模式化简序与重写系统的终止性

林凯 孙永强 陆汝占

（上海交通大学计算机系，上海 200030）

SCHEME SIMPLIFICATION ORDERING AND TERMINATION OF TERM REWRITING SYSTEM

Lin Kai, Sun Yongqiang and Lu Ruzhan

(*Department of Computer Science, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200030*)

Abstract In this paper, the notions of scheme simplification ordering are introduced, and a new method for proving termination rewriting is given. At the same time, scheme recursive path ordering is discussed, and the upper and lower extension of rewriting rule w.r.t. scheme set are defined. By this, finally we show how to prove termination of rewriting using scheme recursive path ordering.

摘要 本文引入了模式化简序的概念，并给出了基于模式化简序的重写系统终止性判别方法．本文还着重研究了模式递归路径序，同时定义了重写规则相对模式集的上下扩张概念，以此给出了用模式递归路径序判别终止性的有效方法，原有的递归路径序是模式递归路径序的一个特例．

§1. 引 言

在重写系统理论中，具有终止性的重写系统是一类极其重要的重写系统．对于终止的重写系统 R, 可以应用著名的 Newman 定理来判定 R 是否具有合流性 [1]; 如果 R 具有合流性，则可对任意项求 R 范式；如果 R 不具有合流性，则可使用 Knuth–Bendix 算法对 R 进行完备化 [2]; 另外，在终止性条件下，还可应用 Noether 归纳法证明与重写系统相关的许多重要性质 [3]．正是因为终止性的重要性，所以重写系统终止性的自动证明是目前重写系统理论和计算机软件所面临的重要研究课题之一．

许多研究者讨论了证明重写系统终止性的各种方法 [4], 早期使用的指派方法很难以机械化的方法有效地加以实现，此后， Dershowitz 等研究者提出的各种基于算子优先序的化简序方法为终止性的自动证明奠定了基础 [5][6][7]．由于重写系统的终止性是不可判

本文 1990 年 6 月 27 日收到， 1990 年 10 月 9 日定稿． 林凯， 讲师， 1987 年硕士毕业于上海交通大学，主要研究领域为定理证明，重写技术及理论． 孙永强， 教授，博士导师，主要研究领域为新型语言，计算理论． 陆汝占， 教授，主要研究领域为定理证明，方程式语言，计算理论．

定的 [4], 因此，任何机械判别终止性的方法总会具有一定的局限性．实用化的终止性机械判别法应该能够应用于足够多的明显具有终止性的重写系统．从这个意义而言，各种由基于算子优先序的化简序产生的语法方法能力仍然不够强．下面例 1 中的重写系统的终止性是显而易见的，但却无法用化简序的方法加以判别．

例 1: $R_1 = \{f(g(x)) \to f(h(g(x)))\}$

Kamin 和 Lévy 注意到了这种局限性，并引入了更为一般的语义序 [8]．但是，语义序要求在全体项上定义一个满足一定条件的拟序，因而对于任意重写系统 R, R 是否在语义序下终止是很难判别的．

本文引入了模式化简序，并给出了一种基于模式序的判别终止性的新方法．该方法既有类似于语义序的能力，又具有语法方法简单易于机械实现的特点，从而大大增加了终止性自动判别的能力，原有的化简序方法是模式化简序的一个特例．本文着重讨论了模式递归路径序，这是递归路径序的重要推广，应用该方法可直接证明例 1 中 R_1 的终止性．

本文所使用的符号和概念参见 [1][4].

§ 2. 模式化简序和重写系统的终止性

研究例 1 中 R_1 的归约序列 $M_0 \underset{R_1}{\to} M_1 \underset{R_1}{\to} \cdots$, 不难发现，如果 $i < j$, 则 M_i 中形如 $f(g(M))$ 的子项个数比 M_j 中形如 $f(g(N))$ 的子项个数少，所以 R_1 是终止的．为此，我们引入模式的概念．

定义 2: 设 F 是算子集， V 是变量集， $T(F,V)$ 是 F 和 V 构成的项的集合．（在无混淆时， $T(F,V)$ 也记为 $T(F)$.）

(1) 设 $S \in T(F,V)$, S 称为 F 模式，当且仅当，若存在 $w \in O(S)$ 和代换 θ_1, θ_2 使得 $w \neq \wedge$ 且 $\theta_1(S/w) \equiv \theta_2(S)$, 则 $S/w \in V$.

(2) F 模式的集合 SCH 称为 F 模式集，当且仅当，对于任意不同的 $S_1, S_2 \in SCH$, S_1 和 S_2 不重叠，即若存在 $w \in S_a$, $a \in \{1,2\}$ 和代换 θ_1, θ_2 使得 $\theta_1(S_a/w) \equiv \theta_2(S_b)$, $b \in \{1,2\} \setminus \{a\}$, 则 $S_a/w \in V$.

对于任意 F 模式 S, 如果令代换 θ 满足对任意 $x \in V$, $\theta(x) = \square$, 则记 $\theta(S)$ 为 $S^{\square}[\square, \cdots, \square]$.

