = e_{p_i} R_{s_i} \cosh_{s_i} \tag{4}$$

式中 $L_i = \sqrt{c_i^2 + d_i^2 + e_i^2} = \| p_i p_{p_i} \|, l_i = \sqrt{c_i^2 + d_i^2}$,

并且父分支的终点 p_i 和分支边 s_i 的定义如前所示. 特别地,

$$e_2 = e_1 R_1 \cosh_1 \quad e_3 = e_1 R_2 \cosh_2 \quad e_4 = e_2 R_1 \cosh_1 \quad e_5 = e_2 R_2 \cosh_2$$

根据已知参数, 等式(4)可给出 $R_1 \cosh_1$ 和 $R_2 \cosh_2$, 即

$$R_1 \cosh_1 = e_2 / e_1 = e_4 / e_2$$

$$R_2 \cosh_2 = e_3/e_1 = e_5/e_2$$

或更通常地, $R_j \cosh_j = e_{j+1}/e_1$. 这能提供一种验证孙分支正确赋值于 P_2P_4 和 P_2P_3 的简便方法.

把等式(2)和(3)分别除以等式 $e_{si+1}/e_i = R_{si} \cosh_{si}$, 得到

$$\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}c_i\right) = c_{pi} + \frac{L_{pi}}{l_{pi}}(\tanh_{si})(-d_{pi})$$

$$\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}d_i\right) = d_{pi} + \frac{L_{pi}}{l_{pi}}(\tanh_{si})c_{pi}$$

以上等式可重写成

$$\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}c_i\right) - c_{pi} = \frac{L_{pi}}{l_{pi}}(\tanh_{si})(-d_{pi}) \quad (5)$$

$$\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}d_i\right) - d_{pi} = \frac{L_{pi}}{l_{pi}}(\tanh_{si})c_{pi} \quad (6)$$

等式(5)除以等式(6)消去 $(L_{pi}/l_{pi}) \cdot \tanh_{si}$ 后, 得到

$$\frac{\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}c_i\right) - c_{pi}}{\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}d_i\right) - d_{pi}} = \frac{-d_{pi}}{c_{pi}}$$

也可重写为

$$\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}d_i\right) - d_{pi} = \frac{\left(\frac{e_1}{e_{si+1}}c_{pi}c_i\right) - c_{pi}^2}{-d_{pi}} = \frac{c_{pi}^2 - \left(\frac{e_1}{e_{si+1}}c_{pi}c_i\right)}{d_{pi}}$$

$$\frac{e_1}{e_{si+1}}d_i = d_{pi} + \frac{c_{pi}^2 - \left(\frac{e_1}{e_{si+1}}c_{pi}c_i\right)}{d_{pi}}$$

$$d_i = \frac{e_{si+1}}{e_1}d_{pi} + \frac{c_{pi}^2 e_{si+1}/e_1 - c_{pi}c_i}{d_{pi}} \quad (7)$$

特别地,

$$d_2 = (e_2/e_1) \cdot d_1 + (c_2^2 e_2/e_1 - c_1 c_2)/d_1$$

$$d_3 = (e_3/e_1) \cdot d_1 + (c_3^2 e_3/e_1 - c_1 c_3)/d_1$$

$$d_4 = (e_2/e_1) \cdot d_2 + (c_2^2 e_2/e_1 - c_2 c_4)/d_2$$

$$d_5 = (e_3/e_1) \cdot d_2 + (c_3^2 e_3/e_1 - c_2 c_5)/d_2 \quad (8)$$

很清楚, d_2 和 d_3 正是 d_1 的函数(已知 c_i 和 e_i 的值), 而 d_4 和 d_5 为 d_2 的函数; 因此一旦 d_1 已知, 就可解得所有未知数的值. 下面利用等式(5), 对于 $i=2$ 和 $i=4$, 解得

$$\left((e_1/e_2) \cdot c_2\right) - c_1 = L_1/l_1(\tanh_1)(-d_1) \quad (9)$$

$$\left((e_1/e_2) \cdot c_4\right) - c_2 = L_2/l_2(\tanh_1)(-d_2) \quad (10)$$

请注意 $L_i/l_i = (1 + e_i^2/c_i^2 + d_i^2)^{1/2}$, 以等式(9)除以等式(10)并平方获得

$$\frac{d_1^2 \left(1 + \frac{e_1^2}{c_1^2 + d_1^2}\right)}{d_2^2 \left(1 + \frac{e_2^2}{c_2^2 + d_2^2}\right)} = \left[\frac{\left(\frac{e_1}{e_2}c_2\right) - c_1}{\left(\frac{e_1}{e_2}c_4\right) - c_2} \right]^2 \equiv \kappa$$

