

# 神经网络求解图最短路径问题的一种新方法\*

朱大铭 马绍汉

(山东大学计算机系 济南 250100)

**摘要** 本文给出一种求解图最短路径问题的实用反馈式神经网络,并证明这种网络的求解稳定性.这种网络基于最小值选择网而构成,对任意有向图和无向图均能收敛到其唯一的稳定点.由此求得图所有顶点对间的最短路径及最短路径长度.本文结果是神经网络求解非 NP-难解类优化问题的一种新尝试.

**关键词** 神经网络,突触权值,稳定性,图,最短路径.

图的最短路径问题 SP(shortest path)在许多科研和工程中具有广泛的应用,这是一个典型的组合优化问题又是一个多项式时间可解的 P 问题.神经网络在优化计算中所发挥的作用越来越受到人们的重视,目前已成为神经网络研究的一个重要分支.

Hopfield 和 Tank<sup>[1~3]</sup>首先将神经网络引入货郎担问题的优化计算中.许多学者利用 Hopfield 模型给出了大量组合优化问题的神经计算方法. Rauch 与 Winarske<sup>[4]</sup>首先给出求解图最短路径问题的 Hopfield 神经网络, Zhang, Thompopoulos<sup>[5]</sup>及 Mehmet, Kamoun<sup>[6]</sup>又分别在计算性能和适用范围方面对文献[4]的方法作了不同程度的改进.

上述优化计算方法均不能保证求得问题的最优解,且解的优化程度依赖于构成能量函数的某些参数的人为选择.这是目前 Hopfield 模型用于求解组合优化问题的通病.本文给出一种计算图最短路径的实用反馈式神经网络,并证明这种网络能够精确计算有向图所有顶点对间的最短路径及最短路径长度.这种网络经简化可直接用于无向图最短路径问题的求解.

本文第 1 节首先给出由  $K$  个实数选择最小数的前向选择网络.第 2 节利用最小数选择网进一步构造求解有向图最短路径问题的反馈式神经网络,并给出这种网络的计算能力及稳定性能分析.第 3 节将第 2 节给出的方法推广到无向图最短路径问题.最后给出计算机模拟计算结果.

## 1 最小数选择器

文献[7]给出了在  $K$  个实数中选择第  $i$  个最大数的前向网络.下面利用其思想设计由

\* 本文研究得到国家自然科学基金和山东省自然科学基金资助.作者朱大铭,1964年生,讲师,主要研究领域为神经网络,算法及复杂性.马绍汉,1938年生,教授,中国科学院计算技术研究所 CAD 国家重点开放实验室客座研究员,主要研究领域为算法与复杂性,人工智能及并行算法.

本文通讯联系人:朱大铭,济南 250100,山东大学计算机系

本文 1995-04-12 收到修改稿

K 个实数选择最小值的前向选择器. 单个神经元的动力学特征描述为:

$$y = f\left(\sum_{i=1}^N w_i x_i - t\right) \tag{1}$$

其中  $x_1, x_2, \dots, x_N$  为神经元的  $N$  个输入,  $y$  为神经元的输出,  $w_i$  为神经元与输入  $x_i$  的连接强度, 称为突触权值,  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $t$  为神经元阈值,  $f$  称为神经元作用函数, 神经元的不同, 主要体现为作用函数的不同. 最小值选择器利用了 3 种神经元<sup>[8~10]</sup>:

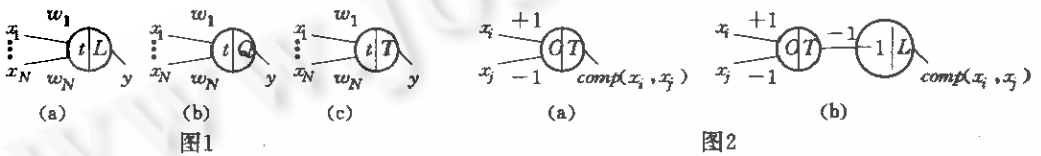
(1) L 型神经元(图 1(a)), 作用函数为  $f_L(x) = x$  (2)

(2) Q 型神经元(图 1(b)), 作用函数为  $f_Q(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$  (3)

(3) T 型神经元(图 1(c)), 作用函数为  $f_T(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$  (4)

给定  $K$  个实数  $x_1, x_2, \dots, x_K$ , 在其中选择最小值的前向网络由 3 层构成, 描述如下:

