第4卷第2期 1993年4月
软件学报 JOURNAL OF SOFTWARE
Vol. 4, No. 2 Apr., 1993

压缩路径序与重写系统的结构测度

林凯 孙永强 陆汝占

(上海交通大学计算机系,上海 200030)

THE COMPRESSED PATH ORDERING AND THE STRUCTURE MEASURE OF TERM REWRITING SYSTEM

Lin Kai, Sun Yongqiang and Lu Ruzhan

(*Department of Computer Science, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030)

Abstract The structure measure is very important to prove the confluence of term rewriting system. This paper discusses the effective definition approach of structure measure. For this, the notion of compressed path ordering is introduced. It is easy to show whether or not a compressed path ordering is the structure measure of given term rewriting system.

摘要 结构测度对于判别重写系统的合流性是极为重要的. 本文着重研究结构测度的有效定义方法. 本文引入了压缩路径序概念. 只要给出符号集上了拟序关系和相对该拟序关系协调的压缩结构,即可方便地生成良拟序的压缩路径序,同时可以有效地检查这一路径压缩序是否为给定重写系统的结构测度. 本文提出的方法有力地支持了在非终止条件下对重写系统合流性的判别.

§1. 概 述

合流性是有关重写系统的一个重要性质,一般的计算系统必须具有合流性. 计算机软件和代数研究中的许多问题都与合流性有着十分密切的关系. 然而,确定重写系统的合流性却是一个十分困难的问题.

在原有的重写系统理论中,对于合流性的研究是相当有限的[1]. 一般地,终止的重写系统是否具有合流性是可以判定的[2],而对于非终止的重写系统,仅仅证明了正则重写系统具有合流性,此外只有少数结论可应用于一些特殊情况[3][4][5]. 对于终止的重写系统和正则重写系统及其变种的研究是现有重写系统理论的主要部分之一.

如何确定一般的重写系统具有合流性是重写系统理论长期悬而未决的问题. 我们

本文1990年12月21日收到,1991年3月11日定稿. 本文受"八五"、八六三攻关项目、国家自然科学基金资助. **林凯**,讲师,1987年硕士毕业于上海交通大学,主要研究领域为定理证明,重写技术及理论. **孙永强**,教授,博士导师,主要从事新型语言,计算理论方面的研究工作. **陆汝占**,教授,主要研究领域为定理证明、方程式语言、计算理论.

在[7][8]中深入研究了这一问题并得到了突破性的结果，我们给出了判别一般重写系统是否具有合流性的有效方法.具体地说，我们引入了重写系统的结构测度概念，并在此基础上定义了一类实用而且广泛出现的重写系统——相对伪线性重写系统.对于下面例1.1中定义的重写系统 R_1 和 R_2，R_1 即为相对 R_2 的伪线性重写系统.

例 1.1：R_1 ： $if(x,if(x,y,z),v)\to if(x,y,v)$ (1)

$if(x,y,if(x,z,v))\to if(x,y,v)$ (2)

$f(if(x,y,z))\to if(x,f(y),f(z))$ (3)

R_2 ： $if(T,x,y)\to x$ (4)

$if(F,x,y)\to y$ (5)

$f(g(x))\to g(f(g(x)))$ (6)

我们证明了如下定理：

定理：如果 R_1 是相对 R_2 的伪线性重写系统，则 R_2 具有合流性蕴含 $R_1\cup R_2$ 具有合流性.

由于 R_2 的正则性，从该定理可直接得到例1.1中 $R_1\cup R_2$ 的合流性.特别注意，$R_1\cup R_2$ 是非终止的.即应用上述定理可在非终止性的条件下直接证明许多重写系统的合流性.但是，如果欲证明 R_1 是相对 R_2 的伪线性重写系统，则首先应对 $R_1\cup R_2$ 构造一个结构测度.F上重写系统R的结构测度是T(F)上的一个良基拟序关系≥，并且满足：(1)若 $M\underset{R}{\to}N$，则 $M\geq N$；(2)$f(M_1,\cdots,M_n)\geq M_i$，$1\leq i\leq n$；(3)设 $l\to r$ 是R中的非左线性重写规则，若x是 l 中某个多次出现的变量，设 $l=c[x,\cdots,x]$，这里x的多个出现对应 l 中x中所有的出现，则对任意 M_i，$1\leq i\leq n$，存在j，使得 $l[M_1,\cdots,M_n]>M_j$.