重写并根据等式(8)代替 d_2 得到

$$d_1^2 \left(1 + \frac{e_1^2}{c_1^2 + d_1^2}\right) = \kappa d_2^2 \left(1 + \frac{e_2^2}{c_2^2 + d_2^2}\right)$$

$$= \kappa \left(\frac{e_2}{e_1} d_1 + \frac{c_1^2 e_2 / e_1 - c_1 c_2}{d_1} \right)^2 \left[1 + \frac{e_2^2}{c_2^2 + \left(\frac{e_2}{e_1} d_1 + \frac{c_1^2 e_2 / e_1 - c_1 c_2}{d_1} \right)^2} \right]$$

这个等式仅含一个未知数, 可求其数值解. 然后其它 d' s 可从等式(7)直接获得. 现在可直接获得的模型参数如下:

$$R_1 = \| P_2 P_1 \| / \| P_1 P_0 \| = L_2 / L_1 = \sqrt{c_2^2 + d_2^2 + e_2^2} / \sqrt{c_1^2 + d_1^2 + e_1^2}$$

$$R_2 = \| P_3 P_1 \| / \| P_1 P_0 \| = L_3 / L_1 = \sqrt{c_3^2 + d_3^2 + e_3^2} / \sqrt{c_1^2 + d_1^2 + e_1^2}$$

$$|h_1| = \angle P_0 P_1 P_2 = \cos^{-1}(e_2 / e_1 R_1)$$

$$|h_2| = \angle P_0 P_1 P_3 = \cos^{-1}(e_3 / e_1 R_2)$$

由于余弦函数是偶函数, 分支角 h_1 和 h_2 的符号不能直接获得, 但是无论树的结构如何, 不管 h_1 还是 h_2 有相同或相反的符号, 利用 $\angle P_2 P_1 P_3$ 很容易确定:

$$\angle P_2 P_1 P_3 = |h_1 + h_2| = \cos^{-1} \frac{P_2 P_1 \cdot P_1 P_3}{\| P_2 P_1 \| \| P_1 P_3 \|} = \cos^{-1} \frac{c_2 c_3 + d_2 d_3 + e_2 e_3}{L_2 L_3}$$

很清楚, 如果 h_1 和 h_2 有相同符号, $\angle P_2 P_1 P_3 = |h_1| + |h_2|$, 而如果 h_1 和 h_2 有相反符号, 则 $\angle P_2 P_1 P_3 = \| h_1 \| - \| h_2 \|$.

3 举 例

3.1 综合的树

对于日本茶树 *Aucuba* 可用参数 $h_1 = 27, h_2 = -37, R_1 = R_2 = 0.786$ 的实际平均测量值近似描述. 利用这些参数产生的一个例子如图 3(a), 图 3(b) 以分支终点数给出这棵树的前 5 代. 为了简化, 用 i 表示分支 $P_i P_1$, 它们的终点标数字 i . 分支 $2i$ 是用 R_1 和 h_1 产生的分支 i 的“边 1”子分支, 而分支 $2i+1$ 是由 R_2 和 h_2 产生的分支 i “边 2”的子分支. 表 2 示出从 12 个分支集复原的模型参数, 它的父分支属于 2 个最低代 (不含树干). 值得注意的是同一分支集有时存在多个解. 但可以肯定每个分支集至少有一个解给出正确的模型参数. 这些“真实”解形成独特的一簇, 使消除某些“不正确”解变得容易. 图 4(a) 示出测得热带树参数: $h_1 = 24.4^\circ, h_2 = -36.9^\circ, R_1 = 0.94, R_2 = 0.87$, 图 4(b) 给出前 5 代.