A. 比较层



定义 1. 对于实数集合  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_K\}$ , 其任意元素  $x_i$  和  $x_j$  的比较函数定义为:

$$comp(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & x_i \leq x_j \\ 1, & x_i > x_j, i < j \end{cases} \tag{5a}$$

$$comp(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & x_i < x_j \\ 1, & x_i \geq x_j, i > j \end{cases} \tag{5b}$$

$$comp(x_i, x_i) = 0 \tag{5c}$$

关系(5b)可直接采用 T 型神经元实现(图 2(a)). 关系(5a)又可改写为:  $comp(x_i, x_j) = 1 - z(x_i, x_j)$ , 其中  $z(x_i, x_j) = comp(x_j, x_i)$ . 故利用 T 型神经元和 L 型神经元可计算(5a)(图 2(b)). 于是利用上述方法得到集合  $X = \{x_1, \dots, x_K\}$  中所有元素间的比较值. 在实际实现最小值选择器时, 可省略计算(5a)的第 2 级 L 型神经元, 因为下一层(选择层)网络直接利用  $z(x_i, x_j)$  也可得到所需结果.

B. 选择层

定义 2. 设  $\{x_1, \dots, x_K\}$  中元素由小到大依次排列为  $x(1), \dots, x(K)$ , 则  $x_i (1 \leq i \leq K)$  的顺序号定义为:  $rank(x_i, X) = m - 1$ , iff  $x_i = x(m)$ .

由定义 2 及公式(5)得:

$$\begin{aligned} rank(x_i, X) &= \sum_{j=1}^k comp(x_i, x_j) = \sum_{j=1}^{j < i} comp(x_i, x_j) + \sum_{j=i}^K comp(x_i, x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{j < i} comp(x_i, x_j) - \sum_{j > i} z(x_i, x_j) + K - i \end{aligned} \tag{6}$$

显然若  $x_i$  为  $X$  所有元素中的最小值, 则  $rank(x_i, X) = 0$ .

定义 3. 判定  $x_i$  是否为  $X$  中最小值的选择函数定义为:

$$sel(x_i, X) = \begin{cases} 0, & rank(x_i, X) = 0 \\ 1, & rank(x_i, X) \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

故采用 T 型神经元实现 K 个实数中最小值的判定选择(图 3)。

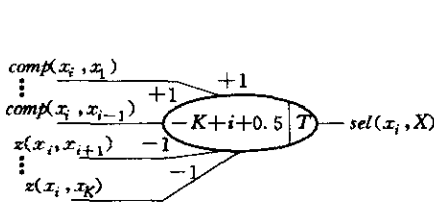


图3

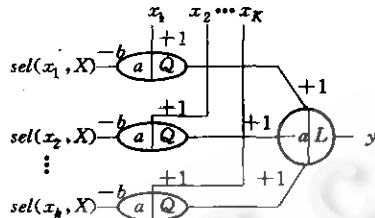


图4

### C. 输出层

欲将 K 个元素中的最小值输出,需首先确定一个充分小负数 a 和一个充分大正数 b,使  $-a+x>0$  且  $-b-a+x<0$ . 于是利用 Q 型和 L 型神经元最终实现最小值输出(图 4). 其中 a 和 b 的确定依赖于 X 中元素本身的大小,下文在讨论求图最短路径的神经网络时将给出 a, b 的具体选择. 由上述讨论易知,神经网络的最后输出  $y = \min\{x \in X\}$ . 其中比较层需 K (K-1) 个神经元,选择层需 K 个神经元,输出层需 K+1 个神经元,所需神经元总数为  $K^2 + K + 1$  个.

## 2 有向图最短路径的计算

### 2.1 问题简述

n 个顶点的有向图表示为  $G = (V_n, E)$ , 其中  $V_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , 表示 G 的顶点集合, E 为图 G 的有向边集合. 由顶点 i 到顶点 j 的有向边记为  $e_{ij}$ , 且对任意边  $e_{ij}$  赋予权  $C(e_{ij})$ .  $C(e_{ij})$  又称为边  $e_{ij}$  的长度. 若从顶点 s 沿有向边  $e_{s_1}, e_{s_2}, \dots, e_{s_d}$  可到达顶点 d, 称:  $P(s, d) = (s, i, j, \dots, r, d)$  为从 s 到 d 的有向路径. 且该路径长度定义为:

$$L(s, d) = C(e_{s_1}) + C(e_{s_2}) + \dots + C(e_{s_d}) \quad (8)$$

由顶点 s 到顶点 d 可能存在多条路径. 所谓最短路径问题即是由任意顶点 s 到任意顶点 d 求一条路径  $P^*(s, d)$ , 使  $L(s, d)$  最短. 下文将由 s 到 d 的最短路径长度记为  $L^*(s, d)$ .

