第4卷第1期
1993年2月

软 件 学 报
JOURNAL OF SOFTWARE

Vol. 4, No. 1
Feb., 1993

输入调解法和单元调解法在Horn集上的完备性

欧阳丹彤 孙吉贵 刘叙华

(吉林大学计算机科学系,长春 130023)

COMPLETENESS OF INPUT PARAMODULATION AND UNIT PARAMODULATION ON HORN SET

Ouyang Dantong, Sun Jigui and Liu Xuhua

(*Department of Computer Science, Jilin University, Changchun* 130023)

Abstract Here we have proved the lifting lemma of paramodulation and the completeness of input paramodulation on Horn set, and then we have also proved the completeness of unit paramodulation on Horn set.

摘要 本文证明了调解法的提升引理,以及输入调解法对Horn集的完备性,进而证出了单元调解法对Horn集的完备性.

§1. 前 言

在定理机器证明中,等词起了非常重要的作用.使用等词,许多定理能够很容易被符号化.

等词有许多特性.如反身性,对称性,传递性和等量替换等.如果只用归结方法,每次遇到含有等词的子句时,都得引入描述等词上述特性的公理集.这种方法是非常笨拙的,它不仅使得输入子句集中子句数大大增加,而且也极易促使大量无用子句的产生,这显然非常影响归结的效率.为了解决这个问题人们提出了许多方法,调解法(paramodulation)就是其中的一种.为了进一步提高效率,许多学者对这一方法进行了改进[2].

本文推广了前人的结果,提出了输入调解法对Horn集是完备的并给出了证明,进而又证出了单元调解法对Horn集的完备性.

§2. 一些定义

定义 2.1:设 C_1 和 C_2 是两个无公共变元的子句(称为亲本子句),若 C_1 为 $L[t]\vee C_1'$,C_2

本文1990年7月10日收到,1991年1月10日定稿.本课题受国家自然科学基金和国家教委博士点基金支持.作者**欧阳丹彤**,1990年毕业于吉林大学,现为硕士研究生,主要研究领域为定理机器证明.**孙吉贵**,1988年硕士毕业于吉林大学,现为博士研究生,主要研究领域为定理机器证明.**刘叙华**,教授,博士导师,主要研究领域为定理机器证明与自动推理.

为 $r=s\vee C_2'$，其中 $L[t]$ 是包含项 t 的文字，C_1' 和 C_2' 是子句，若 t 和 r 有 $mgu\sigma$，则子句

$$L^{\sigma}[s^{\sigma}]\vee C_1'^{\sigma}\vee C_2'^{\sigma}$$

称为 C_1 和 C_2 的二元调解式(paramodulant). 其中 $L^{\sigma}[s^{\sigma}]$ 表示用 s^{σ} 替换 L^{σ} 中 t^{σ} 的一次单独出现而得的结果. L 和 $r=s$ 叫调解文字. C_1,C_2 及它们的因子形式的二元调解式统称调解式.

定义 2.2：如果进行调解的二亲本子句中有一个是输入子句，则称这种调解为输入调解.

定义 2.3：如果进行调解的二亲本子句中有一个是单元子句或者是一个子句的单元因子，则称这种调解为单元调解.

定义 2.4：使用输入(单元)归结和输入(单元)调解的演绎称为输入(单元)演绎.

定义 2.5：推出空子句的输入(单元)演绎称为输入(单元)反驳.

定义 2.6：设 C_1 和 C_2 是两个无公共变元的子句，若 C_1 为 $L[t]\vee C_1'$，C_2 为 $r=s\vee C_2'$，其中 $L[t]$ 是包含项 t 的文字，C_1' 和 C_2' 是子句，若 t 和 r 有 $mgu\sigma$，或者 t 与 s 有 $mgu\tau$，则子句

$$L^{\sigma}[s^{\sigma}]\vee C_1'^{\sigma}\vee C_2'^{\sigma},\quad L^{\tau}[r^{\tau}]\vee C_1'^{\tau}\vee C_2'^{\tau}$$

称为 C_1 和 C_2 的二元对称调解式[5].

