计算高级 Petri 网 S– 不变量的一种简单算法

林闯　　　　张彤

(国家经济信息中心，北京 100045)　(中国科学院软件所，北京 100080)

AN ALGORITHM FOR COMPUTING S–INVARIANTS FOR HIGH LEVEL PETRI NETS

Lin Chuang

(*Institute of Information Science State Economic Information Centre, Beijing 100045*)

Zhang Tong

(*Institute of Software, Academia Sinica, Beijing 100080*)

Abstract Net invariants and reachability trees are used to investigate dynamic properties of Petri Nets. Both concepts have been generalized for different classes of High Level Petri Nets. In this paper we introduce the compound token and the token flow path concepts. An algorithm for computing the S—invariants of High Level Petri Nets is presented. In the algorithm, the compound token and the token flow path ideas are adopted and all S–invariants of an HLPN can be generated by a system of integer linear equations without unfolding the net.

摘要 在高级 Petri 网的性质分析中，S– 不变量的方法是一个重要的方法．如何计算高级 Petri 网的 S– 不变量是一个重要课题．本文基于复合标志 (Token) 和标志流路的概念，给出了一个整系数线性方程系统，由该线性方程系统，可以得到高级 Petri 网的所有 S– 不变量，而不必将高级 Petri 网扩展为一般 Petri 网．

§1. 引　言

Petri 网系统是描述、模拟、验证各种并发、同步系统的一种有力工具．可达集和不变量是 Petri 网系统的两种主要分析方法．不变量分析方法的主要优点在于：分析可以

本文 1990 年 7 月 31 日收到．作者**林闯**，副研究员，1981 年硕士毕业于中科院计算所，主要从事分布系统，性能评价，Petri 网应用，人工智能方面的研究工作．**张彤**，助理研究员，1988 年中科院数学所硕士毕业，主要从事 Petri 网应用，可视图文，集成式软件开发环境方面的研究工作．

局限于子系统而不用考虑整个系统的全部行为．从 S- 不变量出发，可以进行位置有界性 (place boundness) 、系统活性等性质的分析．

一般 Petri 网系统 S- 不变量的计算方法已有若干结果．近年来，不变量分析方法也被成功地应用于高级 Petri 网系统的分析．

求解高级 Petri 网 S- 不变量的算法应该简单、有效，并且解得的 S- 不变量的意义应清楚、明了．

参考文献 [1] 中介绍了求谓词 / 变迁网 S- 不变量的算法．该算法首先用高斯消去法求出 S- 不变量，然后对含有变量的解进行投影，从而使解的意义清晰．迄今为止，仍未找出简单通用的方法做出恰当正确的投影．

参考文献 [2] 引入权函数 (weight-function) 的概念并给出一系列变换规则，计算着色网的 S- 不变量．通常情况下，该方法不能得到所有的 S- 不变量．

参考文献 [3], [4], [5] 给出的计算谓词 / 变迁网的半流 (Semi-flow) 的方法较为实用，因为它可以得到所有的 S- 不变量，并且解的意义十分清楚．但使用该方法时，要求网中所有的标志向量具有相同的长度，且算法本身较复杂．尽管我们可以扩充标志向量的长度，使其满足上述要求，但这将降低算法效率．

本文中，提出一元标志流路的概念来求不变量．流路概念的引入使得不变量的含义清晰且对解中的变量起到了限制作用 (因流路中一个变迁只能与两个位置相关联)．选择一元标志流路而不是 n 元标志流路主要出于以下考虑：

- 通常，n 元标志流路是不存在的 ($n>1$)．
- n 元标志流路可容易地由一元标志流路构成．

文章的第二部分介绍高级 Petri 网的定义及复合标志的概念．第三部分介绍流路概念和不变量算法．计算不变量的实现算法在第四部分给出，同时给出一个计算哲学家用餐问题不变量的实例．