(a) 基于 *Aucuba* 的树 (b) 树的前 5 代 (a) 基于 *Terminalia* 树 (b) 树的前 5 代

图 3

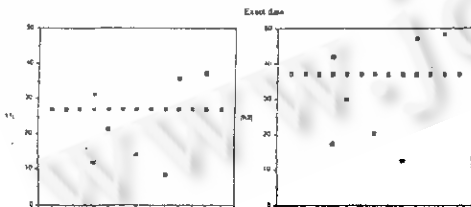
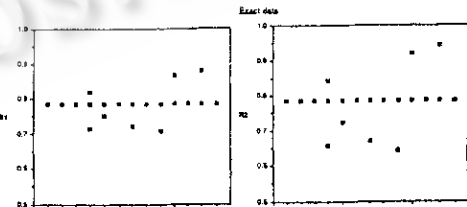
图 4

表 2 从图 3(b)中 Aucuba 模型的 12 个分支集复原的模型参数

分支集 (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)	R_1	R_2	$ h_1 , ^\circ$	$ h_2 , ^\circ$
(2,4,5,8,9)	0.786	0.786	27.000	37.000
(4,8,9,16,17)	0.786	0.786	27.000	37.003
(4,8,9,16,17)	0.819	0.844	31.277	41.936
(4,8,9,16,17)	0.715	0.657	11.807	17.179
(3,6,7,12,13)	0.786	0.786	27.000	37.000
(5,10,11,20,21)	0.786	0.786	27.000	37.000
(5,10,11,20,21)	0.752	0.724	21.283	29.947
(6,12,13,24,25)	0.786	0.786	27.000	37.000
(7,14,15,28,29)	0.786	0.786	27.000	37.000
(7,14,15,28,29)	0.722	0.669	13.961	20.187
(2,5,4,11,10)	0.786	0.786	27.000	37.000
(3,7,6,15,14)	0.786	0.786	27.000	37.000
(3,7,6,15,14)	0.708	0.643	8.403	12.324
(4,9,8,19,18)	0.786	0.786	27.000	37.000
(4,9,8,19,18)	0.865	0.921	35.976	47.031
(5,11,10,23,22)	0.786	0.786	27.000	37.000
(6,13,12,27,26)	0.786	0.786	27.000	37.000
(6,13,12,27,26)	0.880	0.945	37.244	48.351
(7,15,14,31,30)	0.786	0.786	27.000	37.000

3.2 灵敏度

复原处理对噪声或干扰相当灵敏,当分支终点的坐标量化后,这种处理受噪声或干扰的影响就大大降低,如图 5 和图 6. 图中分别给出当使用确切的分支终点坐标,或坐标量化到最靠近整数或坐标量化到最靠近 2 的整数倍的复原参数(所有解),每幅图中最左边的点为实际模型的参数值. 这种量化模拟了或许可从实图象获得的低分辨率,在使用树的例子中,下代分支长度为 30~60 单位,致使当分支垂直于视线时,最靠近整数的量化对应于高达 3% 的误差.

图 5 复原的 Aucuba 模型的 $|h_1|$ 和 $|h_2|$ 值图 6 复原的 Aucuba 模型的 R_1 和 R_2 值

4 结论和将来研究方向

本文提出的算法能利用模型预测树图象的结构特性,例如,已知用模型产生的树,按树的正交投影中 x 和 z 的函数,预测每单位面积估计的分支部分,这种预测与从实际树获得的数据匹配,就能估计此类树的模型参数,并复原其结构特性. 由于结构特性较平均,因此这些特性对各种实际树参数的变化不太敏感,当然文中使用对实际树进行预测的模型应当尽可

能逼真与可靠.

本文仅研究分支模型,作为三维结构模型树的其它特性是对叶的空间分布建模. 如果知道叶在分支的位置,这样的分布就可从分支模型导出. 树模型可用于分析树图象的许多方面,例如:①通过模型参数的辨认,识别树的种类;②利用模型参数的估计,量化树的特性;③按照基于模型预测的偏差,检测局部或整体的异常现象;④判断在树林内是否隐藏有军事目标等.

