第6卷第11期
1995年11月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 6, No. 11
Nov. 1995

利用小波变换由明暗度恢复表面形状*

钟 声 石青云 程民德

(北京大学数学系,北京 100871)
(北京大学信息科学中心,北京 100871)
(北京大学视觉听觉信息处理国家重点实验室,北京 100871)

摘要 本文提出利用小波变换多分辨率逼近锥来解决 Shape From Shading 问题(即利用景物表面明暗度来恢复景物三维信息)的一个有效方法. 多分辨率方法应用于 SFS 问题主要是想使求解 SFS 问题的迭代算法得益于多分辨率方法带来的计算速度的提高及一个较精确的解的尽快收敛,直接作用于原始图像上的 SFS 方法很多时候很难收敛. 那么构造一个较好的多分辨率锥成为一个关键的问题;另外,用多分辨率方法解决 SFS 问题引出了一个非线性问题,即由缩小分辨率的表面产生的反射光强度图像并不等于原来未缩小表面的反射光强度图像缩小分辨率所得的图像. 我们引入表面梯度模的概念,并用梯度模的多分辨锥来解决 SFS 问题,而且我们证明了利用具有一定正则性的紧支小波基可以使问题得到圆满的解决;在小波支集长度与正则性(或消失矩阶数)之间存在一个折衷,我们的实验验证了支集长度相对说来更为重要.

关键词 shape from shading,紧支正交小波变换,多分辨率锥,非线性问题.

由明暗度恢复表面形状(Shape From Shading,以下简称 SFS)是计算机视觉的重要方法之一,其任务是要由物体表面在一定成像模型下产生的单幅图像来重构物体表面的三维形状,通常假定物体表面的反射性质是已知的(即成像模型是已知的). SFS 方法在许多实际问题中是很有用的,例如,由地面的航片恢复地表面的形状,时常采用 SFS 方法.

SFS 问题是一个不适定的问题,只有在一定光滑性约束下才是可解的. SFS 问题中的物体表面通常假设为 Lambertian 表面,即物体表面某点反射光的强度只与光源方向和表面法向的夹角有关. 这种反射模型也称为 Lambertian 反射模型. 给定一个 Lambertian 表面 S,设其方程为

$$z = z(x, y), \tag{1}$$

假设光源为 $\vec{L} = (p_L, q_L, -1)$. 那么表面某点 M 的反射光强度 R 是光源 $\vec{L}$ 与表面法向 $\vec{N} = (p, q, -1)$ 的夹角的函数,可以简单表示为

* 本文 1994-09-05 收到,1994-11-08 定稿

作者钟声,1966 年生,博士后,主要研究领域为图象处理,模式识别,计算机视觉. 石青云,女,1936 年生,教授,中国科学院院士,主要研究领域为图象处理,模式识别,计算机视觉. 程民德,1917 年生,教授,中国科学院院士,主要研究领域为应用数学,模式识别,计算机视觉.

本文通讯联系人:石青云,北京 100871,北京大学信息科学中心

$$R(\vec{N})=R(p,q)=\cos(\vec{N},\vec{L})=\frac{1+pp_L+qq_L}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p_L^2+q_L^2}},\tag{2}$$

其中
$$p=\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$$
和
$$q=\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$$
是 M 点法向量的分量.

特别地,我们考虑光源从物体正上方照射下来的情形,此时 $\vec{L}=(0,0,-1)$,则由(2)决定的反射强度可表示为:

$$R(p,q)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.\tag{3}$$

最早用于解决 SFS 问题的方法都是对(2)或(3)给出的微分方程进行直接求解[1],但是基于这种直接求解逆的方法对解的存在性和唯一性都没有给出保证.后来,Brooks 和 Horn 提出了更为可行的方法,他们将 SFS 问题视为条件约束优化问题而非一个单纯的微分方程反问题.按照他们的思想[2,3],物体表面梯度(p,q)可以靠使下列评估函数最小而得到恢复:

$$E=\iint[(R_0-R(p,q))^2+\lambda(p_x{}^2+p_y{}^2+q_x{}^2+q_y{}^2)]dxdy,\tag{4}$$

其中 $p_x=\frac{\partial p}{\partial x}$等是表面梯度分量的偏导数,被积函数中第一项的积分是平均平方误差,能够容忍一定的噪声和模型误差,第二项是一平滑项,有助于迭代算法收敛,λ 是平滑因子. Brooks 和 Horn 还提出了一个使(4)式的 E 最小的迭代算法:

在第 $i+1$ 次迭代中,

$$u^{i+1}=\hat{u}^i+\frac{1}{\lambda}(R_0-R(p^i,q^i))\frac{\partial R}{\partial u}(p^i,q^i),\tag{5}$$

其中 $u=p$ 或 q, $\hat{u}^i$ 是第 i 次迭代后 u 的局部平均,R_0 是观察到的反射光强度值,$R(p^i,q^i)$是由反射模型(2)或(4)预测的反射光强度值.

给定$(p.q)$的边界条件,从表面梯度的初值(p^0,q^0)(即第 0 次迭代的表面梯度的估计值)出发,(5)式给出的迭代算法可以收敛;当(4)式给出的误差 E 值在两次迭代中下降很少时认为收敛.我们将这样的计算表面梯度的算法记为

$$(p,q)=sfs(R,p^0,q^0),\tag{6}$$

上式的直观含义可以叙述为:在反射模型 R 下,给定表面梯度的初值和适当的边界条件,可由(5)式迭代计算出表面梯度(p,q).

为了使由上述迭代算法求出的解是可积的(integrable),即为了使计算出的表面高度 z 与积分路径无关,Frankot 和 Chellappa[4]对上述迭代算法加上一个可积性约束条件:

$$z_{xy}(x,y)=z_{yx}(x,y).\tag{7}$$

利用 Fourier 变换将由算法(6)得到的估计值投影到某个适当的函数空间中,就可获得 SFS 问题的一个可积的解.这种迭代算法当迭代在原始图像上进行时是十分耗时的.在一幅 $N\times N$ 象素的图像上,(6)的一次迭代需要 $O(N^2)$次运算;加上(7)式的可积性约束,则每次迭代中需要另加 $O(N^2\log N)$次运算,而(6)式的 SFS 问题要收敛需要 $O(N)$次迭代.可见当迭

代算法(6)直接作用于较大的原图上时，是十分费时的.

采用多分辨率方法，让绝大多数迭代作用于低分辨率图像上，再用从低分辨率图像上获得的结果来预测高分辨率图像上的初始值，如果如此得到的初值较精确，则在高分辨率图像上以此初值开始的迭代就可以较快地收敛，因而大量的计算时间就节省下来了. Simchony 等人最先采用了多分辨率方法来解决 SFS 问题，他们采用灰度图像的多分辨率锥[5]，然而这种对图像灰度直接缩小分辨率的方式却不是一种合适的作法. 因为非线性的成像过程(见(3)式)带来了一个非线性问题，这一点我们后面还要详细说明. Peleg 和 Ron 构造了表面梯度(p,q)的模 $T=\sqrt{p^2+q^2}$，由 T 的多分辨率锥得到了一个较好的计算模型[6]. 他们采用了 Gaussian 模糊化模板：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.125 & 0 \\ 0.125 & 0.5 & 0.125 \\ 0 & 0.125 & 0 \end{bmatrix}$$

来构造多分辨率逼近锥，然而如是得到的多分辨率逼近锥却不是解决 SFS 问题的优化的表示，即逼近锥的逼近程度不好，使得由低分辨率结果预测高分辨率初值的估计不很精确.

本文给出了一个基于小波变换多分辨率逼近锥的方法，获得了很好的结果. 第 1 节引入小波变换多分辨率逼近锥方法，及由此产生的非线性问题；第 2 节是基于小波变换的 SFS 算法；第 3 节给出了实验结果和与小波的选取有关的各种参数的确定结果.