§ 2. 定义和符号

本节介绍文章中涉及到的定义、术语和符号．目前 HLPN(高级 Petri 网系统) 的定义不尽一致，下面的 HLPN 定义是通过对参考文献 [3] 中的 HLPN 定义修改后得到的．

首先引进多重集合 (multi-set) 的概念．

定义 1: 一个多重集合 B 是定义在非空集合 E 上的函数，即： $B\in[E\rightarrow N^+]$. (N^+ 是自然数集合． $[E\rightarrow N^+]$ 表示从 E 到 N^+ 的所有函数组成的集合．)

直观而言，一个多重集合是一个可以包含多个相同元素的集合．例如，集合 $E=\{a,b\}$, 它的一个多重集合可以是 $B(E)=\{2a,3b\}$.

定义 2: 一个 HLPN 是一个九元组 $H=(S,T;F,A,V,D,X,W,M_0)$, 其中 $N=(S,T;F)$ 是 H 的结构网． A: 非空有限的基本颜色集合． V: 有限的变量集合． $D:V\cup A\rightarrow\varphi(A)$ 称值域函数．任一变量的值域是基色集的子集，即： $\forall v\in V, D(v)\subseteq A$, 而任一基色的值域就是它自己，即： $\forall a\in A, D(a)=\{a\}$. $X:S\rightarrow\bigcup_{0\le r\le n}A^r(A^0=\{<>\})$ 和 $T\rightarrow\bigcup_{0\le r\le n}(V\rightarrow A)^r$ 称为颜色函数．这里 n 是将基色构成标志向量的最大向量维数． X

对于每一个位置给予了一组可能的标志颜色，即： $\forall s \in S,\ X(s) \subseteq X(S)$. 任一变迁的颜色函数是一组可能的变量基色替换，即：$\forall t \in T, X(t) \subseteq X(T)$. 另有 $X(T) = \bigcup_{t\in T} X(t)$. $W: F \to B\left(\bigcup_{0\le r\le n}(A\cup V)^r\right)$ 称为弧函数．它是弧在 $\bigcup_{0\le r\le n}(A\cup V)^r$ 上的多重集合的索引，即：$\forall (x,y) \in F, W_{x,y} \in \left[\bigcup_{0\le r\le n}(A\cup V)^r \to N^+\right]$. $M_0: H$ 的初始标识．标识 $M: S \times X(S) \to N$ 是在 $X(S)$ 上多重集合的索引，即： $\forall s \in S, M(S) \in [X(s) \to N]$. ($N$ 为 $N^+ \cup \{0\}$).

根据变迁 t 颜色函数 $X(t)$ 的一个变量基色代换 σ, 用基色来替代 $W_{s,t}$ 或 $W_{t,s}$ 中的所有变量，可以获得多重集合 $W_{s,t}(\sigma)$. 例如，如果有 $\sigma = (x \leftarrow b, y \leftarrow a)$ 且 $W_{s,t} =< a, x > + < x, y >$, 那么 $W_{s,t}(\sigma)$=<a, b>+<b, a>. 而且我们可以知道， $< a,b >\in W_{s,t}(\sigma)$, $< b,a >\in W_{s,t}(\sigma), W_{s,t}(\sigma)(< a,b >)$=1 和 $W_{s,t}(\sigma)(< b,a >) = 1$.

定义 3: 变迁 t 在标识 M 下可能发生，当且仅当： $\exists \sigma \in X(t)$ 使得 $(\forall s \in {}^{\cdot}t)(W_{s,t}(\sigma) \le M(s))$.