下面给出的神经网络用于求解图 G 的所有顶点间的最短路径及最短路径长度.

### 2.2 神经网络的构成

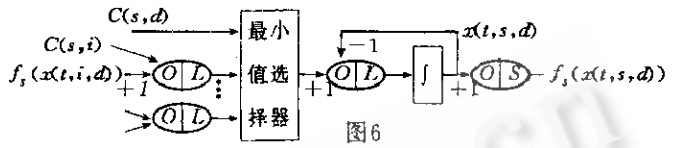
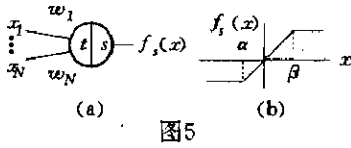
定义 4. 给定有向图  $G = (V_n, E)$ . 对于任意顶点  $i, j \in V_n$ , 若  $e_{ij} \in E$ , 则称 j 是 i 的外相邻顶点, 并称集合  $OUT(i) = \{j | j \in V_n, e_{ij} \in E\}$  为顶点 i 的外相邻顶点集.

下面将定义在边集  $E(G)$  上的权值扩展到所有顶点对之间. 设  $i, j \in V_n(G)$ , 若  $j \in OUT(i)$ , 则  $C(e_{ij}) < \infty$ ; 否则  $C(e_{ij})$  无定义或  $C(e_{ij}) = \infty$ . 在实际的网络实现中取一个充分大的正数  $C^w < \infty$  用以表示无定义边的权值. 只需估计  $L_{max} = \max\{L^*(i, j) | i, j \in V_n, P(i, j) \text{ 存在}\}$ , 并使  $C^w > L_{max}$ , 便不妨碍原图 G 的最短路径求解. 于是将由顶点 i 到 j 的边长度扩展定义为  $C(i, j)$ :

$$C(i, j) = \begin{cases} C(e_{ij}), & j \in OUT(i) \\ C^w, & j \notin OUT(i) \end{cases} \quad (9)$$

计算图最短路径的神经网络基于最小值选择器而构成. 为了进一步限定最小值选择器输入的取值范围, 引入两端界定的线性神经元(图5), 称为S型神经元. 作用函数为:

$$f_s(x) = \begin{cases} \alpha, & x \leq \alpha \\ x, & \alpha < x < \beta \\ \beta, & x \geq \beta \end{cases} \quad (10)$$



设  $x(t, s, d)$  为时刻  $t$  由顶点  $s$  到顶点  $d$  的最短路径长度计算值. 则计算图  $G$  的所有顶点对间最短路径的神经网络系统由下式描述:

$$\begin{cases} dx(t, s, d)/dt = -x(t, s, d) + \min\{C(s, d), C(s, i) + f_s(x(t, i, d)) \mid i \in OUT(s)\} \\ \forall s, d \in V_n(G) \end{cases} \quad (11)$$

相应的局部神经网络结构如图6. 其中取S型神经元的上下界参数为:  $\alpha=0, \beta=C^m$ . 最小值选择器输出层参数  $a=0, b=2C^m$ . 根据神经网络输出得到图最短路径和最短路径长度的方法如下: 顶点  $s$  到顶点  $d$  的最短路径长度由  $x(t, s, d)$  输出. 最短路径的输出依赖于最小值选择器的选择层输出. 由顶点  $s$ , 沿选择函数  $sel(x_i, X)=0$  的最小值选择器输入, 可得  $s$  的外相邻顶点  $i$ , 若  $i=d$ , 则  $P^*(s, d)=(s, d)$  为最短路径. 若  $i \neq d$ , 则按同样方法又可得  $i$  的外相邻顶点  $j$ . 依此类推, 直到顶点  $d$  为止. 如此由  $s$  到  $d$  的最短路径为:  $P^*(s, d)=(s, i, j, \dots, d)$ .

