

关于空间三角网格上 G1 插值的阶数*

姜寿山

(西安工业学院, 西安 710032)

摘要 本文给出在空间三角网格上用三角 Be'zier 曲面构造 G1 插值所需的最低次数, 并给出五次 G1 插值的具体构造方法.

关键词 Be'zier 曲面, G1 插值.

目前, 在空间三角网格上用 Be'zier 曲面构造 G1 插值的方法已有很多. 根据其结构, 可将它们分为两种类型: 一类应用细分技巧将空间三角区域分成若干个子区域, 最常用的是 Clough-Tocher 细分法, 在每个子区域上定义曲面片, 曲面片之间为 G1 拼接. 另一类方法则在三角网格的每个三角形上定义一块曲面, 整张曲面为 G1 连续. 在本文中, 我们来考虑这样一个问题: 给定空间三角网格顶点处法矢及三角网格线端点切矢, 要用三角 Be'zier 曲面构造 G1 插值, 在每个三角域上只定义一块曲面并满足插值条件, 这样的插值曲面的最低次数是多少? 如何具体实现最低次数的 G1 插值? 从理论研究方面来讲, 解决这些问题有利于探讨 G1 插值的结构. 从实际应用方面来讲, 避免曲面构造时的盲目性, 能简化计算.

1 G1 充分必要条件

在文献[4]中, 刘鼎元和 Hoschek 给出 Be'zier 曲面 G1 拼接的一个充分必要条件. 我们将应用该条件来解决我们所提出的问题.

假定 S1 和 S2 是两个相邻的 n 次三角 Be'zier 曲面片, 如图 1 所示. 关于图中各记号的意义可详见文献[4].

S1 和 S2 在公共边界上达到 G1 拼接的充分必要条件是存在常数 $\nu_i, \mu_i, \lambda_i, i=1, 2, \dots, 2n-2$, 它们满足以下方程:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (\gamma_j a_i^* + \mu_j e_i + \lambda_j a_i) = 0$$
$$\alpha = i + j \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots, 3n-3 \quad (1-1)$$

为了以后使用方便, 特将(1-1)可具体列出:

$$\nu_0 a_0^* = \mu_0 e_0 + \lambda_0 a_0$$
$$\nu_1 a_0^* + (n-1)\nu_0 a_1^* = -\mu_1 e_0 - (n-1)\mu_0 e_1 - \lambda_1 a_0 - (n-1)\lambda_0 a_1$$

* 本文 1992-03-17 收到, 1992-10-08 定稿

作者姜寿山, 36 岁, 副教授, 主要研究领域为 CAD/CAM, 计算机图形学, 计算数学.

本文通讯联系人: 姜寿山, 西安 710032, 西安工业学院

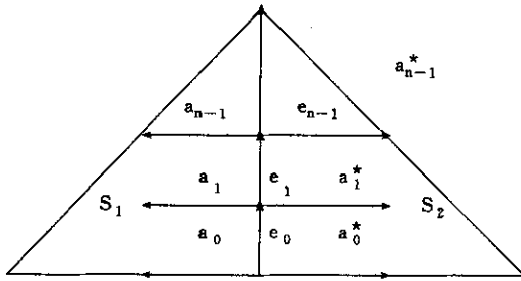


图1

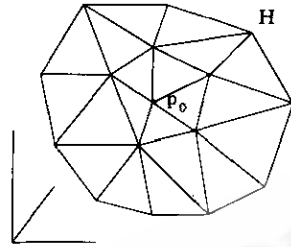


图2

.....

$$\begin{aligned}
 u_{2n-3}a_{n-1}^* + (n-1)u_{2n-2}a_{n-2}^* &= -\mu_{2n-3}e_{n-1} - (n-1)\mu_{2n-2}e_{n-2} - \lambda_{2n-3}a_{n-1} - (n-1)\lambda_{2n-2}a_{n-2} \\
 u_{2n-2}a_{n-1}^* &= -\mu_{2n-2}e_{n-1} - \lambda_{2n-2}a_{n-1}
 \end{aligned} \tag{1-2}$$

2 顶点问题

假定 $\{\Delta_i\}$ 是给定的空间三角网格, 见图 2.

$\{\Delta_i\}$ 的顶点法矢已给定, 我们的目标是要在每个三角上定义三角 Be'zier 曲面, 它满足插值条件, 各曲面片之间为 G1 拼接.