这些模型也允许我们预测可见度,如物体位于树后面的概率,或树内物体例如水果的可见度. 下一步我们将开展以上有关方面的研究.

参考文献

- 1 Aono M, Kunii T L. Botanical tree image generation. IEEE Computer Graphics and Applications, 1984, 4(5):10~34.
- 2 伏劲松,刘国香. 园林植物竹子三维造型的 Fractal 方法. 计算机辅助设计与图形学学报, 1993, 5(4):32~37.
- 3 Weibel E R. Stereological methods. Academic Press, New York, 1980.
- 4 Fisher J B, Honda H. Branch geometry and effective leaf area: a study of terminalia-branching pattern. theoretical trees. American Journal of Botany, 1979, 66(6):633~644.
- 5 Jasinschi R S, Rosenfeld A. Discriminating 3D texture patterns; the velocity histogram method. Technical Report CAR-TP-547, Center for Automation Research, University of Maryland, College Park, USA, 1991.
- 6 Naito S, Rosenfeld A. Shape from random planar features. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1988, 42:345~370.

附录 本附录用于模型等式的推导

A.1 旋转

任意两垂直的单位向量 \hat{u} 相对 \hat{v} 构成定义平面和坐标系统的标准正交基, \hat{u} 和 \hat{v} 旋转 θ 角变成

$$\hat{u}_\theta = \hat{u} \cdot \cos\theta + \hat{v} \cdot \sin\theta$$

A.2 最大梯度平面

向量的最大梯度平面是含那个向量的平面,致使在那平面内的所有向量中,已知向量的 z 分量有最大变化率.

我们示出单位向量 \hat{u} 的最大梯度平面是含 \hat{u} 和 \hat{v} 的平面, \hat{v} 是垂直 \hat{u} 的单位向量. 而其 z 分量为 $0(\hat{v} = (v_x, v_y, 0))$.

令 Π 是由 \hat{u} 和 \hat{v} 定义的平面,这里 \hat{v} 是一垂直于单位向量 \hat{u} 的单位向量,那么与单位向量 \hat{u} 成 θ 角的 Π 内的任意单位向量可表示为

$$\hat{u}_\theta = \hat{u} \cdot \cos\theta + \hat{v} \cdot \sin\theta$$

由于向量加是按分量逐个相加,所以 \hat{u}_θ, \hat{u} 和 \hat{v} 的 z 分量也满足以下等式 $(\hat{u}_\theta)_z = \hat{u}_z \cos\theta + \hat{v}_z \sin\theta$

如果 \hat{u} 含所有可能 \hat{u}_θ 's 极大 z 分量(正或负极大值),那么 $\frac{d(\hat{u}_\theta)_z}{d\theta}$ 在 $\theta=0$ 处为 0. 于是有

$$\frac{d(\hat{u}_\theta)_z}{d\theta} = -\hat{u}_z \sin\theta - \hat{v}_z \cos\theta$$

\hat{u} 有最大 z 分量的必须条件是 $\hat{v}_z = 0$, 即 \hat{v} 应是水平的. 也请注意 $\frac{d^2(\hat{u}_\theta)_z}{d\theta^2} = -\hat{u}_z \cos\theta - \hat{v}_z \sin\theta$

在 $\theta=0$ 处将变为 $-\hat{u}_z$. 因此如果 $\hat{u}_z \neq 0$, 实际就是 $(\hat{u}_\theta)_z$ 的极大值. 另一方面, 如果 $\hat{u}_z = 0$, 那么由于也有 $\hat{v}_z = 0$, Π 本身是平行的, 因此在此情况下, \hat{u} 也有在 Π 内的含所有向量的 z 的“最大”变化率.

由于两向量定义的平面和向量的最大梯度平面都不依赖于向量长度, 故这些观察数据也适用于任意向量, 其结果可概括为以下定理:

向量 \vec{u} 的最大梯度平面是含向量 \vec{u} 和 \vec{v} 的平面, 这里 \vec{v} 是垂直于 \vec{u} 的任意向量, 且是水平的.