对于任意 F 模式集 SCH, 我们总是假定不同的 F 模式没有相同的变元出现．对于 $M \in T(F,V)$, 若不存在 $S \in SCH$ 和代换 θ, 使得 $\theta(S) \equiv M$, 则记为 $M \not< \mathrm{SCH}$.

例 3: 设 $F = \{f, g, h\}$, 其中 f 是二元算子，而 g 和 h 都是一元算子．

(1) $f(g(x), h(y))$ 是 F 模式．　(2) $\{f(x,x), f(y, g(y))\}$ 是 F 模式集．

对于给定的 F, 令 $G(F) = \{f(x_1, \cdots, x_n) | f \in F_n$ 且 $x_1, \cdots, x_n$ 为不同的变量 $\}$．显然， G (F) 是 F 模式集．

定义 4: 设 SCH 是 F 模式集， $\geq$ 是 SCH 上的拟序关系，则 $\geq$ 生成的模式同态嵌入序 $>_{SCH}$ 定义如下：

$M >_{SCH} \mathrm{N}$, 如果下列条件之一满足：

(1) 如果存在 $S \in SCH$ 和代换 θ, 使得 $M \equiv \theta(S)$, 则存在有 $x \in V(S)$, 使得 $\theta(x) >_{SCH} N$.

(2) 如果 $M \nless$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, 则存在 i, $1 \le i \le n$, $M_i >_{SCH}$N.

(3) 如果存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2, 使得 $M \equiv \theta_1(S_1)$, $N \equiv \theta_2(S_2)$ 且 $S_1 \ge S_2$, 设 $M \equiv S_1^{\Box}[M_1, \cdots, M_n]$, $N \equiv S_2^{\Box}[N_1, \cdots, N_m]$, 则存在 i_j, 这里 $1 \le j \le m$, 使得 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n$ 且 $M_{i_j} >_{SCH} N_j$.

(4) 如果 $M \nless$ SCH, N $\nless$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, $N \equiv f(N_1, \cdots, N_n)$, 则 $M_i >_{SCH} N_i$, $1 \le i \le n$.

(5) $M \equiv N \in V$.

不难验证， $>_{SCH}$ 具有自反性和传递性．下面我们给出更一般形式的基于模式同态嵌入序的 Kruskal 定理．

定理 5: 设 F 和 V 都是有限集合．如果 $\ge$ 是 SCH 上的良拟序，则 $>_{SCH}$ 是 T (F) 上的良拟序．

证明: 反证法．

设 $\{M_1, M_2, \cdots\}$ 是不满足定理结论的一个无穷序列，并且对任意 i, M_i 是构成反例的符号数最小的项．

对于任意 $M \in T(F)$, 定义 DS (M) 如下：

(1) 如果 $M \in F_0 \cup V$, 则 $DS(M) = \phi$;

(2) 如果 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$ 且 M $\nless$ SCH, 则 $DS(M) = \bigcup_{i=1}^{n} DS(M_i) \cup \{M_i | 1 \le i \le n\}$;

(3) 如果存在 $S \in SCH$ 和代换 θ, 使得 $M \equiv \theta(S)$, 则 $DS(M) = \bigcup_{X \in V(S)}$ DS $(\theta(x)) \cup \{\theta(x) | x \in V(S)\}$.

我们断言： $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} DS(M_i)$ 是 $>_{SCH}$ 下的良拟序集．否则，有序列 $\{N_1, N_2, \cdots\}$ 满足 $N_1 >_{SCH} N_2 >_{SCH} \cdots$ 且存在 k, 使得 $N_i \in DS(M_{k+i})$. 由于 $\{M_1, \cdots, M_{k-1}, N_1, N_2, \cdots\}$ 不满足最小假定，因此该序列不是 $>_{SCH}$ 的严格递降序列．如果存在 i, j, 使得 $i \ge 1$, $1 \le j \le k$, 且 $N_i >_{SCH} M_j$, 则有 $M_{k+i} >_{SCH} N_i >_{SCH} M_j$, 与 $\{M_1, M_2, \cdots\}$ 的假设矛盾．故存在 i, j 使得 $j > i$ 且 $N_i >_{SCH} N_i$, 即 T 在 $>_{SCH}$ 下是良拟序的．

因为 F 和 V 的有限性和 $\ge$ 的良拟序性，所以在序列 $\{M_1, M_2, \cdots\}$ 中必存在一个无穷子序列 $\{P_1, P_2, \cdots\}$ 使得下列条件之一满足：

(1) 对任意 $i \in N_+$, 存在 $S_i \in SCH$ 和代换 θ_i, 使得 $P_i \equiv \theta_i(S_i)$;

(2) 对任意 $i \in N_+$, $P_i \nless$ SCH 且 $P_i \equiv f(P_1^i, \cdots, P_n^i)$.