如果一个变迁存在变量基色代换 σ, 我们将说一个动作 (t,σ) 能发生，而不说变迁 t 能发生．

定义 4: 一个动作 (t,σ) 在标识 M 下能发生，它发生后转换 M 到一个直接可达的后继标识 M'. M' 可由下式确定：

$$\forall s \in S \quad M'(s) = M(s) - W_{s,t}(\sigma) + W_{t,s}(\sigma)$$

定义 5: 高级 Petri 网 H 的关联矩阵 C 为 $|S| \times |T|$ 矩阵，元素记为 $C_{s,t}$.

$$\forall s \in S, t \in T:\ C_{s,t} = W_{t,s} - W_{s,t}$$

由定义 2 可知，在高级 Petri 网系统中，标志 (token) 由向量表示．我们称向量中的每一元素为一个一元标志，含有多个元素的标志向量可以看作是由多个一元标志复合而成的，故而我们称含有多个元素的标志向量为复合标志 (Compound token). 例如，复合标志 $a =< a_1, a_2, \cdots a_n >, a_i, 1 \le i \le n$, 是一元标志， $a_i \in A \cup V$.

计算 S– 不变量时，我们只关心一元标志及其投影到复合标志中的位置．例如，一元标志 a_3 投影到复合标志 $< a_1, a_2, a_3 >$ 中的位置是 3, 投影到复合标志 $< a_2, a_3, a_1 >$ 中的位置是 2. 标志的元素位置集合记为 K. 对一元标志， $K = \{1\}$. 对复合标志 $< a_1, a_2, \cdots, a_n >$, K 为从 1 到 n 的正整数组成的集合．

符号 $< a, * >$ 表示含有 a 的复合标志． $M(p)(a,k)$ 表示位置 p 的所有标志中第 k 个元素为 a 的标志的个数．例如位置 p 所含标志的集合为 $\{< a,b >; < a,b,c >; < a,c >; < b,b,c >\}$, 到 $M(p)(b,2) = 3$.

§ 3. 高级 Petri 网的 S– 不变量的计算

首先给出标志流路 (token flow path) 的概念，然后给出流路的 S– 不变量的算法．

1. 标志流路

标志流路概念的引入不仅简化了高级 Petri 网 S– 不变量的计算，而且使 S– 不变量有了清晰、明确的意义．

$H=\{S,T;F,A,V,D,X,W,M_0\}$ 是一个高级 Petri 网系统， H 的基网 (ordinary net of H) 记做 $|H|$. $|H|=(S,T;F,|W|,|M_0|)$, 其中：

$$\forall(x,y)\in S\times T\cup T\times S:$$
$$|W|_{x,y}=\begin{cases}1 & |W_{x,y}|\geq 1\\ 0 & |W_{x,y}|=0\end{cases}$$
$$\forall s\in S:\ |M_0|(s)=|M_0(s)|.$$

简单讲，忽略 H 中标志的颜色和个数，便得到了 $|H|$. $|H|$ 的关联矩阵 $|C|=(|C|_{s,t})_{|S|\times|T|}$.$|C|_{s,t}=|W|_{t,s}-|W|_{s,t}$.

我们使用 Martinez 的算法 [6] 计算 $|H|$ 的所有 S- 不变量. 用该算法得到的 S- 不变量均为正向量 (即向量中每一元素均大于等于零).

算法 1: 计算 $|H|$ 的 S- 不变量 (Martinez 算法)

(1) $A:=|C|;D:=In$;　$\{n$ 是 $|H|$ 中位置的个数， In 为 $n\times n$ 单位阵 $\}$

(2) Repeat For $i=1$ Until $i=m$　$\{m$ 是 $|H|$ 中变迁个数 $\}$

(2.1) 对 $[D|A]$ 中的任意两行 r_1,r_2 进行非负的线性合并，消除 A 中第 i 列元素.

If $(\exists k_1,k_2>0)$ 而且 $(k_1r_1+k_2r_2$ 的第 $n+i$ 个元素为零)

Then $[D|A]:=\begin{bmatrix}D|A\\ k_1r_1+k_2r_2\end{bmatrix}$

(2.2) 删除 $[D|A]$ 中第 i 列非零的所有行.　D 中的行向量即为 $|H|$ 的 S- 不变量.

