第 7 卷第 11 期
1996 年 11 月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 7, No. 11
Nov. 1996

标记逻辑的 TABLEAU 判定过程*

程晓春　　刘叙华

（吉林大学计算机系　长春　130023）
（吉林大学符号计算与知识工程开放实验室　长春　130023）

摘要　标记逻辑是一种重要的次协调逻辑，$\models$ 和 $\approx$ 是标记逻辑中的 2 种推理关系. 二者都是次协调的，可以用统一的方法处理一致的知识与不一致的知识，$\models$ 是单调的，有基于归结的证明论，但不能保持经典逻辑中合理的推理，如三段论. $\approx$ 是非单调的，在前提一致时等价于经典逻辑的推理关系，但缺少有效的证明论. 本文将给出推理关系 $\models$ 和 $\approx$ 基于 Tableau 演算的可靠而且完备的判定方法.

关键词　标记逻辑，Tableau 方法，择优蕴涵，次协调逻辑.

常识的表示和推理随知识工程的崛起而显得日益重要. McCarthy 指出，人工智能最关键的问题是常识和推理. 常识有可能是不完全、不一致、不精确的. 常识推理的特点之一是具有非单调性：当增加新的知识时，能取消根据以前不完全知识得到的结论. Minsky 指出，使用经典逻辑，不能解决推理过程的这种非单调性. 1978 年 McCarthy 提议，在 Stanford 举行了第 1 次非单调推理会议；1980 年 AI 出版专辑，给出 3 种著名的非单调推理方法：Reiter 的缺省逻辑；McDermott 和 Doyle 的非单调逻辑；McCarthy 的限定推理. 1986 年 Shoham 提出用择优逻辑作为非单调理论的基础，把上述几种逻辑看成是择优逻辑的特例.[1,2]常识推理的特点之二是具有次协调性：在知识不一致时仍能得到合理的结论. 标记逻辑[3,4]容许原子取值到信念格上，可以表示对原子持矛盾信念这种事实，从而容许在原子级上不一致的命题参与推理而且不推出所有公式，此时也称推理是不平凡的. 标记逻辑中的 2 种推理关系 $\models$ 和 $\approx$ 都是次协调的，可以用统一的方法处理一致的知识与不一致的知识. $\models$ 是单调的，有基于归结的证明论，但不能保持经典逻辑中合理的推理，如三段论. $\approx$ 通过引入择优关系克服了 $\models$ 的缺点，当前提一致时等价于经典逻辑的推理关系. 像其他择优蕴涵一样，$\approx$ 是非单调的，但是缺少有效的证明论. 因此，研究标记逻辑中择优蕴涵 $\approx$ 的证明论，对常识推理中的次协调推理与非单调推理的研究都有重要的意义. 本文将给出推理关系 $\models$ 和 $\approx$ 基于 Tableau 演算的可靠而且完备的判定方法. 为方便起见，本文只讨论命题逻辑.

本文第 1 节介绍标记逻辑的基本定义并讨论在标记逻辑中推理必不可少的化简过程和

* 本文研究得到国家自然科学基金和国家 863 高科技项目基金资助. 作者程晓春，1973 年生，博士，主要研究领域为自动推理，不确定知识处理. 刘叙华，1937 年生，教授，博士导师，主要研究领域为自动推理，人工智能.

本文通讯联系人：程晓春，长春 130023，吉林大学计算机系

本文 1995-09-13 收到修改稿

替换过程. 第 2 节介绍推理关系$\models$和$\mid\!\approx$. 第 3 节基于 Tableau 演算,给出命题情形$\models$和$\mid\!\approx$的证明论. 最后讨论了需要进一步研究的问题.

1　标记逻辑

在标记逻辑中,原子真值取在信念格 BSL,这里只讨论四值 BSL,如图 1.

图1

每个附有 BSL 中元素作为标记的命题原子称作标记原子,标记原子前加否定号称为负标记原子,标记原子与负标记原子统称为标记文字. 标记逻辑利用标记原子形成公式的规则与经典逻辑以原子形成公式的规则完全相同,从而标记逻辑在公式级上考虑,仍旧是经典的. 标记逻辑[3]中有 2 种否定,"认知否定"的作用主要体现在原子标记的改变上;"本体论的否定"与经典逻辑中的否定含义一致. 标记逻辑[3]中讨论了 2 种蕴涵:"认知蕴涵"与"本体论的蕴涵",这 2 种蕴涵可分别根据"认知否定"和"本体论的否定"来定义.

