三种归结原理间的相容性问题

刘叙华

（吉林大学计算机科学系，长春 130023）

THE COMPATIBILITY AMONG THREE RESOLUTION PRINCIPLES

Liu Xuhua

(Computer Science Department, Jilin University, Changchun 130023)

ABSTRACT

Semantic resolution, lock resolution and linear resolution are three important improvements of resolution principle. In this paper we obtain the following results: semantic resolution and lock resolution are compatible under certain condition; semantic resolution and linear resolution are incompatible; linear resolution and lock resolution are compatible under certain condition. Obviously, the combination of any two compatible resolution principles is an improvement of the two original resolutions.

摘 要

语义归结、锁归结、线性归结是三种重要的关于归结原理的改进．本文给出如下结果：语义归结和锁归结在某种条件下是相容的；语义归结和线性归结是不相容的；线性归结和锁归结在某种条件下是相容的．显然，任意两种归结的相容方法是对原来两种归结方法的进一步改进．

§1. 引 言

1965 年 J.A.Robinson 提出归结方法后，引起了人工智能学者的重视，纷纷对这一方法做了很多精炼和改进．著名的工作有 J. R. Slagle 提出的语义归结 (1967), D. W. Loveland 和 D. Luckham 提出的线性归结 (1970), R. S. Boyer 提出的锁归结 [1][2].

1990 年 3 月 3 日收到， 1990 年 9 月 9 日定稿．本课题受国家自然科学基金和国家教委博士点基金支持．作者刘叙华，现任吉林大学计算机研究所所长，教授，博士导师，目前主要研究领域为定理机器证明，自动推理．

这三种改进方法之间的相容性问题，是进一步改进归结方法的途径．本文给出了上述三种方法之间的相容性结论：语义归结和锁归结是相容的，即锁语义归结方法是完备的 (1978)；语义归结和线性归结是不相容的，即线性语义归结是不完备的 (1979)；对于 Horn 子句集，线性归结和锁归结在某种条件下是相容的，并且无条件的输入半锁归结是完备的 (1985)；1989 年作者和杨玉普证明了：对于一般子句集，线性归结和锁归结是不相容的，但是，线性归结和半锁归结是相容的，即线性半锁归结方法是完备的．本文给出线性半锁归结的另一种形式．

§ 2. 锁语义归结原理

定义 1: 设 $(E_1,\cdots,E_q,N)$ 是配锁子句序列，I 是一个解释．此序列称为关于 I 的 1 型锁语义互撞 (简记为 1 型 LS– 互撞), 如果满足如下条件：

1) $E_1,\cdots,E_q$ 在 I 下为假，

2) 设 $R_1=N$, 对 $i=1,\cdots,q$, 存在 E_i 和 R_i 的归结式 R_{i+1}，

3) E_i 中归结文字是 E_i 中有最小锁文字，

4) R_i 中归结文字是 R_i 中有其例在 I 下为真的那些文字中有最小锁者，

5) R_{q+1} 在 I 下为假，

R_{q+1} 称为此互撞的 1 型 LS– 归结式．

定义 2:将定义 1 中条件 4) 删除，则子句序列 $(E_1,\cdots,E_q,N)$ 称为 2 型 LS– 互撞，R_{q+1} 称为此互撞的 2 型 LS– 归结式．若将条件 4) 改为：R_i 中归结文字是 R_i 中有最小锁者，则称为 LS– 互撞，R_{q+1} 称为 LS– 归结式．

定理 1:对于任意配锁基子句集，1 型 LS– 归结方法是完备的．

定理 2:对于任意配锁子句集，2 型 LS– 归结方法是完备的．

定理 3:对于配锁子句集 S, I 是一个解释，如果

1) 假文字锁 $\geq$ 真文字锁，2) 纯假文字锁 $\geq$ 准假文字锁，3) 准假文字锁都相等，则 LS– 归结方法是完备的．

以上三个定理的证明，见文献 [3], [4].