### 2.3 神经网络性能分析

**定理 1.** 给定有向图  $G=(V_n, E)$ , 则求解  $G$  所有顶点对间最短路径的神经网络系统(公式(11))所需神经元总数为:  $(n-1) \sum_{s \in V_n} (|OUT(s)| + 2)^2$ .

证明: 设  $s, d$  是图  $G$  的任意 2 个顶点, 则计算由  $s$  到  $d$  最短路径的局部神经网络中, 最小值选择器所需神经元个数为  $(|OUT(s)| + 1)^2 + |OUT(s)| + 2$ . 其余结构需  $|OUT(s)| + 2$  个神经元. 注意到最小值选择器的输出神经元与形成反馈信号与最小值选择器输出信号相加的神经元均为  $L$  型, 两者完全可以合并为一个. 故用于计算  $s$  到  $d$  最短路径的局部神经网络需  $(|OUT(s)| + 2)^2$  个神经元. 因对每个顶点  $s \in V_n$ . 需求解由  $s$  到其它  $n-1$  个顶点的最短路径. 由此即得定理 1 的结论.

**引理 1.** 给定有向图  $G=(V_n, E)$ . 若  $G$  的所有有向边均具有正权值, 则系统(公式(11))有且只有一个稳定点. 该稳定点恰好对应图  $G$  所有顶点对之间的最短路径.

证明: 设对图  $G$  的任意顶点  $s, d(s \neq d)$ , 有  $x(t, s, d) = L^*(s, d)$ , 则公式(11)变为:

$$\begin{cases} dx(t, s, d)/dt = 0 \\ \forall s, d \in V_n(G) \end{cases} \quad (12)$$

由此知  $G$  的所有顶点对间的最短路径长恰好形成神经网络系统(公式(15))的一个稳态. 下面证明稳定点的唯一性. 设  $X^* = (x^*(1, 2), \dots, x^*(1, n), \dots, x^*(n, 1), \dots, x^*(n, n-1))^T$  是系统(公式(11))的任一稳定点, 用反证法设  $X^* \neq (L^*(1, 2), \dots, L^*(1, n), \dots, L^*(n, 1), L^*(n, n-1))^T$ . 即存在图  $G$  的顶点  $s, d(s \neq d)$ , 使  $x^*(s, d) > L^*(s, d)$  或  $x^*(s, d)$

$\langle L^*(s, d)$ . 下面分 2 种情况讨论.

情况 1.  $x^*(s, d) < L^*(s, d)$ . 此时应有  $x^*(s, d) < C(s, d)$ , 不然则与  $L^*(s, d) \leq C(s, d)$  矛盾. 于是由  $dx(t, s, d)/dt = 0$  得, 存在  $s_1 \in OUT(s)$ , 使  $x^*(s, d) = C(s, s_1) + x^*(s_1, d) < L^*(s, d)$ . 由此可得  $x^*(s_1, d) < L^*(s_1, d)$ , 不然则可导致  $x^*(s, d) \geq L^*(s, d)$  而矛盾. 类似地可以继续推得, 存在  $s_2, \dots, s_m, s_i \in OUT(s_{i-1}), 1 \leq i \leq m$ , 使在路径  $P(s, s_m) = (s = s_0, s_1, \dots, s_m)$  上的顶点均有  $x^*(s_i, d) < L^*(s_i, d)$ . 但因图  $G$  的顶点个数有限, 故当  $m$  增大到某值时便会有  $s_m = s_l, l < m$ . 考虑有向圈  $(s_l, s_{l+1}, \dots, s_m = s_l)$  上所有顶点到顶点  $d$  的路径长度状态方程得:

$$\begin{cases} x^*(s_l, d) = C(s_l, s_{l+1}) + x^*(s_{l+1}, d) \\ \dots\dots\dots \\ x^*(s_{m-1}, d) = C(s_{m-1}, s_m) + x^*(s_m, d) \end{cases} \quad (13)$$

将上述等式相加得:  $C(s_l, s_{l+1}) + \dots + C(s_{m-1}, s_m) = 0$ . 这与任意  $C(i, j) > 0$  矛盾. 故在情况 1,  $X^*$  不是稳定点.

