

Horn 逻辑上的范畴等价及方法推广

王怀民

(国防科技大学, 长沙 410073)

CATEGORICAL EQUIVALENCE ON HORN LOGIC AND GENERALIZATION OF THE METHOD

Wang Huaimin

(National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract According to the idea of categorical equivalence, we discuss a categorical equivalence on Horn logic. The method of categorical equivalence could be treated as a method to describe semantics of meta-level operation. We generalize the method.

摘要 本文根据范畴等价的思想, 讨论了 Horn 逻辑上的一种范畴等价, 其中一个范畴是 Horn 范畴 C_{HT} , 其态射是保真关系, 另一个范畴是 Herbrand 解释范畴 C_{HB} . 范畴等价可以描述作用于理论上元级操作的语义, 本文一般性地描述了这一方法的思想.

§ 1. 引言

人们已经注意借鉴软件工程中的理论和方法研究反映 AI 程序设计特点的环境. 在本文中, 一个实际的 AI 程序设计的所谓语义维护问题^[2]是 Prolog 程序的修改及其修改前后两个程序之间的能力等价问题.

例如我们开始有一个描述“parent”这个关系的程序 P1:

```
parent(X, Y): -father(X, Y),  
parent(X, Y): -mother(X, Y),  
father(george, Chris),  
mother(amelia, Chris).
```

后来该程序被改为程序 P2:

```
parent(X, Y): -son(Y, X),  
parent(X, Y): -daughter(Y, X),  
son(Chris, george),  
son(Chris, amelie).
```

我们关心的是这两个程序的能力关于“parent”这个关系是否等价, 即命题“ $P1 \vdash \text{parent}(a, b)$ 当且仅当 $P2 \vdash \text{parent}(a, b)$ ”是否成立. 进一步地, 这种能力等价性在其模型语义上又是什么含义.

我们知道, Prolog 的逻辑基础是 Horn 逻辑. 一个 Prolog 程序就是一个 Horn 理论, 该 Horn 理

论的最小 Herbrand 模型作为该 Prolog 程序的模型语义^[3]. 我们很自然地注意到 Prolog 程序的能力等价性在其模型语义上的反映. 根据高阶范畴逻辑^[1]用范畴等价(同构或伴随)的方法描述一类理论系统与一类模型的范畴之间结构一致的思想启发, 如果我们以 Horn 理论为对象, 以 Horn 理论之间某种能力等价关系为 Horn 理论之间的态射(morphism), 构造 Horn 理论的范畴, 那么我们直觉地希望构造一个以 Herbrand 解释为对象的 Herbrand 解释的范畴, 使其与 Horn 理论的范畴等价. 这时, 与 Horn 理论的态射相应的 Herbrand 解释范畴上的态射就可以被规定为 Horn 理论上等价变换的语义指称. 下面一节我们把这一思想具体化, 精确化, 第 3 节我们把这一思想推广为一种方法的框架.

§ 2. Horn 理论上的范畴等价

首先我们说明几个记号. 设 T 是一阶语言 L 上的 Horn 理论, 记 $\Sigma(T)$ 为 T 的标记集, 记 B_T 为关于 T 的 Herbrand 基, 记 M_T 为 T 的最小 Herbrand 模型, 本节仅考虑至少含有一条事实, 且 $\Sigma(M_T) = \Sigma(T)$ 的 Horn 理论. 有关范畴和 Horn 理论的基本概念和结论参见[1, 3].

定义 1: Horn 理论的保真变换

设 T_1, T_2 是两个 Horn 理论, T_1 到 T_2 的(保真)变换 $t: T_1 \rightarrow T_2$ 是 B_{T_1} 到 B_{T_2} 的映射 $t: B_{T_1} \rightarrow B_{T_2}$ 满足以下条件: 若 $p \in B_{T_1}$, 且 $T_1 \vdash p$, 则 $T_2 \vdash t(p)$.

定义(结论)2: Horn 理论范畴 C_{HT} 定义如下:

$obj_{C_{HT}} = \{T \mid T \text{ 是 } L \text{ 上的 Horn 理论}\}$

$arr_{C_{HT}} = \{t \mid t \text{ 是 Horn 理论的保真变换}\}$

定义 3: Herbrand 解释上的同态映射

设 B_1, B_2 是 L 的两个 Herbrand 解释, B_1 到 B_2 上的同态映射 $h: B_1 \rightarrow B_2$ 是 B_{B_1} 到 B_{B_2} 的映射 $h: B_{B_1} \rightarrow B_{B_2}$ 满足以下条件: $\forall p \in B_1, h(p) \in B_2$.