很容易看出, 当 \vec{u} 不垂直时 ($\vec{u} = u_x, u_y, u_z$; u_x, u_y 不都为 0), \vec{v} 是水平的 ($v_z = 0$), 所以 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 可表示作 $(u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, 0) = 0$, 这可由一组向量 $\vec{v} = n(-u_y, u_x, 0)$ 单值地满足。

如果 \vec{u} 垂直 ($\vec{u} = (0, 0, u_z)$), 那么所有垂直 \vec{u} 的向量都是水平的; 实际上过 \vec{u} 的每个平面是 \vec{u} 的最大梯度平面。

A. 3 非垂直子分支

已知非垂直父分支 P_0P_1 和要求的长度比率 R_1, R_2 及分支角 h_1, h_2 , 可把父分支看成一向量:

$$\vec{u} = P_1 - P_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) = (c_1, d_1, e_1)$$

其长度为 $L = \|\vec{u}\| = \|P_0P_1\| = \sqrt{c_1^2 + d_1^2 + e_1^2}$

现对 \vec{u} 标准化, 获得 $\hat{u} = \vec{u}/L$ 。

要使分支的平面为父分支最大梯度平面, 找出能满足 $\hat{p} \cdot \hat{u} = 0$ 和 $P_x = 0$ 的水平且垂直的单位向量 $\hat{p} = (p_x, p_y, p_z)$,

通过解等式 $(p_x, p_y, 0) \cdot (c_1, d_1, e_1) = 0$ 并对单位向量归格化, 得到 $\hat{p} = (-d_1, c_1, 0)/l$, 式中 $l = \sqrt{c_1^2 + d_1^2}$ 。

给出子分支 i (2 或 3) 方向的单位向量仅仅是 \hat{u} 相对 \hat{p} 旋转角度 h_{ii} :

$$\hat{u} \cdot \cosh_{ii} + \hat{p} \sinh_{ii}$$

子分支的实际长度为 LR_{ii} , 因此给出终点 P_i 的真实向量为

$$P_i - P_1 = LR_{ii}(\hat{u} \cdot \cosh_{ii} + \hat{p} \sinh_{ii}) = R_{ii}(\vec{u} \cdot \cosh_{ii} + L\hat{p} \sinh_{ii}) \quad (1)$$

根据独立的分量, 给出以下模型等式:

$$x_i - x_1 = R_{ii}(c_1 \cdot \cosh_{ii} - (L/l)d_1 \cdot \sinh_{ii})$$

$$y_i - y_1 = R_{ii}(d_1 \cdot \cosh_{ii} + (L/l)c_1 \cdot \sinh_{ii})$$

$$z_i - z_1 = R_{ii}(e_1 \cdot \cosh_{ii})$$

A. 4 垂直父分支

若父分支 P_0P_1 垂直, 那么任意水平单位向量 $\hat{p} = (p_x, p_y, 0)$ 垂直于该分支的向量 $\vec{u} = (0, 0, e_1)$; 而含 \vec{u} 的任意平面是 \vec{u} 的最大梯度平面。在此情况下, 使用与 xy 平面成 θ 角的垂直平面, 这给出 $\hat{p} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 。

如前所示的方法, 把 $\hat{p} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ 代入等式(1), 并且根据它的各独立分量, 得到以下结果:

$$x_i - x_1 = R_{ii} \cdot L \cos\theta \cdot \sinh_{ii} \quad y_i - y_1 = R_{ii} \cdot L \sin\theta \cdot \sinh_{ii} \quad z_i - z_1 = R_{ii} \cdot L \cosh_{ii}$$

RECOVERY OF THREE DIMENSIONAL HIERARCHICAL BRANCHING ARBORESCENT PATTERNS: EQUATIONS AND DERIVATION

YANG Jing'an

(Institute of Artificial Intelligence Hefei University of Technology Hefei 230009)

Abstract This paper proposes an algorithm for modeling and recovery of three dimensional hierarchical branching arborescent patterns. The algorithm can estimate the structure parameters of tree images using model prediction and recover the geometrical properties of 3D patterns of these plants from a single image.

Key words Self-occlusion, three-dimensional hierarchical branching structure, the maximal gradient plane, the orthographic projection.

Class number TP391