显然，基于著名的kruskal同态嵌入序的递归路径序[8]和其它各种用于证明终止性的序构造方法并不完全适合于构造结构测度.

本文首先引入了符号集的压缩结构，然后在此基础上引入了重要的压缩路径序.只要给定符号集上的拟序关系和相对该拟序关系协调的压缩结构，即可方便地生成特定的压缩路径序，并可直接检查它们是否为特定重写系统的结构测度.这一方法有力地支持了相对伪线性重写系统中的合流性判别法.

本文未加定义和说明的符号和概念参见[5].

§2. 压缩路径序及其良拟序性

设≥是A上的两元关系.≥是拟序关系，当且仅当，≥具有自反性和传递性.我们用 $a\leq b$ 表示 $b\geq a$，$a>b$ 表示 $a\geq b$ 且没有 $b\geq a$，$a\approx b$ 表示 $a\geq b$ 且 $b\geq a$.A上的拟序关系≥称为是良拟序的，当且仅当，对于任意A中元素的无穷序列 $a_0,a_1,\cdots$，必存在i和j使得 $i<j$ 且 $a_i\leq a_j$.显然，如果 $\geq_1$ 和 $\geq_2$ 是拟序关系且 $\geq_1\subseteq\geq_2$，则 $\geq_1$ 是良拟序的蕴含 $\geq_2$ 也是良拟序的.当然，良拟序必为良基的拟序，即不存在无穷的严格递降的关系链.

设F是非空的算子集合，对于任意 $n\in Nat$，设Fn表示F中n元算子全体构成的集合.设V是变元的集合，且T(F,V)是由F和V构成的项集合.

为方便起见，我们将总假定F和V是有限集合.令 $\bar{n}=\{1,\cdots,n\}$.

定义 2.1：设≥是T(F,V)上的拟序关系，≥称为拟化简序，如果≥满足下列条件：

(1)对于任意 $f\in Fn$ 和任意 $i\in\bar{n}$，$f(M_1,\cdots,M_n)\geq M_i$；

(2)如果 $f\in Fn$ 且 $M_i\geqslant N_i, i\in\overline{n}$,则 $f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant f(N_1,\cdots,N_n)$.

引理 2.2:如果$\geqslant$是 $T(F,V)$上的拟化简序,则$\geqslant$是良拟序关系.

证明:在 F 和 V 是有限的情况下,F 上的恒等关系诱导的同态嵌入序是良拟序的,且$\geqslant$包含这一同态嵌入序,于是,$\geqslant$是良拟序的. 证毕.

设 $Q(F,V)$是 $T(F,V)$上所有拟序关系构成的集合.不难发现,在集合的包含关系$\subseteq$之下,$Q(F,V)$构成一个完备的偏序集,显然,恒等关系是 $Q(F,V)$中的最小元,对于任意有向集$\{\geqslant_i|i\in I\}$,$\vee\{\geqslant_i|i\in I\}=\cup\{\geqslant_i|i\in I\}$.

事实上,$(Q(F,V),\subseteq)$是一个完备格,但我们在本文中仅用到完备偏序集的性质.

定义 2.3:设τ是 $Q(F,V)$上的映射.即 $\tau:Q(F,V)\rightarrow Q(F,V)$,$\tau$称为项单调的,当且仅当,对于任意 $f\in Fn$ 和任意$\geqslant\in Q(F,V)$,$M_i\geqslant N_i, i\in\overline{n}$ 蕴含 $f(M_1,\cdots,M_n)\tau(\geqslant)f(N_1,\cdots,N_n)$.

