第7卷第4期
1996年4月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 7, No. 4
Apr. 1996

一种基于二叉树结构表达的矩形物体布局的启发式方法*

王爱虎 查建中 王金敏

(天津大学机械系智能工程研究室 天津 300072)

摘要 本文提出了一种利用二叉树结构表达矩形物体布局状态空间的方法. 通过将布局空间依次分割,每次放入相对于当前布局空间来说是满足特定条件的最优布局块,并将该布局块定位于当前布局空间的左上角来完成不同大小矩形物体的布局方案的确定. 通过调整调序因子 KA 和 KB 的值,可得到满足不同要求的优化布局方案. 同时,所得布局方案均满足工业上一刀切的要求. 实验结果证明了该算法的灵活性和有效性.

关 键 词 矩形物体布局,二叉树,定序规则,定位规则,启发式算法.

早在10世纪的波斯(现称伊朗),Abul Wefa 就构造了一个正方形分解问题,该问题至今仍时常出现在许多文章中. Henry Ernest Dudeney 的迷宫分解问题在本世纪初也相当著名. 对这些迷宫问题求解方法的研究并不仅仅局限于迷宫问题的业余爱好者,同时也受到数学界的重视. 如 Brooks 等(1940)和 Conway(1964)所做的工作. 然而只是到最近,工业上的布局问题才得到科学的重视.[1]

布局问题广泛地出现在金属切割、服装、玻璃、塑料、皮革、造纸、造船、交通运输、机器人手臂运动规划、军事及航天工业中. 对工业上布局问题研究的动机是明确的:只要对布局算法有稍许改进,即稍微减少切割损耗,便可望收到明显的经济效益.

由于一维布局问题(背包问题)已是 NP 完全问题,在可行的时间界限内不可能找到问题的精确解. 二维布局问题比一维布局问题复杂得多,而二维不规则物体的布局要比规则物体的布局复杂得多. 因此,尽管实际中不规则物体的布局问题很常见,但对二维布局问题的研究大多局限于矩形物体. 不规则物体的布局多通过不同的渠道转化为矩形物体的布局. 因此,对矩形物体布局有效算法的研究有重要的现实意义. 另外,由于布局问题是 NP 完全问题,所以绝大部分现有的有效布局算法都是启发式的,而且从对 NP 完全问题的研究[2,3]也可看出,在串行机上这类问题的解决只能依赖于启发式算法的发展.

所谓启发式算法是指一组指导算法搜索方向的、建议性质的规则集,通常按照这个规则

---

* 本文研究得到国家自然科学基金资助. 作者王爱虎,1969年生,博士生,主要研究领域为计算机辅助设计和计算机绘图,智能布局系统. 查建中,1947年生,教授,博士导师,主要研究领域为离散优化,智能工程. 王金敏,1963年生,副教授,主要研究领域为智能布局系统,计算机辅助设计.

本文通讯联系人:王爱虎,天津 300072,天津大学机械系智能工程研究室

本文 1995-02-27 收到修改稿

集，计算机可在解空间中寻找到一个较好的解，但并不能保证每次都能找到较好的解，更不能保证找到最优解．换句话说，所谓启发式算法就是那些从大量的实验数据来看，算法的实际计算性能较好，但理论上证明这些算法的最坏解题性能并不好，或者理论上并不能证明这些算法具有优良的解题性能．由于启发式算法的设计不依赖于纯数学中优化理论的突破和发展，因此其研究和应用在近 20 年来获得了突飞猛进的发展．

Christofides 和 Whitlock[4]提出了一种利用树搜索来解决布局中一刀切问题的算法．该算法将动态规划和运算规则融于树的搜索之中，通过施加"使布局模式最优化"这一限制条件来缩小搜索树的大小，适用于中等规模的一刀切问题优化布局方案的确定．

Wang[5]则通过不断地进行水平和垂直构造(矩形 $A1=p1*q1$ 和 $A2=p2*q2$ 的水平构造是包含 $A1$ 和 $A2$ 的矩形 $Su=max(p1,p2)*(q1+q2)$，垂直构造是包含 $A1$ 和 $A2$ 的矩形 $Sv=(p1+p2)*max(q1,q2)$)，每次构造尽量使切割损耗最小，这样通过连续构造，得到布局问题的最优解．该方法的一个变种是通过连续的水平和垂直构造，在布局空间的左上角构造逐渐增大的矩形，每次构造在布局空间的右边和下边形成一个 J 形区域．Hodgson 等[6,7]通过将这个 J 形区域分成 2 个矩形区域，进而分别对这 2 个矩形区域应用一维背包公式，解决了这 2 个矩形区域的优化布局问题．