不失一般性, 假定 P_0 为 $\{\Delta_i\}$ 一个内顶点, 有 K 个三角形共享 P_0 顶点. 且假定在 $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ 上已经定义了三角 Be'zier 曲面 S_1, S_2, \dots, S_k , 它们在 P_0 周围的 Be'zier 顶点分别为 p_i^j 和 q_i , 见图 3.

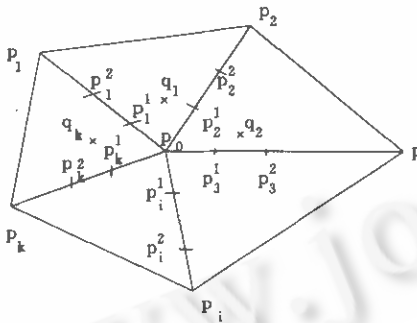


图3

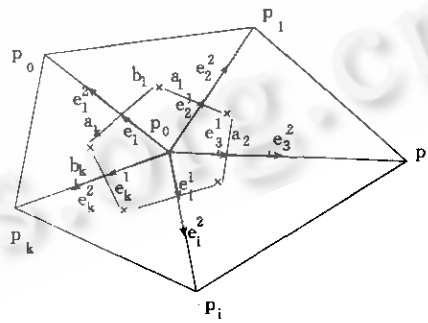


图4

由于在边界顶点处(如图 2 中的 H 点), 不存在顶点一致性问题, 边界条件可任意给定, 在此不对他们进行讨论.

为了与公式(1-1)中各记号一致, 特令

$$\begin{aligned}
 e_i^1 &= p_i^1 - p_0, & e_i^2 &= p_i^2 - p_i^1 \\
 b_i &= q_i - p_i^1, & a_i &= q_i - p_{i+1}^1, & i &= 1, 2, \dots, k
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

这样一来, 用图 4 代替图 3, 就使得叙述更加明白.

根据我们对 $\{\Delta_i\}$ 的假设, e_i^j 预先给定. (事实上, 更一般的情况是 e_i^j 的方向给定, 其长度还可选取, 但这样并不影响本文结果, 为简单起见, 故认为 e_i^j 是确定的.)

无论选取什么次数的 Be'zier 曲面作为插值曲面,以下关系总是成立的(根据(1-1)).

$$\begin{cases} v_i^1 e_1^i = -\mu_i^1 e_k^1 - \lambda_i^1 e_{k-1}^1 \\ v_i^1 e_2^i = -\mu_i^1 e_1^1 - \lambda_i^1 e_k^1 \\ v_{i+1}^1 e_{i+2}^1 = -\mu_{i+1}^1 e_{i+1}^1 - \lambda_{i+1}^1 e_i^1 \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k-2 \quad (2-2a)$$

$$\begin{cases} v_k^2 e_1^k + (n-1)v_k^1 b_k = -\mu_k^2 e_k^2 - (n-1)\mu_k^1 e_k^2 - \lambda_k^2 e_{k-1}^2 - (n-1)\lambda_k^1 a_k \\ v_i^2 e_2^i + (n-1)v_i^1 b_i = -\mu_i^2 e_1^1 - (n-1)\mu_i^1 e_1^1 - \lambda_i^2 e_k^1 - (n-1)\lambda_i^1 a_i \\ v_{i+1}^2 e_{i+2}^i + (n-1)v_{i+1}^1 b_{i+1} = -\mu_{i+1}^2 e_{i+1}^1 - (n-1)\mu_{i+1}^1 e_{i+1}^1 - \lambda_{i+1}^2 e_i^1 - (n-1)\lambda_{i+1}^1 a_{i+1} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k-2 \quad (2-3a)$$

其中 $v_i^j, \mu_i^j, \lambda_i^j$ 是与(1-1)中 v_k, μ_k, λ_k 相对应的常数,例如, v_i^1 相当于 v_0 等等,其下标以示边界的区别.