§ 3. 线性语义归结原理

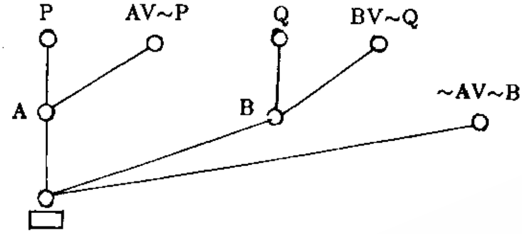
定义 3:子句序列 $(E_1,\cdots,E_q,N)$ 称为一个语义互撞 (对于解释 I), 如果此序列满足定义 1 中的条件 1), 2), 5)．其中 E_1 称为此互撞的首电子，R_{q+1} 称为此互撞的语义归结式 (简称 S– 归结式).

定义 4: 从子句集 S 推出子句 C 的线性语义归结演绎 (简称 LIS– 归结演绎), 是如下一个子句序列 $C_0,C_1,\cdots,C_n$

1) $C_n=C$, $C_0\in S\cdot 2)C_i$ 是以 C_{i-1} 为首电子的某个语义互撞的 S– 归结式，$(i=1,\cdots,n)$. 3) 每个语义互撞 $(C_i,E_2^i,\cdots,E_{q_i}^i,N^i)$ 中，$E_2^i,\cdots,E_{q_i}^i$ 或为 S 中子句，或为某个 $C_j(j<i)$ $(i=0,\cdots,n-1)$.

例：设 $S=\{P,Q,AV\sim P,BV\sim Q,\sim AV\sim B\}$, 令 $I=\{\sim P,\sim Q,\sim A,\sim B\}$

显然，S 是恒假的，并且从 S 推出□的语义归结演绎只有如下一个：



此语义归结演绎显然不是线性的，所以，线性语义归结原理是不完备的．

§ 4. Horn 集上的输入锁归结原理

定义 5: 设 S 是配锁子句集， D 是从 S 出发的线性归结演绎，其边子句序列为：$B_0, B_1, \cdots, B_{n-1}$; 中心子句序列为： $C_0, C_1, \cdots, C_n$.

1) 称 D 为线性锁归结演绎，若 $C_{i+1} = R(C_{i-1}, B_{i-1})$ 是 C_{i-1} 和 B_{i-1} 的锁归结式．

2) 称 D 为线性半锁归结演绎，若 $C_{i+1} = R(C_{i-1}, B_{i-1})$, 其中 C_{i-1} 的归结文字是 C_{i-1} 中有最小锁者．

3) 称 D 为输入锁归结演绎，若 D 是线性锁归结演绎，且所有边子句均为 S 中子句．

4) 称 D 为输入半锁归结演绎，若 D 是线性半锁归结演绎，并且所有边子句均为 S 中子句．

定理 4: 对于任意配锁 Horn 子句集，输入半锁归结是完备的．

定理 5: 对于任意配锁 Horn 子句集 S, 如果 S 中正文字锁 > 负文字锁， C 为负子句且 $S - \{C\}$ 可满足，则以 C 为顶子句，输入锁归结是完备的．

以上两个定理的证明，见文献 [5].

§ 5. 线性半锁归结原理

我们在文献 [7] 中证明了如下定理：

定理 6: 如果 S 是配锁子句集，且相同文字配相同锁，则线性半锁归结是完备的．

下面我们证明另一个定理．

定理 7:如果S是配锁基子句集， 且不同文字配不同锁， 则线性半锁归结是完备的．

证明： 不妨设 S 是最小不可满足基子句集． $C_0 \in S$.

对 S 中文字出现总数 $l(S)$ 用归纳法．

当 $l(S) = 2$ 时，命题显然．假设 $l(S) < n$ 时，定理成立．设 $l(S) = n > 2$.

1) 若 C_0 是单元子句 rL. 令 S′ 是从 S 中删除所有含 L 的子句，然后在剩下的子句中删除文字 $\sim L$ 所得子句集．显然， S' 不可满足．不妨设 S' 是最小的，于是有 $C' \in S'$, 使得 $(C'V \sim L) \in S($ 否则，将有 $S' \subseteq S - \{rL\} = S - \{C_0\})$.

因为 $l(S') < n$, 由归纳假设，存在从 S' 推出□的以 C' 为顶的线性半锁演绎 D'.