定义(结论)4: Herbrand 解释范畴 C_{HB} 定义如下:

$obj_{C_{HB}} = \{B \mid B \text{ 是 } L \text{ 的非空的 Herbrand 解释}\}$

$arr_{C_{HB}} = \{h \mid h \text{ 是 Herbrand 解释的同态映射}\}$

定理: C_{HT} 与 C_{HB} 等价

证明要点: 我们只要找到 C_{HT} 与 C_{HB} 之间的等价函子.

$F: C_{HB} \rightarrow C_{HT}$ 定义如下:

$\forall B \in obj_{C_{HB}} \quad F(B) = B$

$\forall h: B_1 \rightarrow B_2 \in arr_{C_{HB}} \quad F(h) = h$

$U: C_{HT} \rightarrow C_{HB}$ 定义如下:

$\forall T \in obj_{C_{HT}} \quad U(T) = M_T$

$\forall t: T_1 \rightarrow T_2 \in arr_{C_{HT}} \quad U(t) = t$

容易验证 F, U 是函子. $\epsilon: FU \rightarrow id$ 和 $\eta: id \rightarrow UF$ 分别定义如下: $\epsilon(T): FU(T) \rightarrow T$ 为 B_T 上的单位映射, $\eta(B): B \rightarrow UF(B)$ 为 B_B 上的单位映射. 容易看出 ϵ, η 是两个同构的自然变换. 所以 F, U 是等价函子. 因此 C_{HT} 与 C_{HB} 等价.

§ 3. 方法的推广

形式化软件开发和人工智能程序设计的一个共同特点是这两种活动常常以规范(或说明性的程序)为作用对象, 研究其进化, 求精、变换, 修正和使用, 这些操作可称为元级操作, 以范畴论为工

具的方法显示了在描述元级操作的语义及其与元级对象的语义关系的潜力. 上一节我们建立 Horn 理论与保真变换在其模型语义上的意义. 下面我们把这种方法推广和一般化.

设 L 是一逻辑系统. L 的理论记为 T_L , L 的结构记为 S_L . L 上的关系 R_L 是 L 理论上的关系. 如果 C_T 是范畴, 其中:

$$objC_T = \{T_L \mid T_L \text{ 是 } L \text{ 上的理论}\}$$

$$arrC_T = \{f_{R_L}: T_L' \rightarrow T_L'' \mid T_L' R_L T_L''\}$$

则称 R_L 满足范畴条件.

如果存在一个以 S_L 为对象的范畴 C_S 与 C_T 等价, 即存在等价函子 $F: C_S \rightarrow C_T, U: C_T \rightarrow C_S$, 则称 R_L 有范畴语义, 即 $arrC_S$, 且称 $U(T_L)$ 是 T_L 的语义指称, $f: T_L' \rightarrow T_L''$ 的语义为 $U(f)$. 根据这个定义, 我们看到 Horn 理论上的保真关系有范畴语义.

概括起来, 用范畴论的方法讨论元级描述的语义有以下几个要点:

- 观点: 把规范或程序视为理论, 把作用在规范或程序之上的某种元级操作视为理论之间的一种关系;

- 问题: 理论的模型指称如何构造, 理论之间的关系如何指称其模型之间的关系;

- 途径:

- a. 把理论作为范畴的对象, 理论之间的关系作为对象之间的态射, 建立理论的范畴 C_T ;

- b. 以理论的模型或结构为对象建立与 C_T 等价的结构范畴 C_S , 及其相应的等价函子: $F: C_S \rightarrow C_T$ 和 $U: C_T \rightarrow C_S$;

- c. $U(T)$ 是 T 的模型语义, $U(t)$ 是 $t: T_1 \rightarrow T_2$ 的语义.

致谢: 本文得益于陈火旺教授的启发, 以及王兵山教授, 何志强副教授主持的高阶范畴逻辑讨论班.

参考文献

- [1] J. Lambek, P. T. Scott, Introduction to Higher Order Categorical Logic, Cambridge University Press, 1988.
- [2] C. J. Hogger, Programming Environment, ECAI88.
- [3] J. W. Lloyd, Foundations of Logic Programming, Springer-Verlay, 1984.