如果 (1) 成立，由 $\ge$ 的良拟序性，可知存在 $\{P_1, P_2, \cdots\}$ 的无穷子序列 $\{Q_1, Q_2, \cdots\}$, 且对任意 i, j, $j > i$, 如果存在 S_i, S_j, 和代换 θ_i, θ_j, 使得 $Q_i \equiv \theta_i(S_i)$, $Q_j \equiv \theta_j(S_j)$, 则 $S_j \ge S_i$. 设 $Q_i \equiv S_i^{\Box}[Q_1^i, \cdots, Q_{n_i}^i]$, 根据著名的 Higman 定理 [9], 在序列 $\{< Q_1^1, \cdots, Q_{n_1}^1 >, < Q_1^2, \cdots, Q_{n_2}^2 >, \cdots\}$ 中，存在 i, j 使得 $j > i$ 且 $Q_{l_k}^j >_{SCH} Q_k^i$, $1 \le k \le n_i$, $1 \le l_1 < l_2 < \cdots < l_{n_i} \le n_j$, 从而由 $>_{SCH}$ 的定义可知 $Q^j >_{SCH} Q^i$, 这与最初的假设矛盾．

如果 (2) 成立，由 T 的良拟序性，可知在 $\{P_1^1, P_1^2, \cdots\}$ 中存在 $>_{SCH}$ 的无穷递升子序列 $\{P_1^{i_1^1}, P_1^{i_2^1}, \cdots\}$, 这里 $i_1^1 < i_2^1 < \cdots$ 且若令 $X_1 = \{i_k^1 | k \in N_+\}$, 则 $X_1 \subseteq N_+$. 再

由 T 的良拟序性, $\{P_2^{i_1^1}, P_2^{i_2^1}, \cdots\}$ 中也存在 $>_{SCH}$ 的无穷递升子序列 $\{P_2^{i_1^2}, P_2^{i_2^2}, \cdots\}$, 这里 $i_1^2 < i_2^2 < \cdots$ 且若令 $X_2 = \{i_k^2 | k \in N_+\}$, 则 $X_2 \subseteq X_1$.

重复这一构造, 最终可得到 $j_1 < j_2 < \cdots$ 使得对于任意 $k, 1 \le k \le n$, $\cdots >_{SCH} P_k^{j_2} >_{SCH} P_k^{j_1}$, 由此, $\cdots >_{SCH} P_{j_2} \equiv f(P_1^{j_2}, \cdots, P_n^{j_2}) >_{SCH} P_{j_1} \equiv f(P_1^{j_1}, \cdots, P_n^{j_1})$, 也与最初的假设矛盾. 证毕.

定义 6: 设 SCH 是 F 模式集, $T(F,V)$ 上的偏序关系 $\ge$ 称为相对 SCH 的模式化简序, 如果下列条件满足:

(1) 如果 M $\not<$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, 则 $M > M_i$, $1 \le i \le n$;

(2) 如果 $M \equiv S^{\square}[M_1, \cdots, M_n]$ 且 $S \in SCH$, 则 $M > M_i$, $1 \le i \le n$;

(3) 如果 $M > N$ 且 $f(M_1, \cdots, M_{i-1}, M, M_{i+1}, \cdots, M_n) \not<$ SCH, $f(M_1, \cdots, M_{i-1}, N, M_{i+1}, \cdots, M_n) \not<$ SCH, 则 $f(M_1, \cdots, M_{i-1}, M, M_{i+1}, \cdots, M_n) > f(M_1, \cdots, M_{i-1}, N, M_{i+1}, \cdots, M_n)$;

(4) 如果 $M > N$, 且 $V(S) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, $S \in SCH$, 则对 S 的任意代换 θ, $(\theta[x_i/M])(S) > (\theta[x_i/N])(S)$, $1 \le i \le n$.

显然, 如果令 $SCH = G(F)$, 则相对 SCH 的模式化简序就是通常的化简序.

设 I 是 SCH 上的恒等关系, 则 I 生成的模式同态嵌入序记为 $>_{SCH(I)}$. 不难验证, $>_{SCH(I)}$ 具有反对称性.

引理 7: 设 SCH 是 F 模式集, $\ge$ 是相对 SCH 的模式化简序, 则 $>_{SCH(I)} \subseteq \ge$.

证明: 我们归纳于 M 证明 $M >_{SCH(I)} N$ 蕴含 $M \ge N$.

如果 $M >_{SCH(I)} N$ 满足 $N \equiv M$, 则显然 $M \ge N$. 以下我们假设 $M \not\equiv N$.

如果 $M >_{SCH(I)} N$ 满足: 存在 $S \in SCH$ 和代换 θ, $x \in V(S)$, 使得 $M \equiv \theta(S)$ 且 $\theta(x) >_{SCH(I)} N$, 则由 $\ge$ 的定义和归纳假设, $M > \theta(x) \ge N$.

如果 $M >_{SCH(I)} N$ 满足: M $\not<$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$ 且 $M_i >_{SCH(I)} N$, 则由 $\ge$ 的定义和归纳假设, $M > M_i \ge N$.

如果 $M >_{SCH(I)} N$ 满足: $M \equiv S^{\square}[M_1, \cdots, M_n]$, $N \equiv S^{\square}[N_1, \cdots, N_n]$, 这里 $S \in SCH$, 且 $M_i >_{SCH(I)} N_i$, $1 \le i \le n$, 同时由 $M \not\equiv N$, 则存在 k, 使得 $1 \le k \le n$, $M_k > N_k$, 从而由 $\ge$ 的定义和归纳假设, $M \ge N$.