定义 2.4:F 的压缩结构 Pr 是 F 到自然数幂集 2^{Nat}的一个映射,并且满足:对于任意 $f\in Fn, n\in Nat, Pr(f)\subseteq\overline{n}$.

定义 2.5:设$\geqslant_F$是 F 上的拟序关系,Pr 是 F 的压缩结构.称 Pr 相对$\geqslant_F$协调,当且仅当,对于任意 $f,g\in F$,如果 $f\geqslant_F g$ 且 $Pr(g)=\phi$,则 $Pr(f)=\phi$.

定义 2.6:设$\geqslant_F$是 F 上的拟序关系,Pr 是相对$\geqslant_F$协调的压缩结构,τ是 $Q(F,V)$上项单调的连续映射.$\geqslant_F$,Pr 和τ诱导的压缩路径映射 $\delta:Q(F,V)\rightarrow Q(F,V)$定义如下:对于任意$\geqslant\in Q(F,V)$,设 $\delta(\geqslant)=\geqslant_1$. $M\geqslant_1 N$,当且仅当下列条件之一满足:

(1)$M=N\in V$;

(2)$M=f(M_1,\cdots,M_n)$且存在 $i\in\overline{n}$,使得 $M_i\geqslant_1 N$;

(3)$M=f(M_1,\cdots,M_n), N=g(N_1,\cdots,N_m), Pr(g)\neq\phi$ 或 $f>_F g$,并且对于任意 $i\in Pr(g)$,$M\geqslant_1 N_i$,同时,对于任意 $i\in\overline{m}\backslash Pr(g)$,$M>_1 N_i$;

(4)$M=f(M_1,\cdots,M_n), N=g(N_1,\cdots,N_m), f\approx_F g$ 且 $Pr(g)=\phi$,同时 $M\tau(\geqslant)N$,且对于任意 $i\in\overline{m}$,$M>_1 N_i$.

这里需要证明δ的定义是合式的,即对于任意$\geqslant\in Q(F,V)$,$\delta(\geqslant)\in Q(F,V)$.设 $\delta(\geqslant)=\geqslant_1$.

首先,我们证明$\geqslant_1$具有自反性,即对于任意 $M\in T(F,V)$,$M\geqslant_1 M$.

归纳于 M 的结构.

如果 $M\in V$,则由定义 2.6,$M\geqslant_1 M$.

如果 $M=f(M_1,\cdots,M_n)$,则可分为如下两种情况:

情况 1:$Pr(f)=\phi$.显然,$M\tau(\geqslant)M$.由归纳假设,对于任意 $i\in\overline{n}$,$M_i\geqslant_1 M_i$.又由定义 2.6(2),$M\geqslant_1 M_i$.显然,$M_i\geqslant_1 M$ 不成立.故由定义 2.5(4),$M\geqslant_1 M$.

情况 2:$Pr(f)\neq\phi$.类似情况 1,不难证明,对于任意 $i\in Pr(f)$,$M\geqslant_1 M_i$,且对于任意 $i\in\overline{n}\backslash Pr(f)$,$M>_1 M_i$.由定义 2.6(3),$M\geqslant_1 M$.

由此,$\geqslant_1$具有自反性.

其次,我们将证明$\geqslant_1$具有传递性,即对于任意 $T(F,V)$中的项 M_1,M_2 和 M_3,如果 $M_1\geqslant_1 M_2$ 且 $M_2\geqslant_1 M_3$,则 $M_1\geqslant_1 M_3$.

归纳于 M_1,M_2,M_3 结构组成的字典序.分为如下四种情况:

(1)如果 $M_1=M_2\in V$,则显然 $M_1\geqslant_1 M_3$.

(2)如果 $M_1=f_1(M_1^1,\cdots,M_{n_1}^1)$且存在 $i\in\overline{n}_1$,使得 $M_i^1\geqslant_1 M_2$,则由归纳假设,$M_i^1\geqslant_1 M_3$. 再由定义 2.6(2),$M_1\geqslant_1 M_3$.