本文假设公式中的 2 种蕴涵已经分别根据定义用"认知否定"和"本体论的否定"重写为等价式,而且假设公式中的"认知否定"均已作用在原子的标记上,公式中只含"本体论的否定".

解释 I 满足公式 F 或 I 是 F 的一个模型,记为 $I\vdash F$,严格定义如下:

$I\vdash p{:}s$ iff $I(p)\geqslant_{BSL} s$;其中 p 是命题原子,$I(p)\in BSL$,$s\in BSL$,$\geqslant_{BSL}$是 BSL 上的序关系;

$I\vdash R\wedge Q$ iff $I\vdash R$ 且 $I\vdash Q$;

$I\vdash R\vee Q$ iff $I\vdash R$ 或 $I\vdash Q$;

$I\vdash \sim R$ iff $I\vdash R$ 不成立.

因为在公式级上看,标记逻辑中$\sim$、$\vee$、$\wedge$的定义与经典逻辑的相同,所以标记逻辑与经典逻辑一样,有分配律和 De. Morgan 律. 这在后面的证明中将要用到.

显然,任何解释满足形如 $p{:}\perp$ 的公式,从而可将公式中这类标记原子化简掉,这里给出一种化简方法:

(1)将公式中的 $p{:}\perp$ 用特殊公式 1 代替,$\sim p{:}\perp$ 用特殊公式 0 代替;

(2)将公式中含 1、0 的子公式按如下规则化简:$1\wedge Q$ 化简为 Q;$1\vee Q$ 化简为 1;~ 1 化简为 0;$0\wedge Q$ 化简为 0;$0\vee Q$ 化简为 Q;~ 0 化简为 1;最终或者公式中不含 0、1,或者公式化简为 0(不可满足)、1(任意解释可满足). 化简后的公式不含形如 $p{:}\perp$ 的标记原子.

由相同命题原子构成的标记文字中形如$\{p{:}x,\sim p{:}y\mid x\geqslant_{BSL} y\}$的标记文字对是不可同时满足的,称之为互补标记文字对. 设 G 与 H 是任意互补标记文字对,容易验证:对任意解释 I,若 $I\vdash G$ 则 $I\vdash \sim H$;若 $I\vdash H$ 则 $I\vdash \sim G$. 对偶地,形如$\{p{:}y\vee\sim p{:}x\mid x\geqslant_{BSL} y\}$的析取式是标记逻辑中的重言式.

显然 $p{:}x\wedge p{:}y$ 等价于 $p{:}lub(x,y)$,其中 lub 是 BSL 的上确界运算,所以公式集中形如 $p{:}x$ 和 $p{:}y$ 的标记文字对可由 $p{:}lub(x,y)$代替;同理$\sim p{:}\top$和$\sim p{:}t$ 可由$\sim p{:}t$ 代替;$\sim p{:}\top$和$\sim p{:}f$ 可由$\sim p{:}f$ 代替;称这个过程为标记原子替换过程. 显然,若公式集有互补标记文字对,则替换后的公式集中仍然有互补标记文字对.

2　标记逻辑的推理

定义 1. 称公式(集)S 蕴涵公式 G，如果 S 的所有模型也是 G 的模型，记为 $S\models G$.

称公式(集)S 是**本体论不一致的**或不可满足的，如果 S 没有模型. 例如，$\{p:t,\sim p:t\}$不存在模型，于是对任意公式 G，$\{p:t,\sim p:t\}\models G$. 从而标记逻辑在公式级上矛盾的理论仍旧是平凡的.

称公式(集)S 是**认知不一致的**，如果存在某个命题原子 p 满足 $S\models p:\top$.

设 p 为任意命题原子，因为只有当 $I(p)=\top$ 时，才有 $I\vdash p:t$ 且 $I\vdash p:f$. 因此，对原子持有不同信念的公式集$\{p:t,p:f\}$是认知不一致的，但不是本体论不一致的. 令 $I(r)=f$，则 $I\vdash r:t$ 不成立，于是$\{p:t,p:f\}\models r:t$ 不成立；所以认知不一致的公式集推理可以不是平凡的.