同样, 如果 $M >_{SCH(I)} N$ 满足: M $\not<$ SCH, N $\not<$ SCH, $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, $N \equiv f(N_1, \cdots, N_n)$, $M_i >_{SCH(I)} N_i$, $1 \le i \le n$, 则也可由归纳假设和 $\ge$ 的定义也有 $M \ge N$. 证毕.

下面我们给出基于模式化简序的终止性判别方法.

定理 8: 设 R 上 F 上的重写系统, SCH 是 F 模式集, 且 F, V 和 SCH 都是有限的. 如果存在相对 SCH 的模式化简序 $\ge$, 使得 $M \underset{R}{\rightarrow} N$ 蕴含 $M > N$, 则 R 具有终止性.

证明: 反证法.

设 $M_1 \underset{R}{\rightarrow} M_2 \underset{R}{\rightarrow} M_3 \rightarrow \cdots$ 是 R 的无穷重写链. 因为 F, V 和 SCH 的有限性, 故 $>_{SCH(I)}$ 是良拟序的. 由引理 7, 存在 i 和 j 使得 $j > i$ 且 $M_j \ge M_i$, 而由定理条件和模式化简序的定义, $M_i > M_j$, 矛盾. 证毕.

实际应用定理 8 有时可能会有些困难, 这是因为该定理要求给出一个相对 SCH 的

模式化简序 $\geq$ 使得 $M \underset{R}{\rightarrow} N$ 蕴含着 $M > N$. 因此，下面我们给出一个更为简单的判别方法.

以下我们总假定 SCH 是 F 上的模式集， R 是 F 上的重写系统.

定义 9: 设 $l \rightarrow r \in R$. $l' \rightarrow r'$ 称为 $l \rightarrow r$ 的相对 SCH 的上扩张，当且仅当，存在 $S \in SCH$ 和 $w \in O(S)$, 使得 $S/w \not\in V(S)$ 且 S/w 与 l 和 r 之一可合一，设 S/w 与 M 可合一， $M \in \{l, r\}$, 令 $\theta = mgu(S/w, M)$, 则 $l' \equiv \theta(l)$, $r' \equiv \theta(r)$.

例 10: 设 $SCH \in \{f(g(x), h(y))\}$, 则 $f(g(h(z_1)), h(z_2)) \rightarrow f(h(g(z_1)), h(z_2))$ 是 $g(h(z)) \rightarrow h(g(z))$ 的相对 SCH 的上扩张.

引理 11: 如果存在相对 SCH 的模式化简序 $\geq$, 使得对于任意 $l \rightarrow r \in R$, 下列条件满足：

(1) 对任意代换 θ, $\theta(l) > \theta(r)$;

(2) 对任意 $l \rightarrow r$ 的相对 SCH 的上扩张 $l' \rightarrow r'$ 和任意代换 θ, $\theta(l') > \theta(r')$,

则 $M \underset{R}{\rightarrow} N$ 蕴含 $M > M$.

证明: 设 $M \underset{R}{\rightarrow} N$ 为 $M \underset{<l,r>}{\overset{w}{\rightarrow}} N$, 即存在代换 θ, 使得 $M/w \equiv \theta(l)$ 且 $N \equiv M[w \leftarrow \theta(r)]$. 令 $M \equiv C[\theta(l)]$, $N \equiv C[\theta(r)]$.

我们归纳于 C [$\square$] 的结构证明 $M > N$.

如果 $C[\square] \equiv \square$, 显然成立.

如果 $C[\square] \not\equiv \square$, 并且不存在 $l \rightarrow r$ 的相对 SCH 的上扩张 $l' \rightarrow r'$, 使得存在代换 η 和 $w' \in O(M)$, 满足 $w' < w$ 且 $M/w' \equiv \eta(l')$. 这里可分为两种情况：

情况 1: 存在 $S \in SCH$, 使得 $C[\square] \equiv S^{\square}[P_1, \cdots, P_{i-1}, C_1[\square], P_{i+1}, \cdots, P_n)$. 由归纳假设， $C_1[\theta(l)] > C_1[\theta(r)]$. 再由 $\geq$ 的定义，即有 $C[\theta(l)] > C[\theta(r)]$.

情况 2: $C[\square] \not\lessdot$ SCH. 当然， M $\not\lessdot$ SCH 且 N $\not\lessdot$ SCH. 设 $C[\square] \equiv f(P_1, \cdots, P_{i-1}, C_1[\square], P_{i+1}, \cdots, P_n)$. 由归纳假设， $C_1[\theta(l)] > C_1[\theta(r)]$. 再由归纳假设，即有 $C[\theta(l)] > C[\theta(r)]$.