(3)如果 $M_i=f_i(M_1^i,\cdots,M_{n_i}^i)$,$i\in\{1,2\}$,且 $Pr(f_2)\neq\phi$ 或 $f_1>_F f_2$,同时对于任意 $i\in Pr(f_2)$,$M_1\geqslant_1 M_i^2$,同时,对于任意 $i\in\overline{n}_2\backslash Pr(f_2)$,$M_1>_1 M_i^2$,则又可分为如下三种子情况:

(a)如果存在 $j\in\overline{n}_2$,使得 $M_j^2\geqslant_1 M_3$,则由归纳假设,$M_1\geqslant_1 M_3$.

(b)如果 $M_3=f_3(M_1^3,\cdots,M_{n_3}^3)$,且 $Pr(f_3)\neq\phi$ 或 $f_2>_F f_3$,同时对于任意 $i\in Pr(f_3)$,$M_2\geqslant_1 M_i^3$,同时,对于任意 $i\in\overline{n}_3\backslash Pr(f_3)$,$M_2>_1 M_i^3$. 当然,由归纳假设,对于任意 $i\in Pr(f_3)$,$M_1\geqslant_1 M_i^3$,同时对于任意 $i\in\overline{n}_3\backslash Pr(f_3)$,$M_1>_1 M_i^3$. 如果 $Pr(f_3)\neq\phi$,则由定义 2.6(3),立刻有 $M_1\geqslant_1 M_3$. 否则 $Pr(f_3)=\phi$,且 $f_2>_F f_3$,由相对协调性,$Pr(f_2)=\phi$,故 $f_1>_F f_2$ 成立,故 $f_1>_F f_3$. 由定义 2.6(3),$M_1\geqslant_1 M_3$.

(c)如果 $M_3=f_3(M_1^3,\cdots,M_{n_3}^3)$且 $f_2\approx_F f_3$,$Pr(f_3)=\phi$,同时满足 $M_2\tau(\geqslant)M_3$,且对于任意 $i\in\overline{n}_3$,$M_2>_1 M_i^3$,则由归纳假设,$M_1>_1 M_i^3$,同时注意到 $f_1>_F f_3$,由定义 2.6(3),$M_1\geqslant_1 M_3$.

(4)如果 $M_i=f_i(M_1^i,\cdots,M_{n_i}^i)$,$i\in\{1,2\}$,$f_1\approx_F f_2$,且 $Pr(f_2)=\phi$,同时,$M_1\tau(\geqslant)M_2$,且对于任意 $i\in\overline{n}_2$,$M_1>_1 M_i^2$,则又可分为如下三种情况:

(a)存在 $j\in\overline{n}_2$,使得 $M_j^2\geqslant_1 M_3$. 由归纳假设,$M_1\geqslant_1 M_3$.

(b)$M_3=f_3(M_1^3,\cdots,M_{n_3}^3)$,且 $Pr(f_3)\neq\phi$ 或 $f_2>_F f_3$,同时对于任意 $i\in Pr(f_3)$,$M_2\geqslant_1 M_i^3$,对于任意 $i\in\overline{n}_3\backslash Pr(f_3)$,$M_2>_1 M_i^3$. 由归纳假设,可直接有:对于任意 $i\in Pr(f_3)$,$M_1\geqslant_1 M_i^3$,同时对于任意 $i\in\overline{n}_3\backslash Pr(f_3)$,$M_1>_1 M_i^3$. 如果 $Pr(f_3)\neq\phi$,则由定义 2.6(3),$M_1\geqslant_1 M_3$. 否则,$f_2>_F f_3$ 同时 $f_1\approx_F f_2$,故 $f_1>_F f_3$,同样由定义 2.6(3),$M_1\geqslant_1 M_3$.

(c)$M_3=f_3(M_1^3,\cdots,M_{n_3}^3)$,$f_2\approx_F f_3$ 且 $Pr(f_3)=\phi$,同时,$M_2\tau(\geqslant)M_3$,且对于任意 $i\in\overline{n}_3$,$M_2>_1 M_i^3$. 由归纳假设,对于任意 $i\in\overline{n}_3$,$M_1>_1 M_i^3$. 又注意到 $f_1\approx_F f_3$,$Pr(f_3)=\phi$,以及由 $\tau(\geqslant)$的传递性得到的 $M_1\tau(\geqslant)M_3$,于是由定义 2.6(4),$M_1\geqslant_1 M_3$.