注意，$I(p)\models\top$，$I(q)\models f$ 时，I 是$\{p:t,p:f\vee q:t\}$的模型，不是 $q:t$ 的模型；然而 $p:f\vee q:t$等价于认知蕴涵式 $p:t\sim>q:t$，因此，$\models$不能保持三段论的有效性.

定义 2. 对公式(集)S 的任意 2 个模型 $M1$，$M2$，称 $M1\boxed{\trianglerighteq}M2$，如果对每个命题原子 p，若 $M1(p)$为$\top$，则 $M2(p)$为$\top$；称 $M1\boxed{\triangleright}M2$，如果 $M1\boxed{\trianglerighteq}M2$，而且至少有一个命题原子 q，使得 $M2(q)$为$\top$，$M1(q)$不为$\top$.

定义 3. 称公式(集)S 的模型 $M1$ 为择优模，如果不存在 S 的其它模型，$M2$ 满足 $M2\boxed{\triangleright}M1$.

定义 4. 称公式(集)S 择优蕴涵公式 G，如果 S 的所有择优模都是 G 的模型，记为 $S\models\!\!\approx G$.

例如：①$\{p:t,p:f\vee q:t\}\models\!\!\approx q:t$，即当前提集一致时能合理地推理.

②$\{p:t,p:f\vee q:t,r:t\wedge r:f\}\models\!\!\approx q:t$，即当不一致命题没有直接影响时仍能合理地推理.

③$\{p:t,p:f\vee q:t,p:f\}\models\!\!\approx q:t$ 不成立，因为当 $I(p)=\top$，$I(q)=f$ 时，I 是$\{p:t,p:f\vee q:t,p:f\}$的一个择优模，却不是 $q:t$ 的模型；即当增加新知识 $p:f$ 发现原前提集$\{p:t,p:f\vee q:t\}$中的 $p:t$ 与之不一致时，能取消由原前提集$\{p:t,p:f\vee q:t\}$可得到的结论 $q:t$. 所以$\models\!\!\approx$是非单调的. $\{p:t,p:f\vee q:t,p:f\}$虽然对命题 p 持不一致的信念，却不会推出所有公式；从而$\models\!\!\approx$是次协调的.

④ 对任意公式集 S 及任意公式 G，$S\models\!\!\approx\sim G\vee G$.

⑤ 对任意公式 R，G，$\{\sim R\wedge R\}\models\!\!\approx G$；即任何公式级上含矛盾的前提在$\models\!\!\approx$下的推理还是平凡的.

用 $Atomset(S)$表示 S 中出现的命题原子的集合.

定义 5. 设 M 是公式(集)S 的任意模型，M 的不一致集 $M!$ 定义为：

$$M!=\{p\mid p\in Atomset(S)\text{且}M(p)\models\top\}.$$

显然，若 S 是认知不一致的，S 的任意模型 M 的不一致集 $M!$ 都不为空.

命题 1. 对公式(集)S 的任意 2 个模型 $M1$，$M2$，若 $M1\boxed{\trianglerighteq}M2$，则 $M1!\subseteq M2!$；若 $M1\boxed{\triangleright}M2$，则 $M1!\subset M2!$.

3　标记逻辑的 Tableau 判断

如果把推理看作是一种智能选择过程,选择的依据便是某种序关系,推理的结果要满足限制条件而且在序关系下是最好的.不同的推理系统采用的择优关系体现了选择的不同倾向.因此择优逻辑在常识推理中将有普遍的应用.然而,择优蕴涵的证明论却有待进一步地研究.择优蕴涵 $\vdash_{cwa}$[1],$\approx$[3]提出时都没有给出判定过程.文献[5]讨论了 $\vdash_{cwa}$ 在命题情形的基于符号 Tableau 演算和基于 Gentzen 序列演算的证明论,本节将给出 $\approx$ 的基于 Tableau 演算的证明论.

Tableau 演算是构造模型的一种有效方法,使用 Smullyan 的统一记号[6],可将标记逻辑中标记文字以外的命题公式分为如下 2 类:α 类型:$A\wedge B$,$\sim(A\vee B)$,$\sim\sim A$;β 类型:$\sim(A\wedge B)$,$A\vee B$.

并且定义它们的直接子公式如下:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$A\wedge B$	A	B	$\sim(A\wedge B)$	$\sim A$	$\sim B$
$\sim(A\vee B)$	$\sim A$	$\sim B$	$A\vee B$	A	B
$\sim\sim A$	A	A			

由于任何解释满足形如 $p:\perp$ 的标记原子,从而可利用第 1 节的化简过程,将公式中这类标记原子化简,下面讨论的公式,假设都已执行了化简过程,不含形如 $p:\perp$ 的标记原子,而且不是化简为 0、1 的特殊情况.