$|H|$ 的 S- 不变量所对应的位置及与这些位置相关联的变迁和弧构成 H 的子网. 我们定义这种子网为流路： $f=(S_f,T_f;F_f,A_f,V_f,D_f,X_f,W_f,M_0^f)$. 流路的一个主要性质是： $\forall t\in T_f$, t 只与两个位置 $p_i,p_j\in S_f$ 相关联.

定理 1: 设 i 是 H 的 S- 不变量，则 i 可以表示成 H 的流路的 S- 不变量的线性组合. (证略).

2. 流路的 S- 不变量的计算

E_f: 在流路 f 中出现的颜色的集合，即 $a\in E_f\iff\exists(p\in S_f)\exists(t\in T_f)(|C|_{p,t}((a,*))\neq 0)$;

$NE_f=A_f\setminus E_f$;

$NE_f^+=NE_f\cup\{a|(a\in E_f)\wedge$(由式 (I) 中未求得与 a 相关的 S- 不变量)$\}$.

命题 1: 设 $u=((X_p)_{p\in S_f},(Y_{p,a,k})_{p\in S_f,a\in E_f,k\in K})$ 是 (I) 的解.

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\forall a\in E_f,\ \forall t\in T_f,\ \sum\limits_{p\in S_f}(X_p\cdot|C_{p,t}|+\sum\limits_{k\in K}Y_{p,a,k}\cdot Y_{p,a,k}\cdot C_{p,t}((a,*)))=0\\ \\ \forall x\in V_f,\ a\in D(x),\sum\limits_{p\in S_f}Y_{p,a,k}\cdot C_{p,t}((x,*))=0\end{cases}$$

相应的 S- 不变量是：

$$\forall M\in[M_0^f>,\ \sum_{p\in S_f}(X_p\cdot|M(p)|+\sum_{k\in K}Y_{p,a,k}\cdot M(p)(a,k))=\text{常数}.$$

命题 2: 设 $W=((Z_{p,a,k})_{p\in S_f,a\in NE_f^+,k\in K})$ 是 (II) 的解.

$$\text{(II)}\begin{cases}\forall a\in NE_f^+,\ \forall t\in T_f,\ \forall x\in V_f,\ a\in D(x)\\ \displaystyle\sum_{p\in S_f} Z_{p,a,k}\cdot C_{p,t}((x,*))=0\end{cases}$$

相应的 S– 不变量是： $\forall M\in[M_0^f>,\ \sum_{p\in S_f}\sum_{k\in K} Z_{p,a,k}\cdot M(p)(a,k)=$ 常数.

流路的 S– 不变量可由 (I), (II) 解出，而高级 Petri 网系统的 S– 不变量可由流路的 S– 不变量的线性组合构造出来.

§ 4. 程序实现

算法 2:

(1) 用算法 1 计算 |H| 的 S– 不变量. $SI_{|H|}$ 为 $|H|$ 的 S– 不变量的集合.

(2) 对 $SI_{|H|}$ 中的每一元素 $f=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 做：

(2.1) H 的流路 f 的关联矩阵 C_f 初始化.

(2.2) Repeat For $i=1$ Until $i=n$

If $a_i <> 0$

Then 将 H 的关联矩阵 C 的第 i 行赋予 C_f 的第 i 行.

(2.3) 扫描 C_f, 得到 E_f, NE_f.

(2.4) 对 E_f 中每一颜色 a 做：

(2.4.1) 据命题 1 形成方程 $(\mathrm{I})_f$;

(2.4.2) 用 Martinez 算法解 $(\mathrm{I})_f$;

(2.4.3) 输出 $(\mathrm{I})_f$ 解相对应的 S– 不变量.

(2.5) 修改 NE_f 为 NE_f^+.