情况 2.  $x^*(s, d) > L^*(s, d)$ . 由情况 1 知, 对任意 2 顶点  $i, j \in V_n(G)$ , 若  $x^*(i, j) < L^*(i, j)$ , 则  $X^*$  必不是系统(公式(11))的稳定点. 因此假设若  $x^*(i, j) \neq L^*(i, j)$ , 则  $x^*(i, j) > L^*(i, j)$ . 设  $P^*(s, d) = (s = s_0, s_1, \dots, s_k, d)$  是有向图  $G$  由顶点  $s$  到  $d$  的最短路径. 由公式(11)及情况 2 的假设易得:  $L^*(s, d) < C(s, d)$ . 于是有:  $C(s, s_1) + x^*(s_1, d) > L^*(s, d) = C(s, s_1) + L^*(s_1, d)$ , 由此得:  $x^*(s_1, d) > L^*(s_1, d)$ . 类似可得, 沿  $P^*(s, d)$  上各顶点均满足:  $x^*(s_i, d) > L^*(s_i, d), i = 0, \dots, k$ . 考察  $x^*(s_k, d)$  和  $L^*(s_k, d)$ , 因  $s_k$  是由  $s$  到  $d$  的最短路径  $P^*(s, d)$  上的最后一个中间顶点, 必然有  $L^*(s_k, d) = C(s_k, d)$ , 但由  $x^*(s_k, d) > L^*(s_k, d)$  可得  $L^*(s_k, d) < C(s_k, d)$ . 矛盾反证了  $X^*$  不是稳定点. 由情况 1、情况 2 得, 神经网络系统(公式(11))只有一个稳定点.

下面讨论神经网络的稳定性. 我们尚不能构造出系统(公式(11))的 Lyapunov 能量函数, 但可直接证明其收敛性. 设  $X(t) = (x(t, 1, 2), \dots, x(t, 1, n), \dots, x(t, n, 1), \dots, x(t, n, n-1))^T, L^* = (L^*(1, 2), \dots, L^*(1, n), \dots, L^*(n, 1), \dots, L^*(n, n-1))^T$ , 下面证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = L^*$ .

引理 2. 对于系统  $dx/dt = -x + g(t), x \in R$ , 任给初值  $x(t_0)$ , 若当  $t > t_1 \geq t_0$  时恒有  $g(t) > C$ , 则存在  $t_2$ , 使得当  $t > t_2$  时恒有  $x > C$ ; 若当  $t > t_1 \geq t_0$  时恒有  $g(t) \geq C$ , 则对任意  $\delta > 0$  存在  $t_2$ , 使当  $t > t_2$  时恒有  $x + \delta > C$ ; 若当  $t > t_1 \geq t_0$  时恒有  $g(t) < C$ , 则存在  $t_2$ , 使当  $t > t_2$  时恒有  $x < C$ ; 若当  $t > t_1 \geq t_0$  时恒有  $g(t) \leq C$ , 则对任意  $\delta > 0$  存在  $t_2$ , 使当  $t > t_2$  时恒有  $x - \delta < C$ .

证明: 显然.

定理 2. 给定有向图  $G = (V_n, E)$ . 任给初态  $X(t_0)$ , 则系统(公式(11))总收敛到其唯一的稳定态. 即:  $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = L^*$ .

证明: 公式(11)进一步改写为:

$$\begin{cases} dx(t, s, d)/dt = -x(t, s, d) + g(X(t), s, d) \\ \forall s, d \in V_n(G) \end{cases} \quad (14)$$

其中  $g(X(t), s, d) = \min\{C(s, d), C(s, i) + f_i(x(t, i, d)) \mid i \in OUT(s)\}$ . 下面我们分 2 步证明结论.

(I) 由  $f_i(x) \geq 0$  可得  $g(X(t), s, d) \geq \min\{C(s, s_1) \mid s_1 \in OUT(s)\}$ , 故由引理 2 可得, 存在  $t_1$ , 使得当  $t > t_1$  时, 对任意  $\delta > 0$ , 有:

$$x(t, s, d) > \min\{C(s, s_1) \mid s_1 \in OUT(s)\} - \delta/2 \tag{15}$$

同理对  $s_1$  亦可证, 存在  $t_2$  使得当  $t > t_2$  时有:

$$x(t, s_1, d) > \min\{C(s_1, s_2) \mid s_2 \in OUT(s_1)\} - \delta/2 \tag{16}$$

其中  $s_1 \in OUT(s)$ . 于是当  $t > \max\{t_1, t_2\}$  时有:

$$g(X(t), s, d) > \min\{C(s, d), C(s, s_1) + \min\{C(s_1, s_2) \mid s_2 \in OUT(s_1)\} \mid s_1 \in OUT(s)\} - \delta \tag{17}$$