同样定义对称调解演绎的概念，在对称调解下，文献[2]中引理 8.2 及其后一些结果是正确的[5].

定义 2.7：子句集 S 称为 $Horn$ 集，如果 S 中的每一子句最多有一个正文字.

定义 2.8：子句集 S 的等词公理集(记为 Ks)是包含如下子句的集合：

(1) $x=x$

(2) $x\neq y\vee y=x$

(3) $x\neq y\vee y\neq z\vee x=z$

(4) $x0\neq xi\vee f(x1,\cdots,xi,\cdots,xn)=f(x1,\cdots,x0,\cdots,xn),i=1,\cdots,n$

(5) $x0\neq xi\vee \sim P(x1,\cdots,xi,\cdots,xn)\vee P(x1,\cdots,x0,\cdots,xn),i=1,\cdots,n$

其中 $x,y,z,xi(i=0,\cdots,n)$ 为 S 中的项，f 是 S 中的 n 元函数符号，P 是 S 中的 n 元谓词符号.

§3. 调解法的带函数自反公理的提升引理

引理 3.1(提升引理)：若 B_1' 和 B_2' 分别是子句 B_1 和 B_2 的例，B' 是从 B_1' 到 B_2' 的调解式，则存在从 B_1 到 B_2^* 的调解式 B，使得 B' 是 B 的例. 其中 B_2^* 是使用调解法应用适当多个(也可为 0 个，此时 $B_2^*=B_2$)函数自反公理到 B_2 所得到的 B_2 的一个例.

证明：如果必要的话，则进行改名，使得 B_1 和 B_2 中无公共变量.

设 B_1' 为 $r'=s'\vee C_1'$，B_2' 为 $L'[t']\vee C_2'$，且 r' 与 t' 有 $mgu\sigma$，则从 B_1' 到 B_2' 的调解式 B' 为

$$L'^{\sigma}[s'^{\sigma}]\vee C_1'^{\sigma}\vee C_2'^{\sigma}$$

因为 B_1'、B_2' 分别为 B_1、B_2 的例，设该替换为 θ，则

B_1' 中：$r'=r^{\theta},s'=s^{\theta},C_1'=C_1^{\theta}$

B_2' 中：$L'=L^{\theta},C_2'=C_2^{\theta}$，其中的 t' 有两种情形.

下面对 t' 的两种可能情形分别加以证明.

(1)在 L 中存在项 t，使得 $t'=t^{\theta}$，此时，B_1 为 $r=s\vee C_1$，B_2 为 $L[t]\vee C_2$

因为 σ 是 r' 和 t' 的 mgu，所以 $r'^{\sigma}=t'^{\sigma}$，于是 $r^{\theta\sigma}=t^{\theta\sigma}$，故 r 与 t 可合一. 设 λ 为 r、t 的 mgu，则存在 τ，使得 $\theta\sigma=\lambda\tau$，于是

$$B'=L'^{\sigma}[s'^{\sigma}]\vee C_1'^{\sigma}\vee C_2'^{\sigma}=L^{\theta\sigma}[s^{\theta\sigma}]\vee C_1^{\theta\sigma}\vee C_2^{\theta\sigma}=L^{\lambda\tau}[s^{\lambda\tau}]\vee C_1^{\lambda\tau}\vee C_2^{\lambda\tau}=[L^{\lambda}[s^{\lambda}]\vee C_1^{\lambda}\vee C_2^{\lambda}]^{\tau}$$

令 B 为 $L^{\lambda}[s^{\lambda}]\vee C_1^{\lambda}\vee C_2^{\lambda}$，则 B 是从 B_1 到 B_2 的调解式，且 $B'=B^{\tau}$，即 B' 是 B 的例.

(2)若在 L 中不存在项 t，使得 $t^{\theta}=t'$，而存在这样的变元 t，使得 $t^{\theta}=f_nf_{n-1}\cdots f_1(t')$，其中 $f_i(i=1\cdots n)$ 为函数符号，可能为多元，但我们只关心 t'，故采用此记法.

