第7卷 增刊　　软件学报 JOURNAL OF SOFTWARE　　Vol. 7, Supplement

二维不规则复杂图形轮廓求解的算法研究*

徐 波　周明天

（电子科技大学微型机研究所　成都　610054）

摘要　本文介绍了适用于复杂PCB电路和二维不规则图案的一种轮廓求解算法，阐述了它的数学模型、算法描述与实现、正确性证明和复杂性分析，并给出了在一台基于PC386多功能CAD/CAM系统(CACAO)上的加工实例.

关键词　计算机辅助设计/制造，轮廓求解，计算机图形学，印制电路板，铭牌.

轮廓求解完成实线图到轮廓图的转换，这是科学研究所需的印制电路板刻制和给各行业铭牌商标雕刻的关键算法. 多年来，轮廓提取是CAD/CAM中的重要研究课题，归纳起来分为图象和图形2类方法. 已有的轮廓求解算法各有其局限性，所有基于边界运算文献都只讨论了单连通域间集合运算，并且连通域的边界仅由直线段围成. 除文献[1]外均未给出正确性证明，也未讨论重要的实现问题.

本文和文献[2,3]提出了适用于二维复杂PCB电路和不规则图案轮廓求解的算法，这组算法包含了曲线求交、包含判定、多边形运算、连通分割等一系列算法，每一层算法既考虑到PCB图元的特点和电路轮廓求解的高效性，又考虑到对不规则图案的通用性和实际使用的鲁棒性，本文和文献[2,3]给出了这套算法的数学模型、算法描述、算法实现、正确性证明和复杂性分析.

1　问题的描述

定义1.1. 设 a,b 为二维欧氏空间 E^2 中相异2点，若在 E^2 中存在同时包含 a,b 的连通域，则称 a,b 是连通的，连通关系是等价关系.

定义1.2. 设 A 是 E^2 的非空子集，A 对于点的连通关系的每一等价类均称为 A 的连通分支. 点的连通关系确定 A 的分割，称为 A 的连通分割. 连通分割也可定义为 A 中全部连通分支构成的集合. 记为 $apart=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，其中 A_i 是 A 的连通分支. 特别地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 均为连通闭集，$A_1\cup A_2\cdots\cup A_n=A$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成 A 的连通分割的充要条件是 $A_i\cap A_j=\Phi, i\neq j$.

定义1.3. *PCB*图元中包含以下基本图元：TRACK(连线)，PAD(焊盘)，ARC(圆弧)，

* 本文研究得到电子科学基金(SFE)资助. 作者徐波，1969年生，博士生，主要研究领域为计算机应用，开放分布式处理，计算机网络. 周明天，1939年生，教授，主要研究领域为计算机应用，开放系统，计算机网络.

本文通讯联系人：徐波，成都610054，电子科技大学微型机研究所

本文1995－10－17收到修改稿

有一点 $y\in N(x,r)$ 且 $y\in O_1$，于是 $y\in O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n$；当 $r>r_0$ 时，$N(x,r)\subset(N(x,r_0)$，$N(x,r)$ 中仍存在 $y\in O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n$. 故 $x\in b(O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n)$. 又 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 是 PCB_p 的割集，因此 $PCB_p=O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n$，定理 2.1 得证.

定理 2.2. 算法 2.1 所求得的集合 O 为 P 的连通分割.

从算法 2.1 中可以看出，连通分割 O 是由不断加入连通域变量 T 形成的，而 T 总是由相交不为空的闭连通域求并得到，因此 T 总是连通域，故 O 中每一割集均为闭连通域. 又 T 放入 O 中的条件是 T 与 P 中剩余元素都不相交，因此有 $O_i\cap O_j=\Phi,i\neq j$. P 中元素 P_i 要么直接放入 O 中，要么参加且只参加一次求并运算，故 $O_1\cup O_2\cup\cdots\cup O_n=PCB_p$. 综上所述，算法 2.1 所求得集合 O 为 $PCBp$ 的连通分割.