如果 $C[\square] \not\equiv \square$, 且存在 $l \rightarrow r$ 的相对 SCH 的上扩张 $l' \rightarrow r'$, $w' \in O(M)$ 和代换 η, 使得 $M/w' \equiv \eta(l')$. 这时当然 $N \equiv M[w' \leftarrow \eta(r')]$. 设 $C[\square] \equiv C_1[C_2[\square]]$, 这里 $C_1[\square]/w' \equiv \square$. 这里同样也可分为两种情况：

情况 1: 存在 $S \in SCH$, 使得 $C_1[\square] \equiv S^{\square}[P_1, \cdots, P_{i-1}, C_3[\square], P_{i+1}, \cdots, P_n]$. 由归纳假设 $C_3[C_2[\theta(l)]] > C_3[C_2[\theta(r)]]$, 即 $C_3[\eta(l)] > C_3[\eta(r)]$. 再由 $\geq$ 的定义， $C[\theta(l)] > C[\theta(r)]$.

情况 2: $C_1[\square] \not\lessdot$ SCH. 当然， M $\not\lessdot$ SCH 且 N $\not\lessdot$ SCH. 设 $C_1[\square] \equiv f(P_1, \cdots, P_{i-1}, C_3[\square], P_{i+1}, \cdots, P_n)$, 同样由归纳假设和 $\geq$ 的定义可证得 $C[\theta(l)] > C[\theta(r)]$. 证毕.

由引理 11 立刻可有如下推论.

推论 12: 设 R 是 F 上的重写系统， SCH 是 F 模式集，且 F, V 和 SCH 都是有限的. 如果存在相对 SCH 的模式化简序 $\geq$, 使得对于任意 $l \rightarrow r \in R$, 下列条件满足：

(1) 对任意代换 θ, $\theta(l) > \theta(r)$;

(2) 对任意 $l \rightarrow r$ 的相对 SCH 的上扩张 $l' \rightarrow r'$ 和任意代换 θ, $\theta(l') > \theta(r')$,

则 R 具有终止性.

该定理使得我们可以比较容易地构造使得 R 终止的模式化简序.

§ 3. 模式递归路径序

在本节中我们将基于算子优先序的递归路径序 [5] 推广为基于模式序的模式递归路径序，并讨论了用模式递归路径序判别重写系统终止性的方法.

本节假定 R 是 F 上的重写系统， SCH 是 F 模式集. 我们将用 $>$ 表示严格的偏序或拟序. 对于拟序 $\geq$, 用 $a \approx b$ 表示 $a \geq b$ 且 $b \geq a$.

定义 13: 设 $\geq$ 是 SCH 上的拟序关系，则 $\geq$ 诱导的 $T(F,V)$ 上的相对 SCH 的模式递归路径序 $>_S$ 定义如下： $M >_S N$, 如果下列条件之一满足:

(1) 存在 $S \in SCH$ 和代换 $\theta, x \in V(S)$, 使得 $M \equiv \theta(S)$, 并且 $\theta(x) >_S N$ 或者 $\theta(x) \equiv N$;

(2) M $\not<$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, 存在 $i, 1 \leq i \leq n$, 使得 $M_i >_S N$;

(3) M $\not<$ SCH 且 N $\not<$ SCH, $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, $N \equiv f(N_1, \cdots, N_n)$, 满足 $\{M_1, \cdots, M_n\} >>_S \{N_1, \cdots, N_n\}$;

(4) 存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2 使得 $M \equiv \theta_1(S_1)$, $N \equiv \theta_2(S_2)$ 且有 $S_1 > S_2$, 则对于任意 $x \in V(S_2)$, $M >_S \theta_2(x)$;

(5) 存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2 使得 $M \equiv \theta_1(S_1)$, $N \equiv \theta_2(S_2)$ 且 $S_1 \approx S_2$, 则 $\{\theta_1(x) | x \in V(S_1)\} >>_S \{\theta_2(x) | x \in V(S_2)\}$.

这里 $>>_S$ 是 $>_S$ 诱导的多重集上的序.

不难验证，如果令 $SCH = G(F)$, 则 $>_S$ 即为通常的递归路径序. 由于模式递归路径序不允许在模式内部嵌入，因而模式递归路径序与语义序明显不同.

定理 14: 如果 $\geq$ 是 SCH 上的拟序关系，则 $\geq_S$ 是 $T(F,V)$ 上的相对 SCH 的模式化简序.

证明: 首先我们证明 $>_S$ 是严格的偏序关系.

(1) $>_S$ 具有传递性. 即 $M_1 >_S M_2$, $M_2 >_S M_3$, 则 $M_1 >_S M_3$. 归纳于 $< |M_1|, |M_2|, |M_3| >$, 这里 $|M|$ 表示 M 中的符号数.

(i) 如果存在 $S \in SCH$ 和代换 θ, $X \in V(S)$, 使得 $M_1 \equiv \theta(S)$ 并且 $\theta(x) >_S M_2$ 或 $\theta(x) \equiv M_2$. 如果 $\theta(x) >_S M_2$, 则由归纳假设， $\theta(x) >_S M_3$. 否则 $\theta(x) \equiv M_2 >_S M_3$. 由 $>_S$ 定义， $M_1 >_S M_2$.