于是由引理 2 得, 存在  $t_3$ , 使得当  $t > t_3$  时:

$$x(t, s, d) > \min\{C(s, d), C(s, s_1) + \min\{C(s_1, s_2) \mid s_2 \in OUT(s_1)\} \mid s_1 \in OUT(s)\} - \delta \tag{18}$$

依此类推可证, 存在  $t^*$ , 使得当  $t > t^*$  时有:  $x(t, s, d) > G_1(s, d, K) - \delta$ . 其中:

$$G_1(s, d, k) = \min\{C(s, d), C(s, s_1) + \min\{C(s_1, d), C(s_1, s_2) + \min\{\dots + \min\{C(s_{k-1}, d), C(s_{k-1}, s_k) + \min\{C(s_k, s_{k+1}) \mid s_{k+1} \in OUT(s_k)\} \mid s_k \in OUT(s_{k-1})\} \dots \} \mid s_2 \in OUT(s_1)\} \mid s_1 \in OUT(s)\} \tag{19}$$

注意到存在  $k, 1 \leq k \leq n$ , 使  $G_1(s, d, k) = L^*(s, d)$ , 故当  $t > t^*$  时,  $x(t, s, d) > L^*(s, d) - \delta$ .

(II) 类似情况 1, 可从另一面导出, 存在  $t^*$ , 当  $t > t^*$  时:  $x(t, s, d) < G_2(s, d, l) + \delta$ , 其中:

$$G_2(s, d, l) = \min\{C(s, d), C(s, s_1) + \min\{C(s_1, d), C(s_1, s_2) + \min\{\dots + \min\{C(s_l, d), C(s_l, s_{l+1}) + C(s_{l+1}, d) \mid s_{l+1} \in OUT(s_l)\} \dots \} \mid s_2 \in OUT(s_1)\} \mid s_1 \in OUT(s)\} \tag{20}$$

注意到存在  $l, 1 \leq l \leq n$ , 使  $G_2(s, d, l) = L^*(s, d)$ , 故当  $t > t^*$  时:  $x(t, s, d) < L^*(s, d) + \delta$

由 (I) (II) 2 面讨论得, 任给  $\delta > 0$ , 存在  $t^*$ , 当  $t > t^*$  时有:

$$L^*(s, d) - \delta < x(t, s, d) < L^*(s, d) + \delta \tag{21}$$

即:  $|x(t, s, d) - L^*(s, d)| < \delta$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, s, d) = L^*(s, d)$ .

### 3 无向图的最短路径求解

可以认为无向图的任一边均为双向边. 因此设  $s, d$  是无向图  $G(V, E)$  的任意 2 顶点, 则 2 点间的最短路径长度满足:  $L^*(s, d) = L^*(d, s)$ . 下面将图  $G$  的顶点  $i$  的相邻顶点集仍记为  $OUT(i)$ .

显然可将求解有向图最短路径的神经网络直接用于求解无向图最短路径. 但因无向图最短路径的双向性, 可将计算  $L^*(s, d)$  和  $L^*(d, s)$  的局部神经网络只留其一: 若  $|OUT(s)| \leq |OUT(d)|$ , 则可保留由  $s$  出发的局部神经网络, 否则可保留由  $d$  出发的局部网络. 于是有:

**定理 3.** 给定无向图  $G = (V, E)$ . 仍可按照公式(11)计算图  $G$  所有顶点对间的最短路径. 所需神经元个数不多于  $(|V| - 1) \sum_{i \in V} (|OUT(s)| + 2)^2 / 2$ . 且系统总收敛到图  $G$  的最

短路径.

#### 4 计算机模拟

考虑一个求解无向连通图最短路径的例. 已知 6 个顶点的无向图  $G$  及各边权值如图 7(a)所示.