(2.6) 对 NE_f^+ 中每一颜色 a 做：

(2.6.1) 据命题 2 形成方程 $(\mathrm{II})_f$;

(2.6.2) 用 Martinez 算法解 $(\mathrm{II})_f$;

(2.6.3) 输出 $(\mathrm{II})_f$ 解相对应的 S– 不变量.

在算法 2 的 2.4.2 及 2.6.2 步中，我们使用了 Martinez 算法. 前面进过，我们用 Martinez 算法可求 $|H|$ 的 S– 不变量. 但实质上可以讲， Martinez 算法也是一个求齐次线性方程组由正解组成的基的算法. 基于此，在 2.4.2 及 2.6.2 步中，我们拓广了 Martinez 算法的应用范围，从而获得了方程 $(\mathrm{I})_f$ 、 $(\mathrm{II})_f$ 的正解及其相应的正 S– 不变量.

我们选用著名的五个哲学家就餐问题 (以下简称哲学家问题) 来说明本文算法的能力及简单性. 哲学家问题可用一般的 Petri 网系统描述，如图 1 所示.

图 1 中， $i=1,2,\cdots,5$. T_i: “思考”位置. 若 T_i 有一个标记，表示第 i 个哲学家在思考或在等待吃饭. E_i: “吃饭”位置. 若 E_i 有一个标记，表示第 i 个哲学家在吃饭. F_i: “餐叉”位置. 若 F_i 有一个标记，表示第 i 号餐叉是闲置的. G_i: “取餐叉”变迁. R_i: “放餐叉”变迁.

对图 1, 我们用算法 1 求得其 S– 不变量的一组正基.

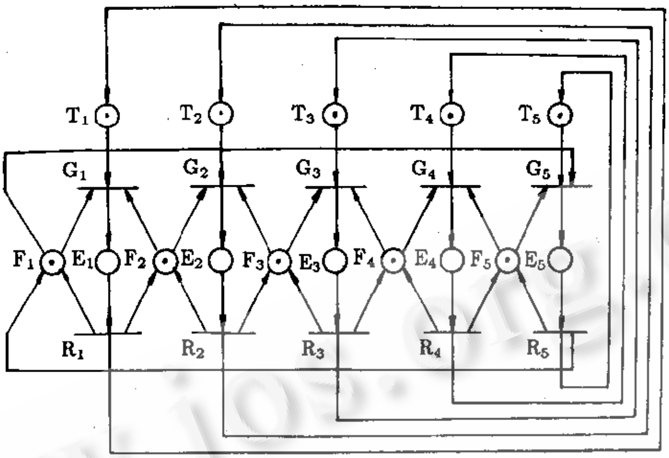
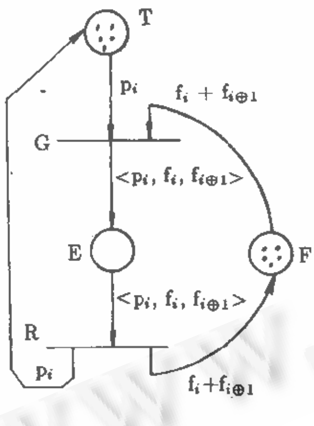


图 1　哲学家问题的一般 Petri 网系统描述

$\cdot M(T_i)+M(E_i)=1 \qquad i=1,2,\cdots,5$

$\cdot M(E_i)+M(E_j)+M(F_j)=1 \qquad i=1,2,\cdots,5;\ j=(i+1) mod\ 5$

折叠图 1 的网，得到由高级 Petri 网系统 H 描述的哲学家问题，如图 2 所示．其中 T,E,F 分别相当于图 1 中的 $\{T_i\},\{E_i\},\{F_i\};G,R$ 分别相当于 $\{G_i\},\{R_i\},i=1,2,\cdots,5.$