不失一般性,令 $v_i^1 = 1, i=1, 2, \dots, k$, 则(2-2a), (2-3a)成为

$$\begin{cases} e_1^i = -\mu_i^1 e_k^1 - \lambda_i^1 e_{k-1}^1 \\ e_2^i = -\mu_i^1 e_1^1 - \lambda_i^1 e_k^1 \\ e_{i+2}^i = -\mu_{i+1}^1 e_{i+1}^1 - \lambda_{i+1}^1 e_i^1 \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k-2 \quad (2-2)$$

$$\begin{cases} v_k^2 e_1^k + (n-1)b_k = -\mu_k^2 e_k^2 - (n-1)\mu_k^1 e_k^2 - \lambda_k^2 e_{k-1}^2 - (n-1)\lambda_k^1 a_k \\ v_i^2 e_2^i + (n-1)b_i = -\mu_i^2 e_1^1 - (n-1)\mu_i^1 e_1^1 - \lambda_i^2 e_k^1 - (n-1)\lambda_i^1 a_i \\ v_{i+1}^2 e_{i+2}^i + (n-1)b_{i+1} = -\mu_{i+1}^2 e_{i+1}^1 - (n-1)\mu_{i+1}^1 e_{i+1}^1 - \lambda_{i+1}^2 e_i^1 - (n-1)\lambda_{i+1}^1 a_{i+1} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k-2 \quad (2-3)$$

根据 λ 的几何意义,我们有以下关系式

$$\prod_{i=1}^k \lambda_i^1 = 1 \quad (2-4)$$

根据 a_i, b_i 的位置,有

$$b_i = a_i + e_{i+1}^1 - e_i^1 \quad i=1, 2, \dots, k \quad (2-5)$$

将(2-5)代入(2-3)得到

$$\begin{cases} b_1 + \lambda_1^1 b_k = [(-\mu_1^2 + (n-1)\lambda_1^1)e_1^1 - (n-1)\mu_1^1 e_1^1 - v_1^2 e_2^1 - (\lambda_1^2 + (n-1)\lambda_1^1)e_k^1]/(n+1) \\ b_{i+1} + \lambda_{i+1}^1 b_i = [(-\mu_{i+1}^2 + (n-1)\lambda_{i+1}^1)e_{i+1}^1 - (n-1)\mu_{i+1}^1 e_{i+1}^1 - \mu_{i+1}^2 e_{i+2}^1 - (\lambda_{i+1}^2 + (n-1)\lambda_{i+1}^1)e_i^1]/(n+1) \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k-1 \quad (2-6)$$

由于 e_i^1 已预先给定, μ_i^1 和 λ_i^1 由(2-2)唯一确定. 将(2-6)写为矩阵形式

$$A \cdot B = C \cdot E_1 + D \cdot E_2 \quad (2-7)$$

其中 C, D, A 为 $K \times K$ 矩阵, B, E 和 E 为 $n \times 1$ 列阵

$$\begin{cases} B = [b_1, b_2, \dots, b_k]^T \\ E_1 = [e_1^1, e_2^1, \dots, e_k^1]^T \\ E_2 = [e_1^2, e_2^2, \dots, e_k^2]^T \end{cases} \quad (2-8)$$

C 的元素含有常数 $\mu_i^1, v_i^1, \lambda_i^1$ 及 λ_i^2 , 而 D 的元素只含有 M_i^1 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_k^1 \\ \lambda_1^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k-2}^1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{k-1}^1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

可以由系统(2-7)来求解 b , 通过计算有

$$\det A = 1 - (-1)^k \quad (2-10)$$

其中 $\det A$ 表示 A 的行列式值.

如果 K 为奇数, 则 A 满秩, 对于任意预先给定的常数 $\mu_i^2, \lambda_i^2, v_i^2$ 及向量 e_i^2 可唯一求出 b_i , 也可以唯一求出 Be'zier 点 q_i . 因为 q 与插值曲面在角点处的扭矢有关, 我们称之为扭矢点.

我们知道, 在插值曲面方法中, 关键在于定出合适的扭矢点, 因为象 q_i 这样的扭矢点要影响到至少三块曲面的连接, (严格来说, 要影响到 P 邻近的所有曲面片的连接, 即所谓的角点一致性问题), 而其它的非扭矢点只关系到相邻两块曲面的 G1 拼接.

当 K 为偶数时, 矩阵 A 奇异, 要求出适当的 b_i, e_i^1, e_i^2 及常数 $v_i^1, \mu_i^1, \lambda_i^1$ 满足以下形式的约束方程

$$\sum_{j=1}^k \{ \alpha_j(\mu_i^2, \lambda_i^2, v_i^2, \lambda_i^1) e_j^1 + \beta_j(\lambda_i^1, \mu_i^1) e_j^2 \} = 0 \quad (2-11)$$

其中系数 $\alpha_j(\mu_i^2, \lambda_i^2, v_i^2, \lambda_i^1)$ 表示 α_j 是 $\mu_i^2, \lambda_i^2, v_i^2, \lambda_i^1$ 的多项式, β_j 是 λ_i^1, μ_i^1 的多项式.