至此,我们证明了$\geqslant_1$ 具有传递性. 因而$\geqslant_1$ 是一个拟序关系,即压缩路径映射 δ 的定义是合式的. 证毕.

下面的引理进一步刻划了 δ 的性质.

引理 2.7:$\geqslant_F$,Pr 和 τ 诱导的路径压缩映射 δ 是 $Q(F,V)$上的连续映射.

证明:首先,我们证明 δ 是单调映射,即如果$\geqslant'\subseteq\geqslant''$,则 $\delta(\geqslant')\subseteq\delta(\geqslant'')$. 令 $\delta(\geqslant')=\geqslant_1$,$\delta(\geqslant'')=\geqslant_2$. 归纳于 M,N 结构的字典序. 如果 $M\geqslant_1 N$ 由定义 2.6(1)或(2)或(3)决定,则显然,$M\geqslant_2 N$. 如果 $M\geqslant_1 N$ 由定义 2.6(4)决定,由于 τ 是连续映射,故 $\tau(\geqslant')\subseteq\tau(\geqslant'')$,立刻由归纳假设和定义 2.6(4),可知 $M\geqslant_2 N$.

其次,设$\{\geqslant_i|i\in I\}$是 $Q(F,V)$的一个有向集,我们来证明$\bigcup\{\delta(\geqslant_i)|i\in I\}=\delta(\bigcup\{\geqslant_i|i\in I\})$. 由于 δ 是单调的,因此,对于任意 $i\in I$,$\delta(\geqslant_i)\subseteq\delta(\bigcup\{\geqslant_i|i\in I\})$,于是,$\bigcup\{\delta(\geqslant_i)|i\in I\}\subseteq\delta(\bigcup\{\geqslant_i|i\in I\})$. 令$\geqslant_1=\delta(\bigcup\{\geqslant_i|i\in I\})$,$\geqslant_2=\bigcup\{\delta(\geqslant_i)|i\in I\}$. 我们归纳于 M,N 结构组成的字典序,证明$\geqslant_1\subseteq\geqslant_2$. 如果 $M\geqslant_1 N$ 是由定义 2.6(1)或(2)或(3)决定,则显然,$M\geqslant_2 N$. 如果 $M\geqslant_1 N$ 由定义 2.6(4)决定,即 $M=f(M_1,\cdots,M_n)$,$N=g(N_1,\cdots,N_m)$,$f\approx_F g$ 且 $Pr(g)=\phi$,同时 $M\tau(\bigcup\{\geqslant_i|i\in I\})N$,且对于任意 $i\in\overline{m}$,$M>_1 N_i$. 由于 τ 是连续映射,故 $\tau(\bigcup\{\geqslant_i|i\in I\})=\bigcup\{\tau$

$(\geqslant_i)|i\in I\}$，从而可知，存在 $k\in I, M\tau(\geqslant_k)N$. 由归纳假设，对于任意 $i\in\overline{m}, M>_2N_i$. 所以由定义 2.6(4)，$M\delta(\geqslant_k)N$，从而 $M\geqslant_2N$. 证毕.

定义 2.8：设 $\geqslant_F$ 是 F 上的拟序关系，Pr 是相对 $\geqslant_F$ 协调的压缩结构，τ 是 Q(F,V)上项单调的连续映射. $\geqslant_F$，Pr 和 τ 诱导的压缩路径序 $\geqslant_{PP}$ 定义为：$\geqslant_F$，Pr 和 τ 诱导的压缩路径映射 δ 的最小不动点.