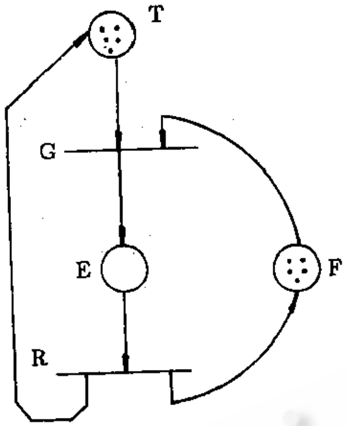
C	G	R
T	$-p_i$	p_i
E	$<p_i, f_i, f_{i\oplus 1}>$	$-<p_i, f_i, f_{i\oplus 1}>$
F	$-(f_i+f_{i\oplus 1})$	$f_i+f_{i\oplus 1}$

图 2　哲学家问题的 HLPN 系统 $-H$

H 的基网 $|H|$ 如图 3 所示．求得 $|H|$ 的 S- 不变量为 $(1, 1, 0)^T$ 和 $(0, 1, 1)^T$．相应的流路如图 4 所示．

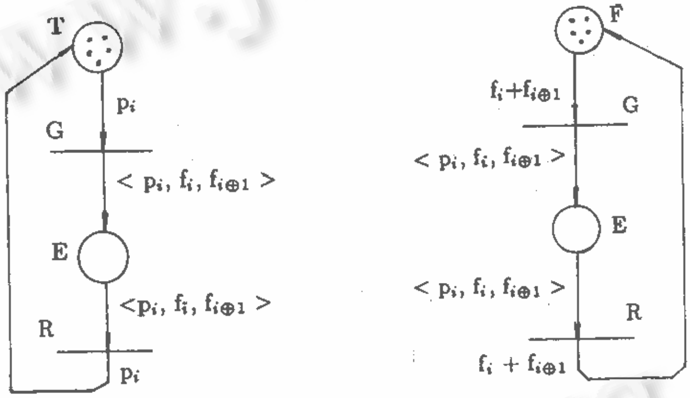
由流路 a 求得的 S- 不变量为：$M(T)(P_i,1)+M(E)(P_i,1)=1,\ i=1,2,\cdots,5$; 由流路 b 求得的 S- 不变量为：$M(F)(f_i,1)+M(E)(f_i,2)+M(E)(f_i,3)=1,\ i=1,2,\cdots,5.$

结语： 在分析高级 Petri 网系统时，构造简单、有效的 S- 不变量算法是非常重要的．同时还应当保证 S- 不变量的意义一目了然．本文提出的算法正是以此为目标的．基于该算法的高级 Petri 网系统分析软件已完成．



C	G	R
T	-1	1
E	1	-1
F	-1	1

图 3　*H* 的基网：|*H*|



流程 a　　流程 b

图 4　*H* 的流路

参考文献

[1] H. J. Genrich, "Predicate/Transition Nets", Lecture Notes in Computer Science, Vol. 254, 207–247, 1986.

[2] K. Jensen, "Coloured Petri Nets", Lecture Notes in Computer Science, Vol. 254, 248–299, 1986.

[3] J. Vautherin, "Calculation of Semi-Flows for Pr/T-Systems", Proceedings of International Workshop on Petri Nets and Performance Models, University of Winsconsin-Madison, 174–183, 1987.

[4] G. Memmi and J. Vautherin, "Analysing Nets by the Invariant Method", Lecture Notes in Computer Science, Vol. 254, 300–336, 1986.

[5] J. Vautherin and G. Memmi, "Computation of Flows for Unary Predicate/Transition Nets", Lecture Notes in Computer Science, Vol. 188, 307–327, 1985.

[6] J. Martinez and M. Silva, "A Simple and Fast Algorithm to Obtain All Invariants of Generalized Petri Nets", Informatik-Fachbrichite 52, 301–310, 1982.

[7] R. Kujansuu and M. Lindqvist, "Efficient Algorithm for Computing *S*-invariants for Pridicate/Transition Nets", Proceedings of the 5th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Aarhus University, 156–173, 1984.