由于 λ_i^1, μ_i^1 是确定的, 故 β_j 是确定的, 而所有 e_j^1 的组合仍是落在 P_0 处切平面上的平面向量. 如果 e_j^2 全部预先给定, 则 $\sum_{j=1}^k \beta_j e_j^2$ 是确定的, 在这种情况下, 除非 e_j^1 也是落在 P_0 处切平面上的平面向量, 否则, 无论选取什么样的常数 $v_i^2, \mu_i^2, \lambda_i^2$ 都不能总保证(2-11)成立.

因此, 为了保证在任何情况下(2-11)满足, 至少应有某个 e_j^1 是自由的, 它要从(2-11)中解出.

我们知道, 许多三角插值方法都对空间三角网格的结构都作了特殊的限定, 例如, 限定所有内顶点是奇顶点, 其目的就是避免求解约束方程.

在每个内顶点都作类似分析, 假定 P_1 也是一个内顶点, 在 P_1 处同样做以上分析. 如果采用 3 次 Be'zier 曲面作为插值曲面, 由 P_0 到 P_1 的边界曲线的控制多边形为

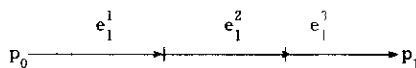


图5

很显然,由于 e_1^1, e_1^2, e_1^3 是完全确定的,不能保证约束方程(2-11)成立,所以,用 3 次曲面难以完成 $\{\Delta_i\}$ 上的 G^1 插值.

如果采用 4 次 Be'zier 曲面作为插值曲面,由 P_0 到 P_1 的边界曲线的控制多边形为

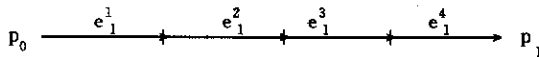


图6

由于 e_1^1 和 e_1^4 是给定的,在 P_0 点考虑顶点问题时,通过选 e_1^2 来使(2-11)成立,则 e_1^3 也随之被完全定下来.在 P_1 点考虑顶点问题时,就无法来选取 e_1^3 使形如(2-11)的约束方程成立,但由于 $\{\Delta_i\}$ 的任意性,我们不能保证在这种情况下,有其它的选择而使形如(2-11)的约束方程成立.所以,在一般情况下,用四次曲面也难以完成 $\{\Delta_i\}$ 上的 G^1 插值.

如果采用 5 次 Be'zier 曲面作为插值曲面,由 P_0 到 P_1 的边界曲线的控制多边形为



图7

在 P_0 处考虑顶点问题时,可选 e_1^2 使约束方程(2-11)成立.在 P_1 处考虑顶点问题时,可选 e_1^4 保证形如(2-11)的约束满足.这样一来, e_1^3 也完全确定,即边界曲线完全确定.

解决了两端点处的顶点问题,而扭矢点有一定的灵活性,其它 Be'zier 点的选取只影响到相邻两块曲面的 G^1 连续,而与第三者无关.另外,从以上分析也可看出,如果应用 5 次曲面作为插值曲面,实现相邻片之间的 G^1 拼接还是局部的.换句话说,可独立的分步进行.因此,我们就得出了如下结论:

给定任意空间三角网格的顶点法矢及三角网格线端点切矢,用三角 Be'zier 曲面构造 G^1 插值时,曲面的次数不应小于 5 次.

以下,我们来看如何具体完成 5 次 G^1 插值.

3 5 次 G^1 插值

假定 $\{\Delta_i\}$ 是给定的空间三角网格,插值条件如前. Δ_1 和 Δ_2 是 $\{\Delta_i\}$ 中两个相邻空间三角形,我们仅以在这两个三角形上定义的三角曲面片的 G^1 拼接为例来说明 G^1 插值的构造过程,因为其它相邻曲面片之间的 G^1 拼接依法炮制即可.