定义 6. 设 S 是任意公式集,则如下构造的以公式集为节点的树称为 S 的 Tableau 推理树,记为 $T(S)$:

1)$T(S)$ 的根是 S.

2)对于 $T(S)$ 中任意节点 S_i,按照下列规则生成其子节点:

(1)α 规则:若 S_i 中有 α 型公式,设 $S_i=\{\alpha\}\cup\overline{S_i}$,则 S_i 有 1 个子节点 $S_i'=\{\alpha_1,\alpha_2\}\cup\overline{S_i}$.此时称 S_i 为 α 型节点.

(2)β 规则:若 S_i 中有 β 型公式,设 $S_i=\{\beta\}\cup\overline{S_i}$,则 S_i 有 2 个子节点 $S_i'=\{\beta_1\}\cup\overline{S_i}$,$S_i''=\{\beta_2\}\cup\overline{S_i}$.此时称 S_i 为 β 型节点.

3)对 $T(S)$ 的每个叶节点执行标记原子替换过程.

显然,$T(S)$ 的叶节点,只含标记文字.而且,执行标记原子替换过程后,叶节点中由相同命题原子构成的标记原子是唯一的;由相同命题原子构成的负标记原子若不唯一,则只有 2 个,而且形如 $\{\sim p:t,\sim p:f\}$.

引理 1. 设 $\{A\}$ 的 Tableau 推理树所有叶节点为 $a_1,\cdots,a_n$,叶节点 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 中的文字为 $\{a_{i1},\cdots,a_{im_i}\}$,则 $A=(a_{11}\wedge\cdots\wedge a_{1m_1})\vee\cdots\vee(a_{n1}\wedge\cdots\wedge a_{nm_n})$.

证明:首先不难验证 α 型公式等价于其子公式的合取式;β 型公式等价于其子公式的析取式;记公式集 S_i,S'_i,S''_i,$\overline{S_i}$ 各自所含公式的合取式为 S_{iG},S'_{iG},S''_{iG},$\overline{S_{iG}}$.

若 $T(\{A\})$ 的节点 S_i 中有 α 型公式,设 $S_i=\{\alpha\}\cup\overline{S_i}$,令 S_i 的子节点为 $S_i'=\{\alpha_1,\alpha_2\}\cup\overline{S_i}$,因为 $S_{iG}=\alpha\wedge\overline{S_{iG}}$;$S'_{iG}=\alpha_1\wedge\alpha_2\wedge\overline{S_{iG}}$;所以 $S_{iG}=S'_{iG}$.

若 $T(\{A\})$ 的节点 S_i 中有 β 型公式，设 $S_i=\{\beta\}\cup\overline{S_i}$，令 S_i 的 2 个子节点为 $S_i'=\{\beta_1\}\cup\overline{S_i}$，$S''_i=\{\beta_2\}\cup\overline{S_i}$，因为 $S_{iG}=\beta\wedge\overline{S_{iG}}=(\beta_1\vee\beta_2)\wedge\overline{S_{iG}}$，$S'_{iG}=\beta_1\wedge\overline{S_{iG}}$，$S''_{iG}=\beta_2\wedge\overline{S_{iG}}$；所以 $S_{iG}=S'_{iG}\vee S''_{iG}$.

总之，α 规则保持父节点所含公式的合取式等价于其子节点所含公式的合取式；β 规则保持父节点所含公式的合取等价于其 2 个子节点各自所含公式的合取式的析取；对 Tableau 推理树生成时使用 α 规则、β 规则的次数归纳可证，$T(\{A\})$ 的根节点所含公式的合取式 A 等价于 $T(\{A\})$ 所有叶节点各自所含公式的合取式的析取. □

定义 7. Tableau 推理树的某节点中若含有互补标记文字对，则该节点封闭. 若 α 型节点的子节点封闭，则 α 型节点也封闭；若 β 型节点的每个子节点均封闭，则 β 型节点封闭；公式集 S 的 Tableau 推理树 $T(S)$ 称为封闭的，当且仅当 $T(S)$ 的根节点封闭.