1 基于小波分析的多分辨率锥及非线性问题

给定了一定光照条件下的反射模型(如(3)式)决定的景物表面反射光强度图像 R，我们采用多分辨率方法解决 SFS 问题. 利用小波变换构造多分辨率逼近锥的方法[10,11]，我们可以对 R 构造下列基于小波分析的多分辨率锥：

$$\{R, W_{00}(R), W_{00}^2(R), \cdots\} \tag{8}$$

其中 W_{00}是由对应于小波函数的低通滤波器 H 分别对图像的每行、每列作卷积再作二取一抽样的滤波取样算子[10,11].

我们得知：由低分辨率下的图像，通过近似小波逆变换有

$$R \approx W^{-1}(W_{00}(R) \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0) \tag{9}$$

而且我们已经知道(9)式的逼近程度取决于两方面的因素：

(1)图像 R 的性质. 一般地讲，R 越光滑，(9)式的近似越精确.

(2)小波函数的性质. 例如当所选取的小波函数具有较高的消失矩阶数 K 时，(9)式的近似越精确，因为有更多的高频分量为 0 或接近于 0.

特别地，对 Daubechies[7]构造的紧支正交小波而言，消失矩阶数与支集长度成正比，所以对这类小波而言，支集尺度越大，(9)式的逼近理应更好.

然而，对 SFS 问题而言，情况并非如此单一，即采用长支集的小波函数并不能取得理想的效果. 这是由于下面所述的由多分辨方法引起的 SFS 问题中的非线性的缘故.

假定给出一个三维表面 S_0 的反射光强度图像 R_0，那么(6)式迭代算法表明：能够从一表面的反射图像重构该表面的法向量.

因为　$R_0=R(S_0)=R(p_0,q_0)$

所以由算法(6)得　$(p_0,q_0)=sfs(R_0,p^0,q^0)$

其中，(p^0,q^0)是初值.

当表面 S_0 缩小分辨率时，得到一个较低分辨率的表面 S_1：

$$S_1=W_{00}(S_0)=W_{00}(z_0(x,y)),$$

那么表面 S_1 的梯度(p_1,q_1)应该由从 S_1 产生的反射图像 $R(S_1)=R(W_{00}(S_0))$用算法(6)重构，即

$$(p_1,q_1)=sfs(R(S_1),p_1^0,q_1^0) \tag{10}$$

由对算法(6)的复杂度的分析知道，在缩小的分辨率水平上的迭代(10)所需的计算量要少得多，并且由(9)式知，适当选取小波函数，通过(9)式的逆小波变换可以由 $W(S_1)$给出 S_0 的一个较好的估计，由$(W^{-1}(p_1),W^{-1}(q_1))$给出$(p_0,q_0)$的一个较好的估计，这个较精确的$(p_0,q_0)$的估计用作在原分辨率下的迭代算法(6)的初值，可以使迭代次数大大减少，节省时间.

但是要计算(p_1,q_1)，需要知道 $R(S_1)$(见(10)式)，而

$$W_{00}(R_0)=W_{00}(R(S_0))\neq R(W_{00}(S_0)) \tag{11}$$

上式中不等号是由于反射模型 R 是一个非线性过程，而 W_{00}是一个线性算子，使得算子 R 与 W_{00}不是可交换的. 这就是 SFS 中多分辨率方法带来的非线性问题.

所以给定 R_0 的情况下，直接对 R_0 缩小分辨而得的 $W_{00}(R_0)$并不能生成缩小分辨率的表面 S_1 的反射光强度图像 $R(S_1)$. 所以用(6)式的算法直接作用于 $W_{00}(R_0)$上，并不能得到 S_1 表面梯度(p,q)的正确估计. 因而在采用多分辨方法求解 SFS 问题时，我们应该首先寻求对 $R(S_1)$的较好的估计，而不能直接对 R_0 用小波方法缩小分辨率.