设 D' 的中心子句序列为 $C', C'', \cdots, C^{(m)} = \square$，边子句序列为 $B', B'', \cdots, B^{(m-1)}$, 将边子句序列 S' 中子句 $B^{(i)}$ 恢复成 S 的子句 B_i:

$$B_i = \begin{cases} B^{(i)}, & \text{当 } B^{(i)} \in S \text{ 时} \\ B^{(i)} V_\lambda \sim L, & \text{当 } B^{(i)} \notin S \text{ 时} \end{cases}$$

令 $B_0 = C' V_\lambda \sim L$, 显然，$B_0 \in S$.

以 rL 为顶，以 B_0 为第一个边子句，按照 D' 进行演绎：①中心子句 C_i, 或者是 D' 中的 $C^{(j)}(j \le i)$, 或者是 $C^{(j)} V_\lambda \sim L(j \le i)$. ②边子句 B_i, 或者是原边子句 $B^{(j)}(j \le i)$, 或者是 $B^{(j)} V_\lambda \sim L$, 或者是新插入的子句 rL(这种情形，仅当中心子句为 $C^{(j)} V_\lambda \sim L$, 并且 λ 是这个中心子句的最小锁时才发生).

于是，得到一个以 rL 为顶，以 S 中子句为边子句，推出□的一个线性半锁演绎 D.

2) 若 C_0 不是单元子句.

在下面的讨论中，对配锁子句中的相同文字，施行如下合并规则：保留有最小锁的一个，删除其他所有相同文字.

令 $r_1 L_1$ 是 C_0 中有最小锁的文字，r_2 为子句 $(C_0 - r_1 L_1)$ 中最小锁，显然 $r_1 < r_2$(因为不同文字配不同锁). 在 S 中任取一个含 $r_1 L_1$ 的子句 C_0^*, 令 $S_1 = (S - \{C_0^*\}) \cup \{r_1 L_1\}$, 显然，$S_1$ 不可满足，且 $S_1 - \{r_1 L_1\}$ 可满足，$l(S_1) \le n$. 因此，由证明 1) 知，存在以 $r_1 L_1$ 为顶，从 S_1 推出□的线性半锁演绎 D_1.

令 D_1 的中心子句序列为 $C' = r_1 L_1, C'', \cdots, C^{(m)} = \square$，边子句序列为 $B', B'', \cdots, B^{(m-1)}$.

1°. 若 $C', C'', \cdots, C^{(m)}$ 中存在如下子句 $C^{(m_1)}$, 使得 $C^{(m_1)}$ 中每个文字的锁均大于 r_2, 不妨设 $C^{(m_1)}$ 是 $C', \cdots, C^{(m)}$ 中从左到右满足此条件的第一个子句.

令 D_1' 是 D_1 的子演绎，其中心子句序列为 $C', \cdots, C^{(m_1)}$, 边子句序列为 $B', \cdots, B^{(m_1-1)}$.

将 $C' = r_1 L_1$ 恢复成 C_0, 边子句 B_i 如下构成：

$$B_i = \begin{cases} B^{(i)} & \text{当 } B^{(i)} \in S \\ C_0 & \text{当 } B^{(i)} = r_1 L_1 \\ C^{(j)} V (C_0 - \{r_1 L_1\}) & \text{当 } B^{(i)} = C^{(j)}, j < i \end{cases}$$

按照演绎 D_1', 以 C_0 为顶，$B_i(i = 1, \cdots, m_1 - 1)$ 为边子句得演绎结果 C_1, 显然，$C_1 = C^{(m_1)} \vee (C_0 - \{r_1 L_1\})$, C_1 中最小锁为 r_2.

2°. 若不然，则演绎 D_1 中每个中心子句 (除 $C^{(m)} = \square$外) 中的最小锁都小于或等于 r_2, 仍按演绎 D_1, 将 C' 恢复成 C_0, 边子句恢复为 1° 中的 $B_i(i = 1, \cdots, m - 1)$, 得演绎结果 $C_1 = C_0 - \{r_1 L_1\}$.

显然，也有结论：C_1 中最小锁为 r_2.

综合 1° 与 2°, 我们得一个以 C_0 为顶，从 S 推出 C_1 的线性半锁演绎 D_1^*, 并且 C_1 中最小锁为 r_2 和 $r_2 > r_1$.