定义在 Δ_1 和 Δ_2 上的 5 次 Be'zier 曲面 S_1 和 S_2 的 Be'zier 控制点分别为 a_{ijk}, b_{ijk} , 如图 8 所示. 根据前边的假定, $a_{500}, a_{050}, a_{005}, a_{140}, a_{410}, a_{041}, a_{014}, a_{104}, a_{401}, b_{050} = a_{050}, b_{005} = a_{005}, b_{500}, b_{140}, b_{410}, b_{401}, b_{104}, b_{041} = a_{041}, b_{014} = b_{014}$ 确定,扭矢点 $a_{131}, a_{113}, a_{311}$, 及 $b_{113}, b_{131}, b_{311}$ 可自由给定. 关于这个问题已有专门的文章介绍,在此我们不作详细介绍,最简单的方法是令

$$\begin{cases} a_{131} = (a_{140} + a_{041})/2, & a_{113} = (a_{104} + a_{014})/2 \\ b_{131} = (a_{041} + b_{140})/2, & b_{113} = (a_{041} + b_{104})/2 \end{cases}$$

这些点的选取在我们的插值方法中对 G^1 拼接已无关紧要,但它们对曲面片的形状影响甚大,可用来控制曲面形状.

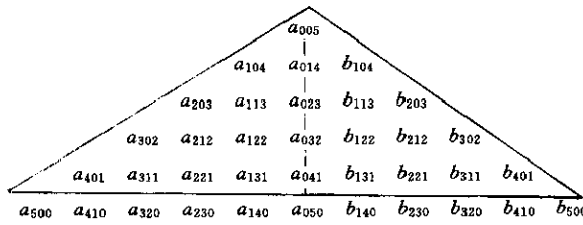


图 8

为了应用(1-1)时看起来直观,令

$$\begin{cases} a_i^* = b_{1,4-i,i} - b_{0,5-i,i} \\ a_i = a_{1,4-i,i} - a_{0,5-i,i} \\ e_i = a_{0,4-i,i+1} - a_{0,5-i,i} \end{cases} \quad i=0,1,2,3,4 \quad (3-1)$$

用图 9 代替图 8 使得叙述简便.

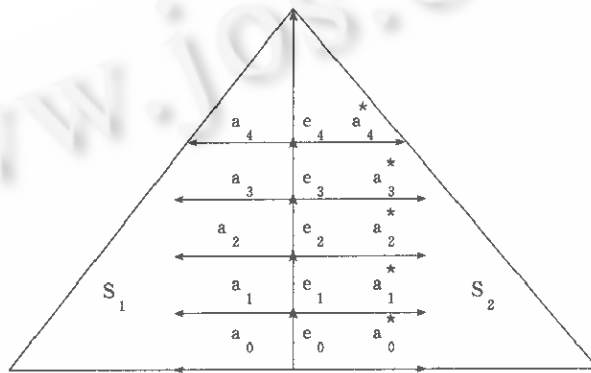


图 9

因为 S1 和 S2 是 G1 拼接的,它们需满足充分必要条件(1-1),在我们的例子中, $n=5$, 令 $v_0=v_1=1, v_i=\mu_i=\lambda_i=0, i=2,3,\dots,8$. 这样, (1-1) 成为

$$\begin{cases} a_0^* = -\mu_0 e_0 - \lambda_0 a_0 \\ a_0^* + 4a_1^* = -\mu_1 e_0 - 4\mu_0 e_1 - \lambda_1 a_0 - 4\lambda_0 a_1 \\ 4a_1^* + 6a_2^* = -4\mu_1 e_1 - 6\mu_0 e_2 - 4\lambda_1 a_1 - 6\lambda_0 a_2 \\ 6a_2^* + 4a_3^* = -6\mu_1 e_2 - 4\mu_0 e_3 - 6\lambda_1 a_2 - 4\lambda_0 a_3 \\ 4a_3^* + a_4^* = -4\mu_1 e_3 - \mu_0 e_4 - 4\lambda_1 a_3 - \lambda_0 a_4 \\ a_4^* = -\mu_1 e_4 - \lambda_1 a_4 \end{cases} \quad (3-2)$$

从第 1 和最后 1 个方程可唯一解出常数 μ_0, μ_1, λ_0 和 λ_1 , 从第 2 和倒数第 2 个方程可求出

$$\begin{cases} e_1 = -(a_0^* + 4a_1^* + \mu_1 e_0 + \lambda_1 a_0 + 4\lambda_0 a_1) / 4\mu_0 \\ e_3 = -(4a_3^* + a_4^* + \mu_0 e_4 + \lambda_0 a_4 + 4\lambda_1 a_3) / 4\mu_1 \end{cases} \quad (3-3)$$

从第 3 个方程可求出

$$a_2^* = -[-(\mu_1 - \mu_0)e_0 + 4(\mu_1 - \mu_0)e_1 + 6\mu_0 e_2 - (\lambda_1 - \lambda_0)a_0 + 4(\lambda_1 - \lambda_0)a_1 + 6\lambda_0 a_2] / 6 \quad (3-4)$$