由定理 2.1 和定理 2.2，算法 2.1 所求得集合 O 为 PCB_p 的连通分割，而 PCB_p 的边界等于割集边界之并，因此 O 中各区域边界之并即为 PCB_p 的边界.

2.3 算法复杂性分析

首先分析最坏情况时间复杂性. 算法 2.1 的基本运算是连通域间的相交判定和求并，假设 2 种基本运算具有相同复杂性. 显然对于轮廓求解有贡献的是求并运算，相交判定若为否定结果则不产生新的轮廓. 因此否定结果越多，算法效率越低. 当 P 中两两图元相交判定都为否定结果时，算法时间复杂性最高. 设 P 包含 n 个基本图元，则最坏情况时间复杂性为：

$$\begin{aligned}T(n)&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1\\&=n(n-1)/2\\&=O(n^2)\end{aligned}$$

然后分析空间复杂性. 不考虑图元的具体存储方式，算法 2.1 需 2 个链表，一个存放 PCB 图元，另一个存放生成的连通分枝. 设有 n 个图元，由于对图元实行动态删除，2 个链表的长度之和不会超过 n，故空间复杂性为 $O(n)$.

3 算法实现

算法 2.1 实现的真正困难在于区域间的集合运算，有关区域运算的详情请参见文献[2,3]. 这里着重讨论整个轮廓求解算法体系实现的一般问题，包括所用到的数据结构、精度控制、提高轮郭求解速度的措施等.

3.1 面向对象数据结构

轮廓求解算法体系的特点是要处理大量的异质链表，比如 PCB 图元链表中的元素可以是焊盘、连线或填充区. 传统程序设计方法只能通过设立标志实现异质链表，操作时需作大量判断，根据标志调用相应函数，这样做极不方便并且不具有可扩展性.

我们使用面向对象程序设计技术，简便高效地实现异质链表. 异质链表利用了 OOP 的继承性和动态约束. 它是基于 C++ 而提供的这样的一个机制：指向基类的指针可以容纳由该基类派生的任何子类的对象.

实现时使用循环链表 *pcblist* 存储 PCB 图，*pcblist* 的每一元素是指向基本图元 *arealist* 的指针. 之所以安排循环链表是为了便于对算法 2.1 中 P 集合的访问. *arealist* 是一单向链表，存储基本图元和求并结果. *arealist* 中每一元素是指向线条链表 *edgelist* 的指针并且第 1 个元素指向小岛，其余元素指向孔洞. *edgelist* 每一元素指向构成小岛和孔洞的各个曲线段，

pcblist 和 *edgelist* 均为异质链表.

3.2 精度处理

算法 2.1 实现中需要解决的另一个重要问题是保证数值运算精度,从而保证计算结果的正确性.轮廓求解的数值计算精度包含以下 3 个关键方面:(1)判别 2 多边形有无交点必须绝对准确,这依赖于曲线段之间的相交判别.(2)曲线段的交点计算必须非常精确以保证算法鲁棒性和正确性.(3)点与区域的位置关系判定必须绝对准确,这要求精确的数值计算以区分点在区域的内部、边界或是外部.

遗憾的是,即使使用双精度(64 位字长)数值计算也并不总能达到轮廓求解所需的精度,这表现在:(1)有时,当表达式结果理论上为零时,实际计算结果却是接近零的小数.(2)对同一几何参数不同的计算路径计算结果不一致.(3)数值偏差可能造成计算溢出.

针对以上现象,算法实现时对双精度运算作了巧妙的精度处理,软件测试结果表明,我们实施的精度处理方法能够有效地抑制计算误差,保证算法正确性和鲁棒性.

3.3 用分段算法提高 PCB 图求解速度

使用 *BOX* 测试法可以减少求交运算,对 n 个图元的 *PCB* 图,*BOX* 测试次数为 $O(n^2)$.由于多层板电路图每一层的走线绝大多数是平行的,我们对 *PCB* 图分段处理,使每一段所含图元数比较少,则能大大减少 *BOX* 测试,从而提高轮廓求解效率.