2　基于小波分析的多分辨 SFS 模型

为了解决上节中所述的非线性问题，我们引入表面梯度模的概念. 表面 S 在某点的梯度$(p,q,-1)$的模定义为

$$T=\sqrt{p^2+q^2}=\|(p,q)\| \tag{12}$$

那么由(3)式可以推出：

$$R=\sqrt{\frac{1}{1+T^2}} \tag{13}$$

和

$$T=\sqrt{\frac{1-R^2}{R^2}} \tag{14}$$

我们首先注意到当一个光滑表面上的点移动时，对应该点的表面梯度 $\vec{N}=(p,q,-1)$连续地变化，因而表面上两个十分接近的点的法向量的梯度十分相近，它们的模 $\|(p1,q1)\|$ 和 $\|(p2,q2)\|$ 十分接近，更进一步，有下面的关系：对$\forall\ \alpha,\beta\in R$，

$$\|\alpha(p1,q1)+\beta(p2,q2)\|\approx|\alpha\|(p1,q1)\|+\beta\|(p2,q2)\|| \tag{15}$$

上式蕴含着当采用一个较短支集的小波函数时，有：

$$T(W_{00}(S))\approx W_{00}(T(S)), \tag{16}$$

这是因为紧支小波变换(特别是 W_{00}算子)是有限线性组合(卷积运算)，(16)式左边和右边正好分别是形如(15)式的左边和右边的形式.

由(16)式，我们可以用原分辨率下的表面 S 的梯度模 $T(S)$通过适当的小波变换来估

计缩小分辨率的表面 $W_{00}(S)$ 的梯度模 $T(W_{00}(S))$，再由(13)式，我们可求得缩小分辨率表面 $W_{00}(S)$ 的反射光强度图像的估计值：

$$R(W_{00}(S))=\sqrt{\frac{1}{1+T^2(W_{00}(S))}}\approx\sqrt{\frac{1}{1+W_{00}^2(T(S))}} \tag{17}$$

于是我们解决了上节最后提出的问题：估计缩小分辨率表面的反射光强度图像，一个较精确的估计值使得(14)式求解的表面梯度 (p_1,q_1) 能用以更精确地估计较高分辨率表面的梯度初始值 (p_0^0,q_0^0).

那么，影响此初值估计精度的因素综合起来是 3 个大的方面：

(1) 第 2 节中提到的(9)式的近似程度.主要是由小波函数的正则性和消失矩阶数决定，对 Daubechies[7] 构造的小波函数而言，支集长度越大，(9)式越精确.

(2) (16)式的近似程度.我们知道，所采用的小波函数支集越短，(16)式的估计越精确.

(3) 表面的性质(主要是光滑性).表面越光滑，(16)式和(9)式的估计越精确.因此，我们提出的方法对光滑表面的 SFS 问题求解效果很好.光滑表面正是大多数 SFS 问题考虑的情形.因而，我们看到基于小波分析的多分辨率 SFS 方法在选取小波函数(限于紧支正交小波)时，有一个矛盾的因素，正如上面(1)、(2)所述，小波支集长度不能太长，否则(16)式的估计很坏，又不能太短，还得满足一定的正则性要求以使(19)式不坏.其实，在给定表面方程的情况下，是可以定量地估计采用某个小波函数时(16)式及(19)式的精度.因而应该可以控制基于小波分析的多分辨率 SFS 方法的收敛速度.实际执行时，我们采用已经由经验(实验)确定的小波函数.

由前面的分析，我们得到了下面的算法：

WTM SFS 算法：给定原始图像 R_0，L 是一个正整数(表示多分辨中锥的层数)；

(1)用(14)式计算 $T_0=\sqrt{\frac{1-R_0^2}{R_0^2}}$；

(2)用(8)式构造多分辨率锥：

$$\{T_0,T_1=W_{00}(T_0),T_2=W_{00}(T_1),\cdots,T_{L-1}=W_{00}(T_{L-2})\};$$

(3)用(13)式计算相应的缩小表面的反射图像：

$$\{R_0,R_1=R(W_{00}(S_0)),\cdots,R_{L-1}\}$$

(4)给出最小表面 S_{L-1} 的初始梯度值 (p_{L-1}^0,q_{L-1}^0)；

　令 $i=L-1$；

　while ($i\geqslant 0$) do {

　　$(p_i,q_i)=sfs(R_i,p_i^0,q_i^0)$；

　　$(p_{i-1}^0,q_{i-1}^0)=(W^{-1}(p_i),W^{-1}(q_i))$；

　　$i=i-1$；

　　}end of while.