利用引理 1，可以证明下述结论：

定理 1. 设 S 是任一公式集，则 S 是不可满足的（本体论不一致的）当且仅当 S 的 Tableau 推理树是封闭的.

$S\models A$ iff $S\cup\{\sim A\}$ 是本体论不一致的、iff $S\cup\{\sim A\}$ 的 Tableau 推理树是封闭的，即定理 1 也给出了推理关系$\models$的判断过程.

择优蕴涵$\approx$的判断需要规定那些能决定前提择优模的 Tableau 推理树的叶节点. 因此，下面判断择优蕴涵式成立与否，将采用前提和结论分别构造 Tableau 推理树的方法.

设 S_i 是任一标记文字集，记 $BA(S_i)=\{p\,|\,p{:}t, p{:}f\in S_i$ 或 $p{:}\top\in S_i\}$，若 S_i 已执行过标记原子替换过程，则 $BA(S_i)=\{p\,|\,p{:}\top\in S_i\}$.

设 $PS=\{S_1,\cdots,S_n\}$ 是任一标记文字集之集，称 $S_i(i\in\{1,\cdots,n\})$ 是 PS 中**极少含矛盾的**，若不存在 $S_j(j=1,\cdots,n)$ 满足 $BA(S_j)\subset BA(S_i)$. 若 PS 是公式集 S 的 Tableau 推理树的所有不封闭的叶节点的集合，此时也称 S_i 是 S 的 Tableau 推理树的**极少含矛盾**的不封闭叶节点.

引理 2. 设 S 是任一公式集，①S 的任一择优模必满足 S 的 Tableau 推理树的某个极少含矛盾的不封闭叶节点；②对 S 的 Tableau 推理树的任一极少含矛盾的不封闭叶节点，必有 S 的择优模满足它.

证明：设 S 的 Tableau 推理树的所有不封闭的叶节点为 $S_1,\cdots,S_n$，记公式集 $S,S_1,\cdots,S_n$ 各自所含公式的合取式为 $S_G,S_{1G},\cdots,S_{nG}$，由引理 1 知 $S_G=S_{1G}\vee\cdots\vee S_{nG}$.

①设 $M1$ 是 S 的任一择优模，由引理 1 知，$M1$ 必满足 S 的 Tableau 推理树某个不封闭的叶节点；若 $M1$ 不满足 S 的 Tableau 推理树任一极少含矛盾的不封闭叶节点，则 $M1$ 必满足 S 的 Tableau 推理树某个非极少含矛盾的不封闭叶节点 $S_i(i\in\{1,\cdots,n\})$；于是存在 $S_j(j\in\{1,\cdots,n\})$ 满足 $BA(S_j)\subset BA(S_i)$，即存在 $q\in$ Atomset(S) 满足 $q\in BA(S_i)$ 且 $q\notin BA(S_j)$. 因为 $M1$ 满足 S_i，所以 $M1(q)=\top$. 由 S_j 构造 S 的如下解释 $M2$：$\forall\, p\in Atomset(S)$，$\forall\, x,y\in BSL$：

a) 若 $p{:}x\in S_j$，$\sim p{:}y\notin S_j$，则令 $M2(p)=x$；此时，$M2\vdash p{:}x$. 由于 $BA(S_j)\subset BA(S_i)$，如果 x 为$\top$，必有 $p{:}x\in BA(S_i)$，又因为 $M1$ 满足 S_i，所以必有 $M1(p)=\top$.

b) 若 $p{:}x\notin S_j$，$\sim p{:}y\in S_j$，则令 $M2(p)=y'$；其中 y' 是 BSL 中比 y 小的最大元素，不会是$\top$，此时，$M2\vdash\sim p{:}y$.

c)若 $p:x\in S_j$,$\sim p:y\in S_j$,则令 $M2(p)=x$;由于 S_j 是不封闭的,$x\geqslant_{BSL}y$ 不成立,于是 x 不会是$\top$,此时,$M2\vdash p:x$ 且 $M2\vdash\sim p:y$.

注意 S_j 已执行标记原子替换过程,叶节点中由相同命题原子构成的标记原子是唯一的,根据 a),c)赋值不会引起冲突;由相同命题原子构成的负标记原子不唯一时只有 2 个,而且形如$\{\sim p:t,\sim p:f\}$,根据 b)赋值都为 $M2(p)=\bot$,也不会引起冲突.