(ii) 如果 $M_1 \not<$ SCH 且 $M_1 \equiv f(M'_1, \cdots, M'_n)$, $M'_i >_S M_2$ 或 $M'_i \equiv M_2$. 同样地，若 $M'_i >_S M_2$, 则由归纳假设， $M'_i >_S M_3$; 若 $M'_i \equiv M_2$, 则 $M'_i >_S M_3$. 再由 $>_S$ 的定义， $M_1 >_S M_3$.

(iii) 如果 $M_1 \not<$ SCH 且 $M_2 \not<$ SCH, 同时 $M_1 \equiv f(M_1^1, \cdots, M'_n)$, $M_2 \equiv f(M_1^2, \cdots, M_n^2)$, $\{M_1^1, \cdots, M'_n\} >>_S \{M_1^2, \cdots, M_n^2\}$. 这里又可分为如下两种子情况.

(a) 存在 $i, 1 \leq i \leq n$, $M_i^2 >_S M_3$. 这样由归纳假设可知，存在 $j, 1 \leq j \leq n$, $M_j^1 >_S M_3$, 即有 $M_1 >_S M_3$.

(b) 若 $M_3 \equiv f(M_1^3, \cdots, M_n^3)$ 且 $M_3 \not<$ SCH, 同时 $\{M_1^2, \cdots, M_n^2\} >>_S \{M_1^3, \cdots, M_n^3\}$, 由归纳假设， $\{M_1^1, \cdots, M_n^1\} >>_S \{M_1^3, \cdots, M_n^3\}$, 故 $M_1 >_S M_3$.

(iv) 如果存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2 使得 $M_1 \equiv \theta_1(S_1)$, $M_2 \equiv \theta_2(S_2)$, $S_1 > S_2$ 同时对任意 $x \in V(S_2)$, $M_1 >_S \theta_2(x)$. 这里又可分为如下三种子情况.

(a) 存在 $x \in V(S_2)$, 使得 $\theta_2(x) >_S M_3$ 或 $\theta_2(x) \equiv M_3$. 若 $\theta_2(x) >_S M_3$, 则由归纳假设 $M_1 >_S M_3$; 若 $\theta_2(x) \equiv M_3$, 则直接有 $M_1 >_S M_3$.

(b) 存在 $S_3 \in SCH$ 和代换 θ_3, 使得 $M_3 \equiv \theta_3(S_3)$, $S_2 > S_3$ 且对于任意 $x \in V(S_3)$, $M_2 >_S \theta_3(x)$. 由 $\geq$ 的传递性, $S_1 > S_3$, 且对于任意 $x \in V(S_3)$, $M_1 >_S M_2 >_S \theta_3(x)$, 由归纳假设, $M_1 >_S \theta_3(x)$, 即有 $M_1 >_S M_3$.

(c) 若存在 $S_3 \in SCH$ 和代换 θ_3, 使得 $M_3 \equiv \theta_3(S_3)$, $S_2 \approx S_3$ 并且 $\{\theta_2(x)|x \in V(S_2)\} >>_S \{\theta_3(x)|x \in V(S_3)\}$, 这样对于任意 $x \in V(S_3)$, 由归纳假设, $M_1 >_S \theta_3(x)$, 即有 $M_1 >_S M_3$.

(v) 如果存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2, 使得 $M_1 \equiv \theta_1(S_1)$, $M_2 \equiv \theta_2(S_2)$, $S_1 \approx S_2$ 且 $\{\theta_1(x)|x \in V(S_1)\} >>_S \{\theta_2(x)|x \in V(S_2)\}$. 这里可分为如下三种子情况.

(a) 存在 $x \in V(S_2)$, $\theta_2(x) >_S M_3$, 则显然存在 $y \in V(S_1)$, $\theta_1(y) \geq_S \theta_2(x) >_S M_3$, 由归纳假设，可有 $M_1 >_S M_3$.

(b) 存在 $S_3 \in SCH$ 和代换 θ_3, $M_3 \equiv \theta_3(S_3)$ 且 $\{\theta_2(x)|x \in V(S_2)\} >>_S \{\theta_3(x)|x \in V(S_3)\}$, 由归纳假设, $\{\theta_1(x)|x \in V(S_1)\} >>_S \{\theta_3(x)|x \in V(S_2)\}$, 故 $M_1 >_S M_3$.

(c) 存在 $S_3 \in SCH$ 和代换 θ_3, $M_3 \equiv \theta_3(S_3)$, $S_2 > S_3$ 且对于任意 $x \in V(S_3)$, $M_2 >_S \theta_3(x)$. 由归纳假设, $M_1 >_S \theta_3(x)$, 而由 $\geq$ 的传递性, $S_1 > S_3$, 从而 $M_1 >_S M_3$.

至此, $>_S$ 的传递性得证.

(2) $>_S$ 具有反自反性，即 $M >_S M$ 不成立. 归纳于 $|M|$.

如果 M $\not\lessdot$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, 则由归纳假设, $M_i >_S M_i$ 不成立, $1 \leq i \leq n$. 由多重序定义, $\{M_1, \cdots, M_n\} >>_S \{M_1, \cdots, M_S\}$ 不成立，故 $M >_S M$ 不成立.