令 $\tau=\{f_n\cdots f_1(t)/t\}$，则 $B_2^{\tau}=L^{\tau}[f_n\cdots f_1(t)]\vee C_2^{\tau}$，显然，$B_2^{\tau}$ 是从 f_n 始先后应用此 n 个函数自反公理到 B_2 所得结果，记 B_2^{τ} 为 B_2^*.

以下证明从 B_1' 到 B_2' 的调解式 B' 是从 B_1 到 B_2^* 的调解式 B 的例.

令 λ 为只将 θ 中的 $f_n\cdots f_1(t)/t$ 换为 t'/t 而得的替换.则显然 $\theta=\tau\lambda$.

因为 t 为 B_2 中变元，故替换 $\tau=\{f_n\cdots f_1(t)/t\}$ 不变 B_1，所以 $B_1^{\theta}=B_1^{\tau\lambda}=B_1^{\lambda}$，于是

$$r^{\theta}=r^{\lambda},s^{\theta}=s^{\lambda},C_1^{\theta}=C_1^{\lambda}$$

因为 $t'^{\sigma}=r'^{\sigma}$，而 $t'^{\sigma}=t^{\lambda\sigma}$，$r'^{\sigma}=r^{\theta\sigma}=r^{\lambda\sigma}$，故 $t^{\lambda\sigma}=r^{\lambda\sigma}$，所以 t 与 r 可合一.设 t 与 r 的 mgu 为 μ，则存在 γ，使得 $\lambda\sigma=\mu\gamma$，于是

$$B'=L'^{\sigma}[s'^{\sigma}]\vee C_1'^{\sigma}\vee C_2'^{\sigma}=L^{\theta\sigma}[s^{\theta\sigma}]\vee C_1^{\theta\sigma}\vee C_2^{\theta\sigma}=L^{\tau\lambda\sigma}[s^{\lambda\sigma}]\vee C_1^{\lambda\sigma}\vee C_2^{\tau\lambda\sigma}=L^{\tau\mu\gamma}[s^{\mu\gamma}]\vee$$
$$C_1^{\mu\gamma}\vee C_2^{\tau\mu\gamma}=[L^{\tau\mu}[s^{\mu}]\vee C_1^{\mu}\vee C_2^{\tau\mu}]^{\gamma}$$

令 $B=L^{\tau\mu}[s^{\mu}]\vee C_1^{\mu}\vee C_2^{\tau\mu}$，则显然 B 为从 B_1 到 B_2^* 的调解式，且 $B'=B^{\gamma}$，即 B' 为 B 的例.证毕.

从上述证明中，我们容易看出，将引理 3.1 中的调解改为对称调解，结论仍然成立.下面我们用到的引理 3.1 是指对称调解的提升引理.

§4. 输入调解法在 Horn 集上的完备性

引理 4.1：设 S 是不可满足的 *Horn* 基子句集，D 是从 S 出发以负子句为顶的输入反驳.若某中心子句 C_i 形如 $t_2\neq t_1\vee C_i'$，则通过适当调整边子句的输入顺序，或者重复使用 D 中含文字 $t_2=t_1$ 的边子句，总可以使与 C_i 归结的边子句 B_i 具有 $t_2=t_1\vee B_i'$ 的形式，C_i、B_i 以 $t_2\neq t_1$ 与 $t_2=t_1$ 为归结文字，并且此种修改不影响输入演绎空子句的产生.证明略.

定理 4.1：若 S 是一个 E 不可满足的 *Horn* 基子句集，其中包括 $x=x$ 的所有基例，则存在使用归结和对称调解从 S 出发以负子句为顶的输入反驳.

证明：设 Ks 是 S 的等词公理集，因为 S 是 E 不可满足的，所以 $S\cup Ks$ 是不可满足的[2].显然 Ks 是一个 *Horn* 集，故 $S\cup Ks$ 是不可满足的 *Horn* 集.由文献[3]中的结论知，存在仅使用归结从 $S\cup Ks$ 出发的以负子句为顶的输入反驳 D.设演绎 D 为如图 1 所示.