(5)输出 (p_0,q_0)；停止.

3　实验结果

我们在 DEC5000 工作站用 C 语言实现了上述基于小波分析的 SFS 算法，(5)式中的局

部平均 $\hat{u}$ 采用模板运算：

$$\frac{1}{20}\begin{bmatrix}1 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 4\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

平滑因子 λ 取值 7000，采用三层次的锥型分解.

实验中采用的图像都是 256×256×8bits 的灰度图像.

首先，我们测试小波函数的选取问题，即确定小波支集的长度对多分辨率 shape from shading 方法的影响. 我们在紧支正交小波函数[7]中选择小波. 正如文献[11]中所述，这类小波函数支集长度为 $2N-1$ 时，消失矩阶数为 N；因而在下面的论述中，我们用 N 标识所采用的紧支正交小波.

第 1 组实验中，我们分别用 $N=2,3,4,\cdots$ 的小波构造多分辨率逼近锥，发现 $N=2$ 的小波是最佳的选择. 表 1 给出了部分实验结果. 我们发现，在较省时的较低分辨率下（即 64×64和 128×128）选用不同的小波呈现出相似的计算效率，但是在最耗时的最高分辨率 256×256 下，选用 $N=2$ 的小波显示出高得多的计算效率，SFS 算法只迭代 5 次就收敛了，而用 $N=4$ 的小波，却要迭代 18 次才能收敛到一个相类似的精度上，这个现象与我们在上节所作的论断一致：小波的支集长度应较短，以使(16)式更精确；$N=2$ 时，小波函数也具有一定的正则性，使得(9)式的估计也较精确，虽然增大支集长度还可使(9)式更好，但综合起来看，(16)式的精确度显得更为重要.

表 1　小波的选择

分辨率大小	迭代次数	
	小波 $N=2$	小波 $N=4$
64×64	238	239
128×128	26	23
256×256	5	18

其次，我们将提出的基于小波分析的方法与其它 SFS 方法比较. 我们同时也实现了算法(6)直接作用于原始图像（256×256 分辨率）的方法和 peleg 和 Ron[6]提出的利用 Gaussian 锥的多分辨率 SFS 方法，表 2 给出了实验比较结果，表中基于小波分析的多分辨率 shape from shading 算法中采用 $N=2$ 的小波.

表 2　各种方法比较

分辨率大小	迭代次数		
	WTM SFS	文献[6]的方法	SFS 直接作用于原图
64×64	253	254	—
128×128	29	23	—
256×256	8	51	>1000

可以发现，基于小波分析的方法给出了好得多的计算效率，它使得最耗时的最大分辨率下的迭代次数极大地减少. 直接采用原图像的多分辨率锥的方法（即忽视第 1 节中的非线性问题）仅比直接作用在原始图像上的方法的结果好一些，表中未列入. 采用多分辨率的方法，使得计算效率高于直接在原图上的迭代算法的计算效率，引入表面梯度模的多分辨率锥，又

克服了非线性问题带来的不精确(见(11)式),使得计算效率高于直接构造原图像的多分辨率 Gaussian 锥的方法[6].具有短支集长度和一定正则性和消失矩的小波的存在,保证了本文提出的基于小波分析的多分率 shape from shadung 方法取得很好的效果.注意,在所有上述的实验中,执行算法收敛时,我们要求解的精度大致相同,以便于比较,由(7)式给出的可积性约束没有加入上述实际实验的算法中,加入可积性的约束条件给出基本相同的相论.