类似地，如果存在 $S \in SCH$ 和代换 θ, $M \equiv \theta(S)$, 则也可证明 $M >_S M$ 不成立.

(3) $\geq_S$ 是相对 SCH 的模式化简序.

显然, $>_S$ 满足定义 6 中的条件 (1)(2). 如果 $M >_S N$ 且 $M' \equiv f(M_1, \cdots, M_{i-1}, M, M_{i+1}, \cdots, M_n)$ $\not\lessdot$ SCH, $N' \equiv f(M_1, \cdots, M_{i-1}, N, M_{i+1}, \cdots, M_n)$ $\not\lessdot$ SCH, 由多重集序的定义, $\{M_1, \cdots, M_{i-1}, M, M_{i+1}, \cdots, M_n\} >>_S \{M_1, \cdots, M_{i-1}, N, M_{i+1}, \cdots, N\}$, 故 $M' >_S N'$.

同样，如果 $M >_S N$ 且 $V(S) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, 则显然 $\{\theta[x_i/y](y)|y \in V(S)\} >>_S \{\theta[x_i/N](y)|y \in V(S)\}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, 故 $(\theta[x_i/N])(S) >_S (\theta[x^i/N])(S)$. 证毕.

由定理 14 和推论 12, 我们可证明相当一类重写系统的终止性. 显然, Dershowitz 的方法 [5] 是该方法的一个特例.

定义 15: 设 $< M_1, M_2 >$ 是 $T(F,V)$ 中项的序偶且 $V(M_2) \subseteq V(M_1)$, $< N_1, N_2 >$ 称为 $< M_1, M_2 >$ 的相对 SCH 的下模式扩张，当且仅当，存在 $w_1^i, \cdots, w_{n_i}^i \in O(M_i)$, $i \in \{1,2\}$, 使得下列条件满足：

(1) 对于任意 j, k, $1 \leq j$, $k \leq n_i$, $i \in \{1,2\}$, $w_j^i \perp w_k^i$;

(2) 对于任意 j, $1 \leq j \leq n_i$, $M_i/w_j^i \notin$V 且 M_i/w_j^i $\not\lessdot$ SCH;

(3) 存在 S, 使得 M_i/w_j^i 与 S 可合一. 令 $\theta_j^i = mgu(M_i/w_j^i, S)$;

(4) 对于任意 i_1, i_2, j_1, j_2, $i_1, i_2 \in \{1,2\}$, $1 \leq j_1 \leq n_{i_1}$, $1 \leq j_2 \leq n_{i_2}$ 和任意 $x \in V(M_1)$, 如果 $\theta_{j_1}^{i_1}(x) \neq x$ 且 $\theta_{j_2}^{i_2}(x) \neq x$, 则 $\theta_{j_1}^{i_1}(x) \equiv \theta_{j_2}^{i_2}(x)$.

定义代换 θ 如下：如果 $x \in V(M)$ 且存在 θ_j^i 使得 $\theta_j^i(x) \neq x$, 则 $\theta(x) = \theta_j^i(x)$, 否则, $\theta(x) = x$.

则 $N_1 \equiv \theta(M_1)$, $N_2 \equiv \theta(M_2)$.

引理 16: 如果 $M >_S N$ 且不存在相对 SCH 的下扩张 $< M', N' >$ 和代换 θ', 使得 $\theta'(M') \equiv \theta(M)$, $\theta'(N') \equiv \theta(N)$, 则 $\theta(M) >_S \theta(N)$.

证明: 归纳于 $< |M|, |N| >$.

(1) 如果存在 $S \in SCH$ 和代换 $\theta_1, x \in V(S)$, 使得 $M \equiv \theta_1(S)$ 并且 $\theta_1(x) >_S N$ 或 $\theta_1(x) \equiv N$. 如果 $\theta_1(x) \equiv N$, 则显然, $\theta(M) >_S \theta(N)$. 如果 $\theta_1(x) >_S N$, 当然不存在 $< \theta_1(x), N >$ 相对 SCH 的下扩张 $< M', N' >$ 和代换 θ', 使得 $\theta'(M') \equiv \theta(\theta_1(x))$, $\theta'(N') \equiv \theta(N)$. 由归纳假设, $\theta(\theta_1(x)) >_S \theta(N)$, 从而 $\theta(M) \equiv \theta(\theta_1(S)) >_S \theta(\theta_1(x)) >_S \theta(N)$.

(2) 如果 M $\nless$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, 存在 $i, 1 \le i \le n$, $M_i >_S N$ 或 $M_i \equiv N$, 可类似 (1) 证明 $\theta(M) >_S \theta(N)$.

(3) 如果 M $\nless$ SCH, N $\nless$ SCH 且 $M \equiv f(M_1, \cdots, M_n)$, $N \equiv f(N_1, \cdots, N_n)$, $\{M_1, \cdots, M_n\} >>_S \{N_1, \cdots, N_n\}$, 则由归纳假设, $\{\theta(M_1), \cdots, \theta(M_n)\} >>_S \{\theta(N_1), \cdots, \theta(N_n)\}$, 故 $\theta(M) >_S \theta(N)$.