因为 $M2\vdash S_{jG}$,所以 $M2\vdash S_G$,即 $M2$ 是 S 的模型.由上分析可知,若 $M2(p)=\top$,必有 $M1(p)=\top$;因为 $q\notin BA(S_j)$,$M2(q)\neq\top$;但是 $M1(q)=\top$;所以 $M2\boxed{>}M1$,即 $M1$ 不是 S 的择优模,与 $M1$ 是 S 的择优模这个假设矛盾,所以 S 的任一择优模必满足 S 的 Tableau 推理树的某个极少含矛盾的不封闭叶节点.

②设 S_j 是 S 的 Tableau 推理树的任一极少含矛盾的不封闭叶节点,由 S_j 如下构造 S 的解释 $M1$:$\forall\ p\in Atomset(S)$,$\forall\ x,y\in\mathrm{BSL}$:

若 $p:x\in S_j$,$\sim p:y\notin S_j$,则令 $M1(p)=x$;此时,$M1\vdash p:x$.

若 $p:x\notin S_j$,$\sim p:y\in S_j$,则令 $M1(p)=y'$;其中 y' 是 BSL 中比 y 小的最大元素,不会是$\top$,此时,$M1\vdash\sim p:y$.

若 $p:x\in S_j$,$\sim p:y\in S_j$,则令 $M1(p)=x$;由于 S_j 是不封闭的,$x\geqslant_{BSL}y$ 不成立,于是 x 不会是$\top$,此时,$M1\vdash p:x$ 且 $M1\vdash\sim p:y$.

因为 $M1\vdash S_{jG}$,所以 $M1\vdash S_G$,即 $M1$ 是 S 的模型.若 $M1$ 不是 S 的择优模,则必存在 S 的模型 $M2$,满足 $M2\boxed{>}M1$,由命题 1 可知 $M2!\subset M1!$.由于 $M2$ 是 S 的模型,据引理 1,$M2$ 必满足 S 的 Tableau 推理树中某个不封闭的叶节点 S_i 中所有公式;$BA(S_i)\subseteq M2!\subset M1!=BA(S_j)$,这与 S_j 是 S 的 Tableau 推理树的极少含矛盾的不封闭叶节点的假设矛盾,所以对 S 的 Tableau 推理树的任一极少含矛盾的不封闭叶节点必有 S 的择优模满足它.□

定义 8. S 是任一公式集,A 是任一公式;设 S 的 Tableau 推理树的所有不封闭的叶节点之集为 PS,PS 中极少含矛盾的所有叶节点为 $S_1,\cdots,S_n$;$\{\sim A\}$的 Tableau 推理树的所有不封闭的叶节点为 $a_1,\cdots,a_m$;若对任一组 $S_i,a_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$均含有互补标记文字对:一个属于 S_i,一个属于 a_j;则称 S 和 A 的对偶 Tableau$\approx$封闭.

定理 2. 设 S 是任一公式集,A 是任一公式,$S\approx A$ 当且仅当 S 和 A 的对偶 Tableau $\approx$封闭.

证明:若$\{\sim A\}$的 Tableau 推理树的所有叶节点封闭,则根据定理 1,$\sim A$ 是本体论不一致的,从而任意解释满足 A,特别地,S 的任意择优模满足 A,于是 $S\approx A$.

若 S 的 Tableau 推理树的所有叶节点封闭,则根据定理 1,S 是本体论不一致的,即 S 没有模型,可认为 $S\approx A$.

否则,可如下证明:设 S 的 Tableau 推理树的所有不封闭的叶节点之集为 PS,PS 中极少含矛盾的所有叶节点为 $S_1,\cdots,S_n$;$\{\sim A\}$的 Tableau 推理树的所有不封闭的叶节点为 $a_1,\cdots,a_m$.

充分性:

设 S 和 A 的对偶 Tableau$\approx$封闭,即任一组 $S_i,a_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$均含有互补标记文字对:一个属于 S_i,一个属于 a_j.

据引理 2,S 的任一择优模 I 必满足 S 的 Tableau 推理树的某个极少含矛盾的不封闭叶

节点中的所有公式，不妨设 I 满足 $S_{i0}(i_0\in\{1,\cdots,n\})$. 对任意 $a_j(j=1,\cdots,m)$，S_{i0} 和 a_j 含有互补标记文字对，记为 L_S 和 L_A，满足 $L_S\in S_{i0}$ 且 $L_A\in a_j$，因为 I 满足 S_{i0}，故 $I\vdash L_S$，于是 $I\vdash \sim L_A$.