4 结 论

本文分析了计算机视觉的一个经典问题——shape from shading(由明暗恢复景物三维表面).该问题求解中最关键的问题之一是如何提高计算效率.我们提出了基于小波分析的多分辨率 SFS 算法.首先,我们分析了引入多分辨率方法导致的非线性问题使得直接构造灰度图像的多分辨锥的方法不能得到较优的结果,进而我们引入了表面梯度模的多分辨锥的方法,使得预测(或估计)高分辨率表面方向的初值的方法可以十分精确.从数学意义上讲,这种精度是可控制的.特别地,我们得出了影响多分辨率方法的精度(包括非线性问题和多分辨率逼近锥的精度)的至关重要的因素——紧支小波的支集长度对 SFS 问题可能的影响,实验进一步确定了该因素在 SFS 问题中的作用.具有较短支集和一定正则性(消失矩阶数)的紧支正交小波函数的存在,使得基于小波分析的多分辨率 shape from shading 方法极为成功,因为它保证了两个重要的估计,(9)式和(16)式都较好.

本文提出的利用小波分析方法求解 SFS 问题的方法,同时也展示了小波理论结合具体应用时考虑小波选取问题的一些思路.

参考文献

1 Horn B K P. Obtaining shape from shading information. In: Winston P H ed. the Psychology of Machine Vision, New York: McGraw-Hill, 1975. 115-155.

2 Brooks M J, Horn B K P. Shape and Source from shading. In: Int. Joint Conf. Artificial Intelligence, Los Angeles, CA, 1985. 932-936.

3 Horn B K P, Brooks M J. The variational approach to shape from shading. CVGIP, 1986, **33**: 174-208.

4 Frankot R T, Chellappa R. A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms. IEEE Trans. on PAMI, 1988, **10**: 439-451.

5 Simchony T, Chellappa R, Lichtenstein Z. Pyramid implementation of optimal step conjugate search algorithm for some computer vision problems. In: Proc. Second Int. Conference of Coputer Vision, Tampa, FL, 1988. 580-590.

6 Peleg S, Ron G. Nonlinear multiresolution: a shape-from-shading example. IEEE Trans. on PAMI, 1990, **12** (**12**). 1206-1210.

7 Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Commun. on Pure & Applied Mathematics, 1988, XLI: 909-996.

8 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Trans. on PAMI, 1989, **11**(**7**): 674-693.

9 Mallat S, Multufrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Trans. ASSP, 1989, **37**: 2091-2110.

10 Zhong Sheng, Shi Qingyun, Cheng Min-de. Fast shape from shading based on warelet transform. Proc. of SPIE: Warelet Applications, 1994, 2242.

11　钟声. 小波变换及其在图像处理和计算机视觉的应用[博士论文]. 北京大学, 1994.

SHAPE FROM SHADING USING WAVELET TRANSFORM

Zhong Sheng　Shi Qingyun　Cheng Minde

(*Department of Mathematics*, *Beijing University*, *Beijing* 100871)

(*The Center of Information Science*, *Beijing University*, *Beijing* 100871)

(*The National Laboratory on Machine Perception*, *Beijing University*, *Beijing* 100871)

Abstract　In shape from shading, iterative algorithms are often used to compute the surface derivatives. These algoritghms are, however, very time—consuming when the iterations are performed on the original image. In this paper the authors propose a multiresolution method which makes use of the orthonormal wavelet transform to construct a multiresolution pyramid and let most iterations be performed on the low resolution images to give good predictions of the initial values of the surface derivatives of higher resolution images and thus save many computations. On the other hand, the nonlinearity of imaging makes the direct reduction of the image resolution not an optimal way of utilizing the multiresolution method. Instead, they construct the pyramid of the norm of the surface direction. They prove that this strategy gives out excellent results when the surface is smooth and the support length of the wavelet is small. Factors that may affect the selection of the wavelet in the multiresolution shape form shading are also studied. Experiments show the superiority of this strategy to other methods.

Key words　Shape from shading, compactly supported orthogonal wavelet basis, multiresolution pyramid, nonlinearity.