文献[8] 针对启发式方法的结构、分布及应用特点，结合对绝大部分布局启发式算法进行的分析、分类，导出了现有的一大类布局启发式规则的产生根源，建立了面向任意形状布局问题的统一评价函数．

本文提出了一种利用二叉树结构表达矩形物体布局状态空间的方法．在文献[8]的启发式算法的根本性评价函数的基础上，提出了动态的定序规则和独特的定位规则．通过将布局空间依次分割，每次放入相对于当前布局空间来说满足定序规则的最优布局块，并将该布局块定位于当前布局空间的左上角来完成不同大小矩形物体的布局方案的确定．通过调整调序因子 KA 和 KB 的值，可得到满足不同要求的优化布局方案．同时，所得布局方案均满足工业上一刀切的要求．最后通过实例验证了该算法的有效性．

1　二叉树简介

二叉树是一种常用的空间数据结构，因其结构简单，操作方便、快速而广泛应用于数据的排序和计算内部寻址等方面．本文首次将二叉树用于矩形物体布局空间状态的表达，具体应用如下：

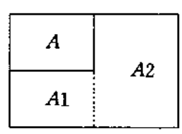

图1

用一个根结点表示布局空间的矩形区域，按定序规则从可选布局物体中选择一个相对于该矩形区域来说是最优的布局物体 A，并将其定位于该矩形区域的左上角．这样原布局空间变成了一个 J 形区域．将这个 J 形区域分成图 1 所示 2 个矩形 $A1$ 和 $A2$，分别用根结点的左、右 2 个子结点表示．这样，剩余的布局空间就变成了 2 个独立的布局空间，分别对这 2 个布局空间重复上述过程，直至没有可选布局物体满足要求时停止分解．

2 算法的定序规则

定序规则被用来确定布局物体放入布局空间的先后顺序，它影响最终布局结果的质量. 布局时，各布局块在布局者心目中的重要程度是不同的. 有的布局块比较重要，要优先放入；而有的布局块不甚重要，要后放入. 通过长期实践形成了许多定序规则，其中较好的有：

(1)按布局块面积递减定序.

(2)按布局块最长边递减定序.

(3)按布局块最短边递减定序.

仔细考察上述的3条定序规则发现：规则(1)赋予面积大的布局块以较大的权值，细长的布局块在布局过程中可能被忽略；规则(2)首先考虑具有最长边的布局块，一般情况下，细长的布局块将被优先考虑；规则(3)则优先考虑长短边较接近的布局块. 可见，不同的定序规则侧重点有所不同. 为满足布局者多变的需要，本文采用如下的评价函数作为定序规则.

$$O = KA * (S - F) + KB * P \tag{1}$$

其中 S 是布局空间的面积.

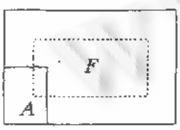

图2

F 是布局块的可行域.[8]定义为布局块在布局空间中所有可行位置的集合，该集合表现为一个面积区域，因此称之为可行域. 如图2所示，布局块的面积越大，其可行域越小；最长边越长，可行域越小. 为全面起见，定义 $F = (A-a) * (B-b) + (A-b) * (B-a)$.

其中 A, B 为布局空间的边长；a, b 为布局块的边长.

P 是布局块的面积. KA, KB 是调序因子.

通过调整 KA 和 KB 的值可改变布局块的放入顺序以满足不同的布局要求. 例如：

(1)当布局块的面积是作为布局块重要性的主要指标时，可令 $KA=0, KB=1$，这同上述的定序规则(1)相吻合.

(2)当布局块的最长边是作为布局块重要性的主要指标时，可令 $KA=1, KB=0$，这同上述的定序规则(2)相吻合.

(3)当布局块的最短边是作为布局块重要性的主要指标时，可令 $KA=0.5, KB=0.5$，这同上述的定序规则(3)相吻合.