由 a_j 的任意性，I 满足 $\{\sim A\}$ 的 Tableau 推理树的每个不封闭的叶节点中某文字的否定. 设 $\{\sim A\}$ 的 Tableau 推理树中不封闭的叶节点 $a_i(i=1,\cdots,m)$ 中的文字为 $\{a_{i1},\cdots,a_{iki}\}$，则 I 满足至少一组 $\sim a_{1l1}\wedge\cdots\wedge\sim a_{mlm}(l_1\in\{1,\cdots,k_1\};\cdots;l_m\in\{1,\cdots,k_m\})$；又据引理 1 知 $\sim A=(a_{11}\wedge\cdots\wedge a_{1k1})\vee\cdots\vee(a_{m1}\wedge\cdots\wedge a_{mkm})$，而

$A=\sim(\sim A)=\sim((a_{11}\wedge\cdots\wedge a_{1k1})\vee\cdots\vee(a_{m1}\wedge\cdots\wedge a_{mkm}))$

据 De. Morgan 律：

$=(\sim a_{11}\vee\cdots\vee\sim a_{1k1})\wedge\cdots\wedge(\sim a_{m1}\vee\cdots\vee\sim a_{mkm})$

据分配律：

$=(\sim a_{11}\wedge\cdots\wedge\sim a_{m1})\vee\cdots\vee(\sim a_{1l1}\wedge\cdots\wedge\sim a_{mlm})\vee\cdots\vee(\sim a_{1k1}\wedge\cdots\wedge\sim a_{mkm})$

于是 I 满足 A. S 的任一择优模 I 满足 A，于是 $S\approx\!\!\!\!\vdash A$ 成立.

必要性：

设 $S\approx\!\!\!\!\vdash A$ 成立，即 S 的任一择优模 I 满足 A，设 $\{\sim A\}$ 的 Tableau 推理树中不封闭的叶节点 $a_j(j=1,\cdots,m)$ 中的文字为 $\{a_{j1},\cdots,a_{jkj}\}$，则由充分性证明中的分析可知，$I$ 满足至少一组 $\sim a_{1l1}\wedge\cdots\wedge\sim a_{mlm}(l_1\in\{1,\cdots,k_1\};\cdots;l_m\in\{1,\cdots,k_m\})$；若 S 和 A 的对偶 Tableau $\approx\!\!\!\!\vdash$ 封闭不成立，则至少一组 S_{i0}，$a_{j0}(i_0\in\{1,\cdots,n\},j_0\in\{1,\cdots,m\})$ 不含互补标记文字对，如下构造 S 的解释 M：对任意 $p\in Atomset(S)$，$\forall\ x,y\in \mathrm{BSL}$：

若 $p{:}x\in S_{i0}$，$\sim p{:}y\notin S_{i0}$，则令 $M(p)=x$；此时 $M\vdash p{:}x$.

若 $p{:}x\notin S_{i0}$，$\sim p{:}y\in S_{i0}$，则令 $M(p)=y'$；其中 y' 是 BSL 中比 y 小的最大元素，不会是 $\top$，此时，$M\vdash\sim p{:}y$.

若 $p{:}x\in S_{i0}$，$\sim p{:}y\in S_{i0}$，则令 $M(p)=x$；由于 S_{i0} 是不封闭的，$x\geqslant_{BSL}y$ 不成立，于是 x 不会是 $\top$，此时，$M\vdash p{:}x$ 且 $M\vdash\sim p{:}y$.

记公式集 $S,S_1,\cdots,S_{i0},\cdots,S_n$ 各自所含公式的合取式为 $S_G,S_{1G},\cdots,S_{i0G},\cdots,S_{nG}$. 据引理 1 知 $S_G=S_{1G}\vee\cdots\vee S_{i0G}\vee\cdots\vee S_{nG}$，因为 $M\vdash S_{i0G}$，所以 $M\vdash S_G$，即 M 是 S 的模型. 对 a_{j0} 中任一标记文字 L_A，由于 a_{j0} 中不含互补标记文字，且不与 S_{i0} 中的标记文字互补，要么 $L_A\in S_{i0}$ 且 L_A 的互补文字 $L'_A\notin S_{i0}$，此时 $M\vdash L'_A$ 不成立；要么 $L_A\notin S_{i0}$ 且 L_A 的互补文字 $L'_A\notin S_{i0}$，此时可令 $M\vdash L'_A$ 不成立；则在 M 下 a_{j0} 中任一文字的互补文字均不被 M 满足，特别地，$M\vdash\sim a_{j0lj0}$ 不成立，与 M 应满足 $\sim a_{1l1}\wedge\cdots\wedge\sim a_{j0lj0}\wedge\cdots\wedge\sim a_{mlm}$ 矛盾. □