分段算法基于这样 2 个思想:(1)多层板每层连线走向具有一致性,因此沿单一方向分段比纵横划分效率高,分段可根据连线走向沿水平或垂直方向进行.(2)分段算法应能处理一个图元跨越多个段的情况.

同样对 n 个图元的 *PCB* 图,若将其分为 m 段,每段含 k 个图元,跨段忽略不计时,所作的 *BOX* 总测试次数为 $O(kn)$.比较未分段情况,可知理想情况下 m 分段提高求解效率约 m 倍.当然,分段增多时,跨段也增加,分段管理本身的开销会降低轮廓求解的效率.

4 结　语

本文提出了一种适用于二维复杂 PCB 电路和不规则图案的轮廓求解算法.该算法与我们在区域运算所提出的算法[2,3]一起构成了一组算法,包括曲线求交、包含判定、多边形运算和连通分割等.在区域运算的具体实现时,我们设计了环绕法,圆满高效地解决了点与位置关系的判定问题.一年多来,在 1 台基于 PC386 的小型(2×10^4 个图元,500mm×500mm)多功能(集印制电路板雕刻、光绘、钻孔和铭牌商标图案制作于一体)CAD/CAM 系统上运行表明,它的正确性、高效性和鲁棒性优于颇为知名的 Margalit 算法.[1]

附:对文献[1]中 Margalit 算法正确性证明的补正

Margalit 算法是 Avraham Margalit 于 1989 年提出的适用于顶点完全多边形的区域运算法.他在文献[1]中以多边形求交为例证明 Margalit 算法的正确性,并使用反证法证明其充分性:多边形 A 与 B 相交,$A\cap B=R$,假设 A 中有内部片段或重合片段不是交集多边形 R 的边界,这就意味着存在一点 p,$p\in A$ 且 $p\in B$ 但 $p\notin R$,这与 $R=A\cap B$ 矛盾.因此当片段是内部或重合片段时它是交集多边形的边界.

以上证明并不严密,因为由片段不是多边形的边界并不能推出片段上的点就一定不属于多边形.事实上当片段不是边界时片段上的点可以是多边形的内部点或多部点,因此“$P\notin R$”这一结论不能成立.实际

上，要证明内部、重合片段是交集多边形的边界，只需证明内部、重合片段满足交集多边形的边界条件即可. 我们证明如下：

设 $e(a,b)$ 是 A 上内部片段，取 $e(a,b)$ 上除 a,b 外任意一点 x，由于 $x\in i(B)$，因此 x 的邻域 $N(x,r_0)\subset B$. 又 $x\in b(A)$，故存在 $y\in N(x,r_0)$ 使得 $y\in A$，于是 $y\in A\cap B$. 又存在 $z\in\sim A$，于是 $z\in\sim(A\cap B)$. 对于 x 的任意邻域 $N(x,r)$，当 $r\leqslant r_0$ 时，同理可得 $N(x,r)$ 中既包含 $A\cap B$ 中点，也包含 $\sim(A\cap B)$ 中点. 当 $r>r_0$ 时，有 $N(x,r_0)\subset N(x,r)$，$N(x,r)$ 同样既包含 $A\cap B$ 中点，也包含 $\sim(A\cap B)$ 中点，于是 x 是 $A\cap B$ 的边界点. 根据边界的连续性，a,b 也是 $A\cap B$ 的边界点. 因此 $e(a,b)$ 是交集多边形的边界.