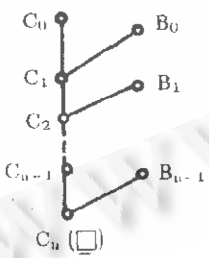


图 1

因为 D 中的 C_0 是负子句，故 Ks 中子句只能出现在边子句 $B_i(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 中.

从 B_0 开始检查每一个 B_i.

若每一个 B_i 都属于 S，则得证.

若 B_i 不属于 S，由引理 4.1，不妨设 D 中 B_{i+1} 是为归结掉 B_i 所引入的不等词的边子句.

首先，假设 $B_{i+1}\in S$，有以下四种情形.

(1)B_i 为 $t_2 \neq t_1 \vee t_1 = t_2$，此时 C_i 一定为 $t_1 \neq t_2 \vee C'$. 其中 C' 为负子句. 于是，C_i 与 B_i 的归结式 C_{i+1} 为 $t_2 \neq t_1 \vee C'$. 因为 B_{i+1} 是为归结掉 B_i 所引入的不等词的边子句，故 B_{i+1} 为 $t_2 = t_1 \vee B'$. 于是，可将 D 中图 2 左边的演绎改写为右边的演绎过程.

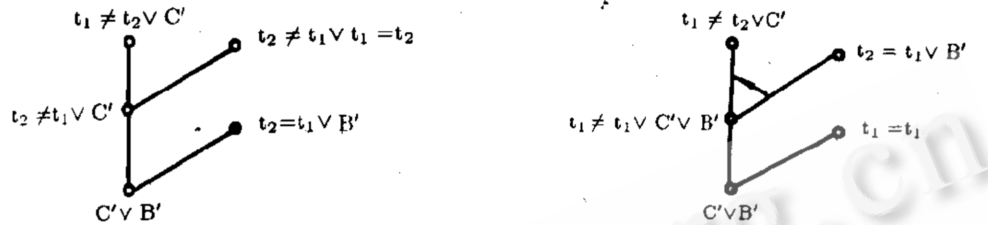


图 2

(2)B_i 为 $t_1 \neq t_2 \vee t_2 \neq t_3 \vee t_1 = t_3$，则可将 D 中图 3 左边的一段演绎改写为右边的演绎过程.

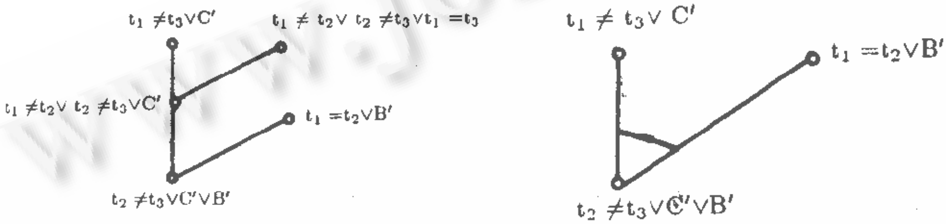


图 3

(3)B_i 为 $t_0 \neq t_i \vee f(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_n) = f(t_1, \cdots, t_0, \cdots, t_n)$，则可将 D 中图 4 左边的演绎改写为右边的演绎过程.

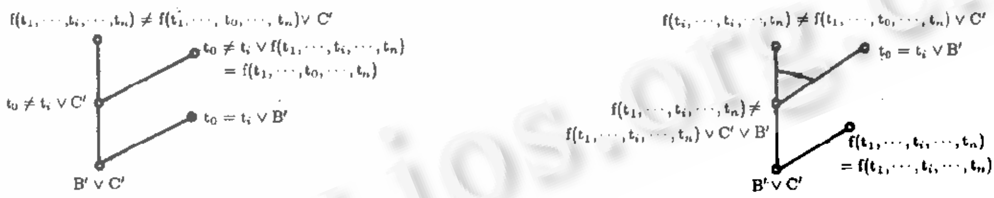


图 4

(4)B_i 为 $t_0 \neq t_i \vee \sim P(t_1, \cdots, t_i, \cdots, t_n) \vee P(t_1, \cdots, t_0, \cdots, t_n)$，则可将 D 中图 5 左边的演绎改写为右边的演绎过程.