但是,从第 4 个方程中得出一个关于 e_i, a_i 的约束方程

$$(\mu_1 - \mu_0)(e_0 - 4e_1 + 6e_2 - 4e_3 + e_4) + (\lambda_1 - \lambda_0)(a_0 - 4a_1 + 6a_2 - 4a_3 + a_4) = 0 \quad (3-5)$$

由于 a_2 的选取(即 Be'zier 点 a_{122})不影响其它曲面元之间的连续性,而只关系到 S_1 与 S_2 的拼接,所以只需令

$$a_2 = [(\mu_0 - \mu_1)/(\lambda_1 - \lambda_0)(e_0 - 4e_1 + 6e_2 - 4e_3 + e_4) - a_0 + 4a_1 + 4a_3 - a_4]/6 \quad (3-6)$$

约束方程(3-5)就自然满足。

这样,所有的 a_i^* , a_i , e_i 就完全确定出来,即 Be'zier 点 b_{131} , b_{122} , b_{113} , a_{131} , a_{122} , a_{113} , a_{032} , a_{023} 这些与 S_1, S_2 在公共边上 G_1 拼接有关的点全部已知,在 S_1, S_2 的其它边上作类似处理,所有 a_{ijk} , b_{ijk} 就全部已知,并保证了 S_1, S_2 与其它曲面片也是 G_1 拼接的. 在 $\{\Delta_i\}$ 的所有内网格线上作这样的处理,就保证了各相邻曲面片之间是 G_1 拼接的。

总结以上两块相邻曲面片之间的 G_1 拼接过程:

1. 首先确定扭矢点 a_{131} , a_{113} , b_{131} , b_{113} 等;
2. 求出常数 μ_0 , μ_1 , λ_0 , λ_1 等; 此处应该指出的是不必一定要取 $v_1 = 1$, 也可根据需要选取;
3. 通过(3-3)定出边界 Be'zier 点 a_{032} , a_{023} ;
4. 通过(3-6)定出 a_{122} ;
5. 通过(3-4)定出 b_{122} .

这是一个固定的过程,适应于任何相邻曲面片之间的 G_1 拼接. 但在实用中还需指定 $\{\Delta_i\}$ 的边界条件,才能完成整个 G_1 插值。

通过以上的分析、讨论和具体构造过程,我们证明了第 2 节的结论是正确的:给定任意空间三角网格顶点处法矢及三角网格线端点切矢,用三角 Be'zier 曲面构造 G_1 插值时,至少要用 5 次曲面. 在一些特定的情况下 4 次曲面甚至 3 次曲面也可完成 G_1 插值,但对三角网格有特殊要求。

参 考 文 献

- 1 Boehm W. Visual continuity. *Computer Aided Geometric Design*, 1988(5): 307-311.
- 2 Farin G. Smooth interpolation to scattered 3D data. In: Barnhill R E, Boehm W *et al.* *Surface in CAGD*, 1983.
- 3 Piper B R. Visual smooth interpolation with triangular Be'zier patches. In: Farin G eds. *Geometric Modelling*, 1987: 221-223.
- 4 Liu D, Hoschek J. G_1 -Continuity condition between adjacent rectangular and triangular Be'zier Patches. *Computer Aided Design*, 1989, 22(4): 194-200.
- 5 Degen W L F. Explicitly condition for adjacent Be'zier surface patches. *Computer Aided Geometric Design*, 1990 (7): 181-189.
- 6 Du W H, Schmitt F J M. New results for the smooth connection between tensor product Be'zier patches. In: Magnenat-Thalmann N Thalmann eds. *New Trends in Computer Graphics, Proceeding of CG International'88*, 1988: 351-361.
- 7 Sarrage R F. Computer modelling of surfaces with arbitrary shapes. *IEEE Computer Graphic and Application*, 1989: 67-77.
- 8 Peter J. Local smooth surface interpolation classification. *Computer Aided Geometric Design*, 1990(7): 191-193.

THE LOWEST DEGREE OF G1 INTERPOLATION OVER 3D TRIANGULATION

Jiang Shoushan

(Xi'an Institute of Technology, Xi'an 710032)

Abstract This paper proved that the lowest degree of G1 interpolation over 3D triangulation with Be'zier triangular surface patches where only one patch is constructed over one triangle region is quintic and a scheme of constructing lowest degree of G1 interpolation over 3D triangulation is described in detail.

Key words Be'zier triangular surface, G1 Interpolation.