设 $e(a,b)$ 是多边形 A 上同向重合片段，取 $e(a,b)$ 上除 a,b 外任意一点 x，并考察 A,B 去掉 $e(a,b)$（不包含端点）后其余各点与 x 的距离，设最小距离为 r_0. 取 x 的邻域 $N(x,r_0)$，$N(x,r_0)$ 被 e 分为 3 个子集 N_L，N_R，N_O. $N_L=\{P|P\in N(x,r_0)$ 且 P 位于 $e(a,b)$ 的左侧$\}$，$N_R=\{P|P\in N(x,r_0)$ 且 P 位于 $e(a,b)$ 的右侧$\}$，$N_O=\{P|P\in N(x,r_0)$ 且 P 位于 $e(a,b)$ 上$\}$. 由于 $e(a,b)$ 为同向边界片段，根据边界取向规则，有 $N_L\subset A$，$N_L\subset B$，$N_R\subset\sim A$，$N_R\subset\sim B$，于是 $N_L\subset A\cap B$，$N_R\subset\sim(A\cup B)\subset\sim(A\cap B)$. 对于 x 的任意邻域 $N(x,r)$，当 $r\leqslant r_0$ 时，同理可得 $N(x,r)$ 中既包含 $A\cap B$ 中点，也包含 $\sim(A\cap B)$ 中点. 当 $r>r_0$ 时，有 $N(x,r_0)\subset N(x,r)$，$N(x,r)$ 同样既包含 $A\cap B$ 中点，也包含 $\sim(A\cap B)$ 中点，于是 $e(a,b)$ 中除 a,b 外任一点均是 $A\cap B$ 的边界点. 根据边界连续性，a,b 也将是 $A\cap B$ 的边界点. 故 $e(a,b)$ 是 $A\cap B$ 的边界.

设 $e(a,b)$ 是多边形 A 上反向重合片段，取 $e(a,b)$ 上除 a,b 外任意一点 x，并考察 A,B 去掉 $e(a,b)$（不包含端点）后其余各点与 x 的距离，设最小距离为 r_0. 取 x 的邻域 $N(x,r_0)$，$N(x,r_0)$ 被 e 分为 3 个子集 N_L，N_R，N_O. $N_L=\{P|P\in N(x,r_0)$ 且 P 位于 $e(a,b)$ 的左侧$\}$，$N_R=\{P|P\in N(x,r_0)$ 且 P 位于 $e(a,b)$ 的右侧$\}$，$N_O=\{P|P\in N(x,r_0)$ 且 P 位于 $e(a,b)$ 上$\}$. 由于 $e(a,b)$ 为反向重合片段，根据边界取向规则，有 $N_L\subset A$，$N_R\subset\sim A$，因此 $N(x,r)$ 既包含 $A\cap B$ 中点（x 本身），也包含 $\sim(A\cap B)$ 中点，于是 $e(a,b)$ 中除 a,b 外任一点均是 $A\cap B$ 的边界点. 根据边界连续性，a,b 也将是 $A\cap B$ 的边界点. 故 $e(a,b)$ 是 $A\cap B$ 的边界.

综上所述，内部片段和重合片段是交集多边形的边界. □

参考文献

1 Avraham Margalit. An algorithm for computing the union, intersection or difference of two polygons. Computer & Graphics, 1989, **13**(2): 167~183.

2 周明天，徐波. 二维不规则图形和印制板电路区域运算的算法研究. 软件学报，1995，**6**(8)：473~478.

3 Zhou Mingtian, Xu Bo. An algorithm for region operation on 2D complicated PCB circuit and irregular patterns. Chinese Journal of Advanced Software Research, 1995, **2**(3): 219~226.

AN ALGORITHM FOR OUTLINE RESOLUTION ON 2D COMPLICATED PCB CIRCUIT AND IRREGULAR PATTERN

Xu Bo Zhou Mingtian

(*University of Electronic Science and Technology Chengdu* 610054)

Abstract An algorithm for outline resolution on 2D complicated PCB circuit and irregular pattern is presented. Its mathematic model, algorithm description and implementation are described as well as correctness proof and complexity analysis of the algorithm. The sample results on a PC386-based CAD/CAM system(CACAO) are also demonstrated.

Key words CAD/CAM, outline resolution, computer graphics, printed circuit board, inscription board.