(4) 如果存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2, 使得 $M \equiv \theta_1(S_1)$, $N \equiv \theta_2(S_2)$ 且 $S_1 \approx S_2$, $\{\theta_1(x) | x \in V(S_1)\} >>_S \{\theta_2(x) | x \in V(S_2)\}$, 则由归纳假设, $\{\theta(\theta_1(x)) | x \in V(S_1)\} >>_S \{\theta(\theta_2(x)) | x \in V(S_2)\}$, 故 $\theta(M) >_S \theta(N)$.

(5) 如果存在 $S_1, S_2 \in SCH$ 和代换 θ_1, θ_2, 使得 $M \equiv \theta_1(S_1), N \equiv \theta_2(S_2)$, 且 $S_1 > S_2$, 对任意 $x \in V(S_2)$, $M_3 >_S \theta_2(x)$, 则由归纳假设, $\theta(M) >_S \theta(\theta_2(x))$, 故 $\theta(M) >_S \theta(N)$. 证毕.

定理 17: 设 $< M, N >$ 满足下列条件: (1) $V(N) \subseteq V(M)$, (2) $M >_S N$, (3) 对 $< M, N >$ 任意的相对 SCH 的下扩张 $< M', N' >$, $M' >_S N'$, 则对于任意代换 θ, $\theta(M) >_S \theta(N)$.

证明: 对于 $< \theta(M), \theta(N) >$, 显然, 总存在 $< M', N' >$ 和代换 θ', 使得 $< M', N' > \equiv < M, N >$ 或 $< M, N >$ 的相对 SCH 的下模式扩张, 且 $\theta(M) \equiv \theta'(M')$, $\theta(N) \equiv \theta'(N')$, 同时, 不存在 $< M', N' >$ 的下模式扩张 $< M'', N'' >$, 使得存在代换 θ'', $\theta''(M'') \equiv \theta'(M')$, $\theta''(N'') \equiv \theta'(N')$. 再由引理 16, $\theta(M) >_S \theta(N)$. 证毕.

对于重写系统 R, 令 $UE(R) = R_\cup \{l' \to r' | l' \to r'$ 是 $l \to r \in R$ 相对 SCH 的上扩张 $\}$, E (R)=UE(R)$_\cup$ $\{l_1 \to r_1 | < l_1, r_1 >$ 是 $< l, r >$ 相对 SCH 的下扩张, 这里 $l \to r \in UE(R)\}$.

由推论 12, 定理 14 和定理 17, 我们有如下重要结论:

定理 18: 设 R 是 F 上的重写系统, SCH 是 F 模式集, 且 F, V, SCH 都是有限的, $\geq$ 是 SCH 上的拟序. 如果对于任意 $l \to r \in (E(R))$ 有 $l >_S r$, 则 R 具有终止性.

例 19: 设 R 为如下的重写系统

$$R = \{f_1(f_3(x)) \to f_1(f_2(f_3(x))), g_1(f_1(f_2(y))) \to g_2(f_1(f_3(y)))\}$$

令 SCH=$\{f_1(f_3(x_1)), f_1(f_2(f_3(x_2))), g_1(x_3), g_2(x_4)\}$, 定义 SCH 上的严格偏序如下: $g_1(x_3) > g_2(x_4)$, $g_1(x_3) > f_1(f_3(x_1)) > f_1(f_2(f_3(x_2)))$. 注意 $E(R) = R_\cup \{g_1(f_1(f_2(f_3(x_2)))) \to g_2(f_1(f_3(f_3(x_2))))\}$. 不难验证, 对于任意 $l \to r \in E(R)$, $l >_S r$. 故 R 具有终止性. 用简单的递归路径序或其它化简序的方法是无法证明 R 具有终止性的.

模式化简序为终止性的自动证明提供了一种新的强有力的方法．现有的各种化简序证明终止性的方法将可对应地拓展为模式化简序方法，并且这些方法应是容易机械地实现的．所有这些问题，我们将另文讨论．

参考文献

[1] G.Huet, D.C.Oppen, "Equations and Rewrite Rules: A Survey", Formal Language Theory: Perspective and Open Problem, Academic Press, New York, 1980.

[2] D.E.Knuth, P.B.Bendix, "Simple Word Problems in Universal Algebra", Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Oxford, 1970.

[3] G.Huet, J.M.Hullot, "Proofs by Induction in Equational Theories with Constructors", JCSS25:2, 1982.

[4] N. Dershowitz, "Termination of Rewriting", Journal of Symbolic Computation, 1987, Vol 3.

[5] N.Dershowitz, "Orderings for Term-Rewriting System", Theor. Comp. Sci, 17, 1982.

[6] J-P Jouannaud et al., "Recursive Decomposition Ordering", Formal Description of Programming Concept–II, North–Holland, 1983.

[7] D.Kapur, et al., "A Path Ordering for Proving Termination of Term Rewriting System", CAAP 85, 1985.

[8] Kamin, J-J. Lévy, "Two Generalizations of the Recursive Path Orderings", Unpublished note, Department of Computer Science, Univ. of Illinois, Urbana, IL, 1980.