该定序规则除上述的灵活性之外，还具有动态特性. 可选布局块的放入顺序不是一成不变的. 因为该算法采用布局空间逐步分解的方法，所以布局空间的大小是不断变化的，可选布局块对于不断变化的布局空间的放入顺序也是不断变化的. 这样保证了每次放入的都是相对于当前布局空间来说最优的布局块. 这同优化理论中的最大梯度法是一致的. 另外，由于采用布局空间逐步分解的方法，每次将布局空间分解为2部分，这个分解过程同工业上的一刀切过程相对应. 因此最终的布局结果满足一刀切的要求.

3 定位规则

按定序规则将布局块逐个放入布局空间时，用来确定当前布局块在当前布局空间中的位置的规则就叫作定位规则. 文献[1]介绍了许多关于矩形物体布局的定位规则. 其中主要

的有：

(1)占角策略，即布局块首先摆放在布局空间的某一角.

(2)顺放策略，从一个角开始，沿布局空间的某一边顺序摆放.

(3)先沿布局空间的四边摆放，然后填中心.

(4)先由上往下放并向左看齐，然后由下往上放并向右看齐.

应用领域不同，布局的定位规则也不同. 仔细考察上述定位规则发现：所有的定位规则都是先占角，在不能占角的情况下占边，最后填中心. 受此启发，本文采用占角优先策略作为定位规则，每次将布局块定位于当前布局空间的左上角.

4　算法描述

(1)输入布局块的长和宽、原始布局空间的长和宽以及调序因子 KA 和 KB 的值.

(2)按定序规则给各可选布局块排序.

(3)判断是否有布局块可放入当前布局空间，若有则转(4)，否则显示布局结果，然后停机.

表 1 布局块的尺寸

i	a	b	i	a	b	i	a	b	i	a	b	i	a	b
1	0.78	0.80	9	0.85	0.55	17	0.89	0.28	25	0.82	0.58	33	0.38	0.87
2	0.95	0.41	10	0.67	0.77	18	0.86	0.14	26	0.94	0.41	34	0.50	0.75
3	0.84	0.81	11	0.68	0.77	19	0.33	0.77	27	0.17	0.15	35	0.03	0.07
4	0.18	0.41	12	0.46	0.29	20	0.53	0.49	28	0.74	0.40	36	0.69	0.53
5	0.77	0.43	13	0.28	0.27	21	0.71	0.92	29	0.91	0.58	37	0.51	0.59
6	0.69	0.07	14	0.37	0.46	22	0.61	0.09	30	0.99	0.83	38	0.68	0.02
7	0.21	0.12	15	0.94	0.96	23	0.39	0.41	31	0.50	0.93	39	0.44	0.15
8	0.42	0.47	16	0.06	0.34	24	0.71	0.93	32	0.80	0.45	40	0.51	0.44

(4)将确定的布局块定位在布局空间的左上角，并将剩余布局空间分解为 2 部分，对应于二叉树上一级结点的 2 个子结点.

(5)按深度优先的原则处理所得二叉树. 即给布局空间的长和宽赋新值，然后转(2).

5　实例验算及分析

为了验证该算法的有效性和灵活性，我们做了大量的试验，结果证明该算法是可行的.

令原始布局空间为 2.5 * 2 的矩形区域，40 个可选布局块的尺寸由计算机随机产生，如表 1 所示，对应矩形如图 3 所示. 并假定每个布局块只能用一次.

目标：选择可选布局块放入布局空间，使布局块的覆盖面积最大.

(1)当 $KA=1, KB=0$ 时，共放入 14 个布局块，其放入顺序为：15→30→38→35→6→16→24→2→18→22→3→21→39→7，覆盖率为 89.168%，布局结果如图 4 所示.

(2)当 $KA=0, KB=1$ 时，共放入 15 个布局块，其放入顺序为：15→30→38→35→22→16→3→24→4→27→7→6→21→29→39，覆盖率为 91.512%，布局结果如图 5 所示.

(3)当 $KA=0.5, KB=0.5$ 时，共放入 14 个布局块，其放入顺序为：15→30→38→35→6

→16→3→24→22→39→7→21→29→27，覆盖率为 90.036%，布局结果如图 6 所示.