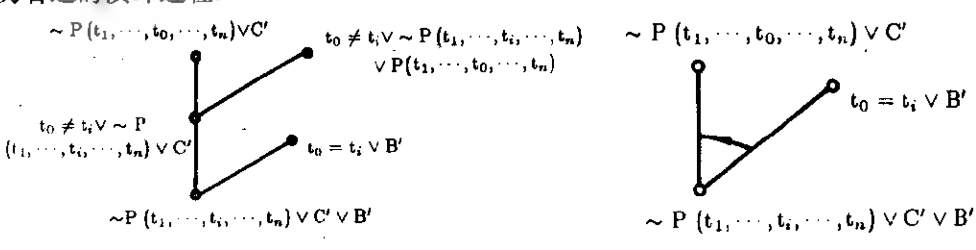
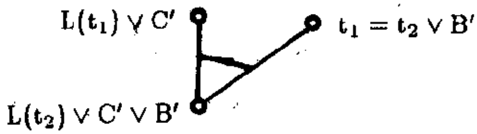


图 5

其次，假设上述的 $B_{i+1}\overline{\in}S$，而为了归结掉 B_i 与 B_{i+1} 所引入的剩余不等词的边子句 $B_j(j>i+1)$ 都属于 S. 此时需对上述四种情形右边的演绎过程再改写，即对下图形式的演绎改写：



其中 $t_1=t_2\vee B'\in S$，$L(t_1)$ 为负文字，C' 为负子句.

分为如下三种情形：

(1) B' 为 $t_2\neq t_1$，则由假设 D 中有边子句 $B_j\in S(j>i+1)$，B_j 为 $t_2=t_1\vee B_j'$，由引理 4.1，不妨设 $j=i+2$，则可将图 6 左边的演绎改写为右边的演绎过程.

图 6

(2) B' 为 $t_1\neq t_3\vee t_3\neq t_2$，则可将图 7 左边的演绎改写为右边的演绎过程.

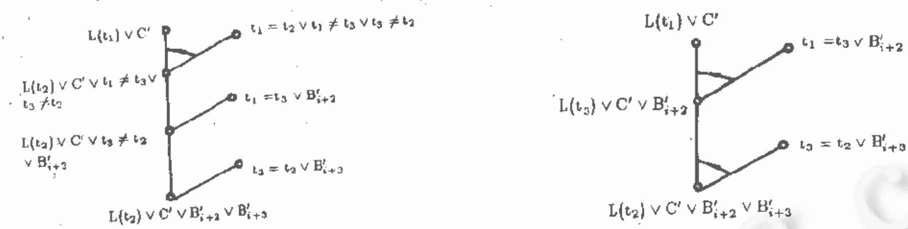


图 7

(3) 若 B' 为 $f(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_n)=f(s_1,\cdots,s_0,\cdots,s_n)\vee s_0\neq s_i$，则 t_1 为 $f(s_1,\cdots,s_i,\cdots,s_n)$，于是图 8 左边的演绎可改写为右边的演绎过程.

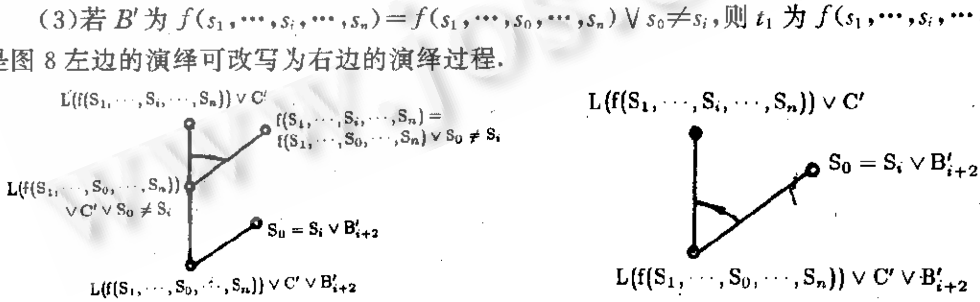


图 8

对于一般情况，设 C_i 以前的一段演绎改写已经完成，而 $B_i\overline{\in}S$.