例如：$T(\{p{:}t,p{:}f\vee q{:}t\})$ 有 2 个叶节点，执行标记原子替换过程后为 $\{p{:}\top\}$ 和 $\{p{:}t,q{:}t\}$，前者不是极少含矛盾的，后者与 $T(\{\sim q{:}t\})$ 的唯一叶节点 $\{\sim q{:}t\}$ 含互补标记文字对；所以 $\{p{:}t,p{:}f\vee q{:}t\}$ 和 $q{:}t$ 的对偶 Tableau $\approx\!\!\!\!\vdash$ 封闭. 据定理 2，$\{p{:}t,p{:}f\vee q{:}t\}\approx\!\!\!\!\vdash q{:}t$.

4 结束语

标记逻辑是一种重要的次协调逻辑，在逻辑程序设计[4]、不确定推理[3]等领域有重要的意义. 标记逻辑[3]中定义了 2 种推理关系：$\models$ 和 $\approx\!\!\!\!\vdash$. 二者都是次协调的，可以用统一的方法

处理一致的与不一致的知识，前提中的矛盾没有像在经典逻辑中那样大的破坏性，含矛盾的知识中有意义信息的使用不受矛盾的影响. ⊨是单调的，有基于归结的证明论，但不能保持经典逻辑中合理的推理，如三段论. ⊨≈是非单调的，在前提一致时等价于经典逻辑的推理关系，但缺少有效的证明论. 本文给出了推理关系⊨，⊨≈在命题情形基于 Tableau 演算的可靠而且完备的判定方法. 因为 Gentzen 序列演算是 Tableau 演算的对偶，据此不难给出命题标记逻辑的 Gentzen 型公理系统. 文中对前提和结论分别构造 Tableau 推理树的方法在研究其他非单调逻辑与次协调逻辑中的择优蕴涵的模型语义方面也有着重要的意义. 本文的方法在标记逻辑程序设计中的应用及在一阶逻辑情形的推广有待进一步的研究.

参考文献

1 Shoham Y. Nonmonotonic logics: meaning and utility. In: John McDermott ed. Proc. 10th IJCAI, Milan Italy, San Francisco: Morgan Kaufmann, 1987. 388～393.

2 姜云飞. 关于非单调推理中的择优蕴涵. 计算机学报，1990，**13**(**10**)：792～796.

3 Kifer M, Lozinskii E L. A logic for reasoning with inconsistency. J. Automated Reasoning, 1992, **9**: 179～215.

4 周生炳. 标记逻辑程序理论研究：说明语义与过程语义[博士论文]. 北京：中国科学院自动化研究所，1994.

5 Nicola Olivetti. Tableaux and sequent calculus for minimal entailment. J. Automated Reasoning, 1992, **9**: 99～139.

6 Smullyan M. First-order logic. New York: Springer Verlag, 1968.

TABLEAU CALCULUS FOR ANNOTATED LOGIC

Cheng Xiaochun　Liu Xuhua

(*Department of Computer Science　Jilin University　Changchun*　130023)

(*Open Laboratory for Symbolic Computation and Knowledge Engineering　Jilin University　Changchun*　130023)

Abstract　Annotated logic is one of the paraconsistent logics. The entailments in annotated logic are ⊨ and ⊨≈. Both of them are paraconsistent, and can treat any set of formulae, either consistent or not, in a uniform way. ⊨ is monotonic, it has a resolution-based sound and complete proof procedure, but some rational inferences of the classical logic, such as modus ponens, are no longer valid under it. ⊨≈ is nonmonotonic. The classical inferences hold true under it when there is no contradiction. But no satisfactory proof theory for ⊨≈ has been given. This paper will propose sound and complete decision Tableaux for ⊨ and ⊨≈ respectively.

Key words　Annotated logic, tableaux, preferential entailment, paraconsistent logic.