假如 C_1 是单元子句，则必有 $C_1 = C_0 - \{r_1 L_1\}$, 设 $C_1 = r_2 L_2$, 取 S 中含 $r_2 L_2$ 的子句 C_1^*, 令 $S_2 = (S - \{C_1^*\}) \cup \{r_2 L_2\}$, 于是，由 1) 知，存在以 $r_2 L_2$ 为顶，从 S_2 推出□的线性半锁演绎 D_2, 将 D_1^* 与 D_2 连接起来，得以 C_0 为顶，从 S 推出□的演绎 D, 定理得证.

假如 C_1 不是单元子句，令 r_2L_2 是 C_1 中带锁 r_2 的文字； r_3 是 $(C_1-\{r_2L_2\})$ 中最小锁，显然 $r_3>r_2$. 按照上述方法 2), 我们能得，以 C_1 为顶，从 S 推出 C_2 的线性半锁演绎 D_2^*, 且 C_2 中有最小锁 r_3, 并且 $r_3>r_2>r_1$.

只要 C_2 不是单元子句，就可如此继续下去得以 C_2 为顶，从 S 推出 C_3 的演绎，且 C_3 中最小锁为 r_4, 并且 $r_4>r_3>r_2>r_1$.

由于 S 中文字数有限，故锁有限，所以，最后必得一个以 C_{k-1} 为顶，从 S 推出 C_k 的线性半锁演绎 D_k^*, 并且 C_k 是单元子句.

将 $D_1^*, D_2^*, \cdots, D_k^*$ 连接起来，得以 C_0 为顶，从 S 推出单元子句 C_k 的线性半锁演绎 D^*.

取 S 中含文字 C_k 的子句 C, 令 $S^*=(S-\{c\})\cup\{C_k\}$, 由 1) 知，存在以 C_k 为顶，从 S^* 推出□的线性半锁演绎 D^{**}.

将 D^* 与 D^{**} 连接起来，得以 C_0 为顶，从 S 推出□的线性半锁演绎 D. 定理得证.

提升引理： 设 C_1 和 C_2 是配锁子句， C_1' 和 C_2' 分别是 C_1 和 C_2 的例. 如果 C' 是 C_1' 和 C_2' 的锁归结式，则存在 C_1 和 C_2 的锁归结式 C, 使得 C' 是 C 的例 (见文献 [3]).

定理 8: 如果 S 是配锁子句集，且不同文字配不同锁，则线性半锁归结是完备的.

证明： 设 S 是不可满足的，由 Herbrand 定理，存在不可满足的 S 的基例集 S'. S' 中文字的锁继承了 S 中相应文字的锁. 在此基础上，我们对 S' 中文字重新配锁如下：

设 S 中文字 L 的锁为 r, 即 rL, 设 L 在 S' 中的所有不同基例为 $L', L'', \cdots, L^{(n)}$, 于是这 n 个基文字的锁分别为： $(r,0),(r,1),\cdots,(r,n-1)$. 亦即，在 S' 中这 n 个文字记为： $(r,0)L', (r,1)L'', \cdots, (r,n-1)L^{(n)}$. S' 中文字锁的次序规定如下： $(i,j)<(m,n)$ 当且仅当 $i<m$ 或者 $i=m, j<n$. 于是， S' 中不同文字配上不同锁，由定理 7 知，存在从 S' 推出□的线性半锁演绎 D'.

对 D' 中每一次归结，使用提升引理，并且将提升后文字的锁 (i,j) 换成 i, 显然，若对锁 (i,j) 是锁归结，则对锁 i 而言仍是锁归结，于是最后得从 S 推出□的线性半锁演绎 D, 定理证毕.

参考文献

[1] 刘叙华，姜云飞，定理机器证明，科学出版社， 1987.

[2] Chang, C.L. & Lee, R.C.T., Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, New York, 1973.

[3] 刘叙华，一种新的语义归结，吉林大学学报， No. 2, 1978.

[4] 刘叙华，使用引理的锁语义归结原理，吉林大学学报， No. 4, 1979.

[5] 刘叙华， Horn 集上的输入半锁归结原理，科学通报， No. 16, 1986.

[6] 刘叙华，在算子 Fuzzy 逻辑中带有相等关系的 Fuzzy 推理，中国科学 (A 辑), No. 11, 1987.

[7] 刘叙华，杨玉普，线性半锁归结方法，科学通报， No. 18, 1990, 1432–1434.