由引理 2.7δ 的连续性和 kleene 定理，可知 δ 的最小不动点是唯一存在的. $\geqslant_{PP}$ 可明显地等价定义如下：$M\geqslant_{PP}N$，当且仅当，如下条件之一成立：

(1)$M=N\in V$；

(2)$M=f(M_1,\cdots,M_n)$ 且存在 $i\in\overline{n}$，使得 $M_i\geqslant_{PP}N$；

(3)$M=f(M_1,\cdots,M_n), N=g(N_1,\cdots,N_m), Pr(g)\neq\phi$ 或 $f>_Fg$，并且对于任意 $i\in Pr(g)$，$M\geqslant_{PP}N_i$，同时，对于任意 $i\in\overline{m}\backslash Pr(g), M>_{PP}N_i$；

(4)$M=f(M_1,\cdots,M_n), N=g(N_1,\cdots,N_m), f\approx_Fg$ 且 $Pr(g)=\phi$，同时 $M\tau(\geqslant_{PP})N$，且对于任意 $i\in\overline{m}, M>_{PP}N_i$.

引理 2.9：$\geqslant_F$，Pr 和 τ 诱导的压缩路径序 $\geqslant_{PP}$ 是拟化简序.

证明：对于任意 $f\in Fn, n\in Nat$，由 $\geqslant_{PP}$ 定义中的(2)，即有 $f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant_{PP}M_i, i\in\overline{n}$.

如果 $f\in Fn$ 且 $M_i\geqslant_{PP}N_i, i\in\overline{n}$，则可分为如下两种情况：

情况 1：$Pr(f)\neq\phi$. 显然，对于任意 $i\in\overline{n}, f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant_{PP}M_i$. 同时，由 $\geqslant_{PP}$ 的定义，显然，对于任意 $i\in\overline{n}\backslash Pr(f), f(M_1,\cdots,M_n)>_{PP}M_i$. 无疑，$f(M_1,\cdots,M_n)>_{PP}N_i, i\in\overline{n}\backslash Pr(f)$，否则，$N_i\geqslant_{PP}f(M_1,\cdots,M_n)>M_i$，与 $M_i\geqslant_{PP}N_i$ 矛盾. 于是，由定义可知 $f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant_{PP}f(N_1,\cdots,N_n)$.

情况 2：$Pr(f)=\phi$. 当然，$f(M_1,\cdots,M_n)\tau(\geqslant_{PP})f(N_1,\cdots,N_n)$，这是因为 τ 是项单调的. 对于任意 $i\in\overline{n}$，显然，$f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant_{PP}M_i\geqslant_{PP}N_i$，注意 $M_i\geqslant_{PP}f(M_1,\cdots,M_n)$ 不成立，故 $f(M_1,\cdots,M_n)>N_i$，由 $\geqslant_{PP}$ 定义(4)，$f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant_{PP}f(N_1,\cdots,N_n)$. 证毕.

推论 2.10：$\geqslant_F$，Pr 和 τ 诱导的压缩路径序 $\geqslant_{PP}$ 是良拟序关系.

定义 τ_1,τ_2：$Q(F,V)\rightarrow Q(F,V)$ 如下：对于任意 $\geqslant\in Q(F,V)$，$M_1\tau_1(\geqslant)M_2$，当且仅当，或者 $M_1=M_2\in V$，或者 $M_i=f_i(M_1^i,\cdots,M_{ni}^i), i\in\{1,2\}$ 且 $\{M_1^1,\cdots,M_{n1}^1\}\geqslant\{M_1^2,\cdots,M_{n2}^2\}$(即 $\geqslant$ 诱导的多重集序). $M_1\tau_2(\geqslant)M_2$，当且仅当，或者 $M_1=M_2\in V$，或者 $M_i=f_i(M_1^i,\cdots,M_{ni}^i), i\in\{1,2\}$ 且 $<M_1^1,\cdots,M_{n1}^1>\geqslant<M_1^2,\cdots,M_{n2}^2>$.

不难证明：τ_1,τ_2 都是 Q(F,V)上的项单调的连续函数. 则 $\geqslant_F$，Pr 和 τ_1 诱导的压缩路径序称为压缩递归路径序，$\geqslant_F$，Pr 和 τ_2 诱导的压缩路径序称为压缩字典路径序.