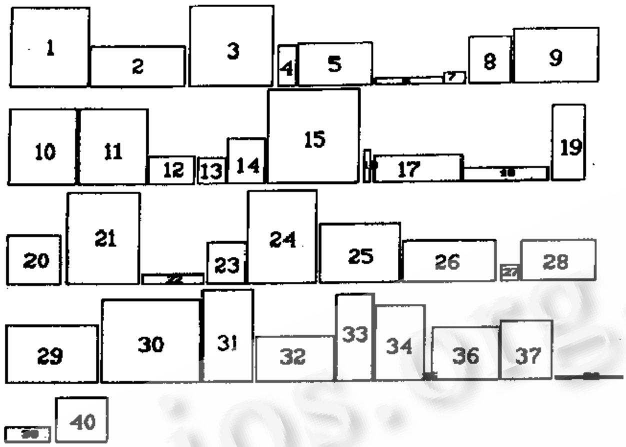

图 3

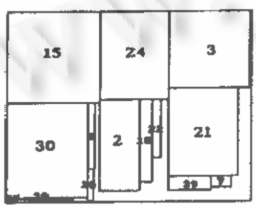

图 4

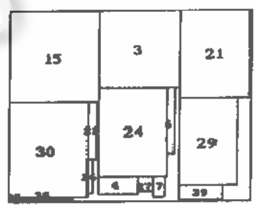

图 5

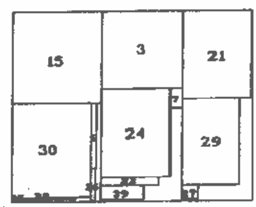

图 6

分析：比较上述 3 种典型情况可看出，优先考虑面积大的布局块时，共布入 14 个布局块，布局结果的覆盖率最低；优先考虑具有最长边的布局块时，布入 15 个布局块，覆盖率最高；而综合考虑布局块的面积和最长边时，布入 14 个布局块，其覆盖率介于上述 2 种情形之间. 这是因为本文采用布局空间逐步分解的方法，不可避免地会造成布局空间越来越琐碎，多为狭长区域，必然导致优先考虑布局块的最长边(多为狭长布局块)的布局结果是最优的. 但这并不是说布局块中狭长块越多，利用该算法得到的布局结果越好. 本算法较适用于大、小布局块均有、但狭长块较多的情形.

6 结 论

本文用二叉树结构表达布局空间，按深度优先原则对布局空间逐步分解. 提供了适应性很广的定序函数，并引入动态定序，使得每次布入最优的布局块，迅速得到局部最优解. 实验结果证明该算法是有效的. 另外，因定序函数的灵活性，本算法便于推广.

参考文献

1 Dowsland K A, Dowsland W B. Packing problems. Eur. J. Opt. Res., 1992, **56**: 2～14.

2 张立昂等译. 计算机和难解性——NP 完全性理论导引. 北京：科学出版社，1990.

3 唐策善，梁维发. 并行图论算法. 安徽：中国科学技术大学出版社，1991.

4 Christofides N, Whitlock C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. Operations Research, 1977, **25**: 31～44.

5 Wang P Y. Two algorithms for constrained two—dimensional cutting stock problems. Operations Research, 1983, **31**:573～586.

6 Hodgson T T. A combined approach to the pallet loading problem. IIE Transactions, 1982, **14**:175～182.

7 Hodgson T T, Hughes D S, Martin—Vega L A. A note on a combined approach to the pallet loading problem. IIE Transactions, 1983, **15**:268～271.

8 戴佐. 智能布局系统设计理论与方法的研究[博士论文]. 天津大学研究生院, 1995.

A HEURISTIC ALGORITHM FOR RECTANGULAR PACKING BASED ON BINTREE EXPRESSION

Wang Aihu Zha Jianzhong Wang Jinmin

(*Intelligence Engineering Laboratory Department of Mechanical Engineering Tianjin University Tianjin* 300072)

Abstract In this paper, a method using bintree structure to express the packing space for rectangular packing is proposed. Through the sequential decomposition of the packing space, the optimal packing scheme of varioussized rectangular packing can be obtained by every time putting the optimal packing element that satisfy specular conditions toward currentpacking space and locating it at the up—left corner of the current packing space. Different optimal packing schemes that satisfy different demands can be obtained by adjusting the value of the ordering factors KA and KB. In addition, the packing schemes obtained satisfy the guillotine cutting demands in glass industry. The experimental results indicate that the algorithm is flexible and effective.

Key words Rectangular packing, bintree, ordering rule, locating rule, heuristic algorithm.