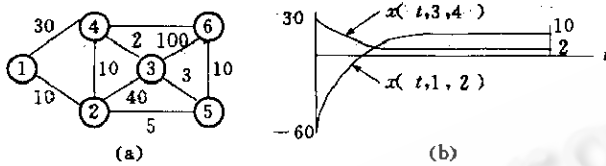


图7

并取系统的初值为:

$$\begin{aligned}
 &x(t_0, 1, 2) = -60.00, x(t_0, 1, 3) = 30.00, x(t_0, 1, 4) = 30.00, x(t_0, 1, 5) = -60.00, \\
 &x(t_0, 1, 6) = 30.00, x(t_0, 2, 3) = 30.00, x(t_0, 2, 4) = -60.00, x(t_0, 2, 5) = -60.00, \\
 &x(t_0, 2, 6) = 30.00, x(t_0, 3, 4) = 30.00, x(t_0, 3, 5) = -60.00, x(t_0, 3, 6) = -60.00, \\
 &x(t_0, 4, 5) = 30.00, x(t_0, 4, 6) = -60.00, x(t_0, 5, 6) = -60.00.
 \end{aligned}$$

在计算过程中总使  $x(t, s, d) = x(t, d, s), 1 \leq s, d \leq 6$ . 则神经网络的状态分量  $x(t, s, d)$  均很快收敛到  $L^*(s, d)$ . 其中  $x(t, 1, 2), x(t, 3, 4)$  的状态变化如图 7(b)所示.

#### 5 结论

本文给出了一种求解图最短路问题的实用神经网络, 并证明了这种网络的求解稳定性. 本文的神经网络对于任意正权值的有向图和无向图均收敛到其唯一的稳定点. 根据网络稳定点输出, 立即得到图所有顶点间的最短路径及最短路径长度. 计算机模拟实验证明: 虽然系统总是收敛的, 但在收敛过程中具有小波动性. 因此该网络是否具有 Lyapunov 意义下的稳定性有待于做更深入的研究. 以往人们对任意连接优化问题的神经计算均采用 Hopfield 模型, 因而存在不能求得最优值的困难. 本文给出的神经网络一方面可以求得最优值(最短路径), 另一方面也是对神经计算非 NP-难解类优化问题的一种新尝试.

#### 参考文献

- 1 Hopfield J J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proc. Nat. Acad. Sci., 1982, 79: 2554~2558.
- 2 Hopfield J J, Tank D W. Neural computations of decisions in optimization problems. Biol. Cybern., 1986, 52: 141~152.
- 3 Tank D W, Hopfield J J. Simple neural optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. IEEE Trans. Circuits. Syst., 1986, CAS-33(5): 533~541.
- 4 Rauch H E, Winarske T. Neural networks for routing communication traffic. IEEE Cont. Syst. Mag., 1988, 5: 26~30.
- 5 Zhang L, Thomopoulos S C A. Neural network implementation of the shortest path algorithm for traffic routing in communication networks. In: Proc. Int. Joint Conf. Neural Networks, 1989, I. 591.
- 6 Mehmet Ali M K, Kamoun F. Neural networks for shortest path computation and routing in computer networks.

- IEEE Trans. N. Networks, 1993,4(6):941~954.
- 7 Shi P, Ward R K. OSNet: a neural network impletation of order statistic filters. IEEE Trans. N. Networks. 1993,4(2):234~241.
- 8 Cichocki A, Unbehauen R. Neural networks for solving systems of linear equations and related problems. IEEE Trans. Circuits Syst. , 1992,39:124~138.
- 9 Hopfield J J, Tank D W. Simple neural optimization networks: an A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. IEEE Trans. Circuits Syst. , 1986,CAS-33:533~541.
- 10 Kennedy M P, Chua L O. Neural networks for nonlinear programming. IEEE Trans. Circuits Syst. , 1988,35:554~562.

## A NEW METHOD FOR SHORTEST PATHS COMPUTATION BY NEURAL NETWORKS

Zhu Daming Ma Shaohan

(Department of Computer Science Shandong University Ji'nan 250100)

**Abstract** A new kind of neural networks for continuously computing the shortest path problem is presented in this paper, and the stability of the network is proved. This kind of neural networks is composed of the minimum selecting networks and other usually used neurons. For any directed or undirected graph, the neural networks are always convergent to their single equilibrium, so that the shortest paths of all the node pairs are produced. This paper makes a new study on solving the optimization, but not NP—hard problems by neural networks.

**Key words** Neural network, synaptic weight, stability, graph, shortest path.