§ 3. 压缩路径序与重写系统的结构测度

设 R 是 F 上的重写系统. 令 $l(R)$ 是 R 中左线性重写规则全体构成的集合，$P(R)=R\backslash l(R)$. 令 $RT(R)=\{l|l\rightarrow r\in R\}$，$PP(R)=RT(P(R))$. 设 $l\rightarrow r\in R$，则 $NV(l)=\{x\in v(l)\,\|\,occ(l,x)|>1\}$.

定义 3.1：设 $\geqslant$ 是 T(F,V)上良基的拟序关系. $\geqslant$ 称为 R 的结构测度，当且仅当，$\geqslant$ 满足如下条件：

(1)对于任意 $f\in Fn$ 和任意 $i\in\overline{n}, f(M_1,\cdots,M_n)\geqslant M_i$；

(2)$M \xrightarrow[R]{} N$ 蕴含 $M \geqslant N$.

(3)对于任意 $l \to r \in P(R)$,任意强代换 θ(参见[6])和任意 $x \in NV(l)$,存在 $w \in occ(l,x)$,使得 $\theta(M) > \theta(M)/w$.

对于压缩路径序,有如下重要的性质:

引理 3.2:设 $w \cdot i \in O(M)$,这里 $i \in Nat$ 且 $M \in T(F,V)$,且 $M(w) = f \in Fn$,$i \notin Pr(f)$,则对于 $\geqslant_F$,Pr 和 τ 诱导的压缩路径序 $\geqslant_{PP}$,必有 $M >_{PP} M/w$.

证明:归纳于 $M[w \leftarrow \square]$ 的结构.

如果 $M[w \leftarrow \square] = f(M_1, \cdots, M_{i-1}, \square, M_{i+1}, \cdots, M_n)$,因为 $i \notin Pr(f)$,所以由 $\geqslant_{PP}$ 的定义,可知 $f(M_1, \cdots, M_n) >_{PP} M_i$.

如果 $M[w \leftarrow \square] = f(M_1, \cdots, M_{k-1}, M_k[w/k \leftarrow \square], M_{k+1}, \cdots, M_n]$,且 $k \in Nat$,$k < w$,由归纳假设,$M_k >_{PP} M_k/(w/k)$,而 $M \geqslant_{PP} M_k$,故 $M >_{PP} M_k/(w/k) = M/w$. 证毕.

定理 3.3:设 $\geqslant_{PP}$ 是 $\geqslant_F$,Pr 和 τ 诱导的压缩路径序,R 是 F 上的重写系统. 如果 $\geqslant_{PP}$ 满足下列条件:

(1)对于任意 $l \to r \in R$,$l \geqslant_{PP} r$;

(2)对于任意 $l \to r \in P(R)$ 和任意 $x \in NV(l)$,存在 $w \in occ(l,x)$,$w' \in o(l)$ 和 $i \in Nat$,使得 $w' \cdot i \leqslant w$,且 $l(w') = f \in Fn$ 且 $i \notin Pr(f)$. 则 $\geqslant_{PP}$ 是 R 的结构测度.

证明可直接由 $\geqslant_{PP}$ 的定义和引理 3.2 得到.

例 3.4:我们用定理 3.3 为例 1.1 中的 $R_1 \cup R_2$ 构造一个结构测度. 设 $\geqslant_F$ 定义为:$f >_F if$,Pr 定义为:$Pr(if) = Pr(f) = \phi$,$Pr(g) = \{1\}$,明显地,Pr 是相对 $\geqslant_F$ 协调的压缩结构,则 $\geqslant_F$,Pr 所诱导的压缩递归路径序 $\geqslant_{PP}$ 是 $R_1 \cup R_2$ 的结构测度,这可由定理 3.3 直接得到,我们不难一一验证,对于任意 $l \to r \in R_1 \cup R_2$,$l \geqslant_{PP} r$. 这里我们仅仅检查规则(3)和(6).