由引理 4.1，可设 B_{i+1} 是为归结掉 B_i 所引入的不等词的不属于 S 的边子句，B_{i+2} 是为归结掉 B_i 或 B_{i+1} 所引入的不等词的不属于 S 的边子句，……，B_{i+m} 是为归结掉 $B_{i+j}(0\leqslant j\leqslant m-1)$

所引入的不等词的不属于 S 的边子句，而 C_{i+m+1} 中由 $B_{i+k}(0\leqslant k\leqslant m)$ 所引入的不等词都被属于 S 中的边子句归结掉.

可对 m 使用数学归纳法来完成本定理的证明，限于篇幅，详细证明略. 证毕.

定理 4.2：若 S 是一个 E 不可满足的 *Horn* 子句集，其中包括 $x=x$ 和 S 的函数自反公理，则存在使用归结和对称调解从 S 出发以负子句为顶的输入反驳.

证明：因为 S 是 E 不可满足的，由文献[2]中定理 8.2 知：存在一个有限的基例集 S'，且 S' 是 E 不可满足的.

将 $x=x$ 的所有基例加入 S' 中，由定理 4.1 知：存在一个使用归结和对称调解从 S' 出发以负子句为顶的输入反驳 D'.

将 D' 中初始节点上的子句换成 S 中子句，且使旧子句为新子句的例. 对 D' 中每一非初始节点，设其上子句为 C'_{i+1}，其前任二节点上子句 C'_i 与 B'_i 已通过此种方式得到了.

若 C'_{i+1} 为输入归结式，则由归结的提升引理知可将 C'_{i+1} 换成 C_i 与 B_i 的输入归结式 C_{i+1}，且使 C'_{i+1} 为 C_{i+1} 的例.

若 C'_{i+1} 为输入调解(对称调解)式，由定理 4.1 的证明知：C'_{i+1} 是从 B_i' 向 C_i' 应用对称调解而得到的，再由引理 3.1 知，可用对称调解于适当多个(包括 0 个)函数自反公理到 C_i 而得 C_i^*，使得 C'_{i+1} 是从 B_i 到 C_i^* 的对称调解式 C_{i+1} 的例. 把此节点及其上子句 C'_{i+1} 换成推出 C_{i+1} 的演绎.

从而，我们得到了使用归结和对称调解从 S 出发以负子句为顶的输入反驳. 证毕.

§5. 单元调解法在 *Horn* 集上的完备性

引理 5.1：若子句集 S 存在一个使用归结和对称调解的输入反驳，则 S 加上其函数自反公理存在一个使用归结和对称调解的单元反驳.

证明只需将[2]中定理 8.4 的证明改为对称调解的证明. 注：[2]中定理 8.4 等一系列结果都是有问题的，只有使用对称调解，这些结果才成立[5].

定理 5.1：若 S 是一个 E 不可满足的 *Horn* 子句集，其中包括 $x=x$ 和函数自反公理，则存在一个使用归结和对称调解从 S 出发的单元反驳.

由定理 4.2 和引理 5.1 即可证得此定理.

参考文献

[1]刘叙华，姜云飞，《定理机器证明》，科学出版社，1987.

[2]Chang, C. L. & Lee, R. C. T., Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, 1973.

[3]Henschen, L., and Wos, L., Unit Refutation and Horn Sets, JACM, Vol. 21, No. 4, 1974.

[4]DIGRICOLI, V. J., and HARRISON, M. C., Equality Based Binary Resolution, JACM 33, 2 April, 1986.

[5]孙吉贵，刘叙华，使用归结和调解的输入反驳与单元反驳不等价，科学通报，23 期，12 月，1991.