欲证明 $f(if(x,y,z)) \geqslant_{PP} if(x,f(y),f(z))$,因为 $f >_F if$,由 $\geqslant_{PP}$ 定义(3),只需证明:$f(if(x,y,z)) >_{PP} x$,$f(if(x,y,z)) \geqslant_{PP} f(y)$,$f(if(x,y,z)) >_{PP} f(z)$. 由 $\geqslant_{PP}$ 定义(2),$f(if(x,y,z)) \geqslant_{PP} x$,但是,$x \geqslant_{PP} f(if(x,y,z))$ 不成立. 故 $f(if(x,y,z)) >_{PP} x$. 又由定义 $\geqslant_{PP}$ 的(3),欲证 $f(if(x,y,z)) >_{PP} f(y)$,$f(if(x,y,z)) >_{PP} f(z)$,只需证明 $f(if(x,y,z)) >_{PP} y$,$f(if(x,y,z)) >_{PP} z$,同时,$f(y) \geqslant_{PP} f(if(x,y,z))$ 不成立,且 $f(z) \geqslant_{PP} f(if(x,y,z))$ 不成立. $f(if(x,y,z)) >_{PP} y$ 和 $f(if(x,y,z)) >_{PP} z$ 可由 $\geqslant_{PP}$ 定义直接得到. 如果 $f(y) \geqslant_{PP} f(if(x,y,z))$,$f(z) \geqslant_{PP} f(if(x,y,z))$,则由定义可知,应有 $f(y) >_{PP} if(x,y,z)$,$f(z) >_{PP} if(x,y,z)$,进而应有 $f(y) >_{PP} x$,$f(y) >_{PP} y$,$f(y) >_{PP} z$ 和 $f(z) >_{PP} x$,$f(z) >_{PP} y$,$f(z) >_{PP} z$,这是不可能的. 故有 $f(if(x,y,z)) \geqslant_{PP} if(x,f(y),f(z))$.

欲证 $f(g(x)) \geqslant_{PP} g(f(g(x)))$,由定义,只需证明 $f(g(x)) \geqslant_{PP} f(g(x))$,显然成立.

注意,按通常的递归路径序,显然只有 $g(f(g(x))) >_{rpo} f(g(x))$.

例 3.5:给定重写系统 R 如下:

$$R:\quad f(x,x) \to a \qquad (1)$$

$$g(x) \to f(x,g(x)) \qquad (2)$$

$$c \to g(c) \qquad (3)$$

则不存在 $\geqslant_F$ 和 Pr 诱导的压缩递归路径序 $\geqslant_{PP}$,使得 $\geqslant_{PP}$ 是 R 的结构测度. 否则,设 $\geqslant_{PP}$ 存在. 由规则(1),可知 $Pr(f) \neq \{1,2\}$. 由规则(2),有 $Pr(f) = \{2\}$ 或 $g >_F f$,且同时应有 $g(x) >_{PP} x$,故可得到 $Pr(g) = \phi$. 因而 $g(c) >_{PP} c$,从而 $c \geqslant_{PP} g(c)$ 不可能成立.

参考文献

[1]N. Dershowitz, and J—P Jouannand, Rewrite System, Handbook of Theoretical Computer Science, Ch. 6, Vol. I, North—Holland, 1990.

[2]G. Huet, and D. Oppen, Equations and Rewrite Rules: A Survey, in Formal Languages: Perspectives and Open Problem, R. Book, ed. Academic Press, 1990.

[3]G. Huet, Confluent Reduation: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems, JACM27: 3, 797—821, 1980.

[4]J. Klop, Combinatory Reducation System, Ph. D. Thesis, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1980.

[5]Y. Toyama, On the Church—Rosser Property for the Direct Sum of Term Rewriting System, JACM35: 2, 1987.

[6]N. Dershowitz, Termination of Rewriting, Journal of Symbolic Computation, 3, 1987.

[7]林凯,孙永强,半正则重写系统及其合流性,《软件学报》,1992 年第 4 期.

[8]林凯,孙永强,半线性重写系统及其合流性,《中国科学》,1993 年第 6 期.