因素空间与概念描述

汪 培 庄

(北京师范大学数学系，100875)

FACTOR SPACE AND DESCRIPTION OF CONCEPTS

Wang Peizhuang

(Department of Mathematics, Beijing Normal University, 100875)

ABSTRACT

In fuzzy systems the two very important key questions, the selection of universe and the description of intentions of concepts, have not been solved within fuzzy sets theory. For solving these questions, the author created the concept of factor space.

Define factor space as follow:

DEFINITION: A factor space is a set family $\{X(f)\}(f \in F)$ taking a completed Boolean algebra $F = F(\vee, \wedge, c, 1, 0)$ as index set, and satisfies the following two items:

(2.1) $$X(0) = \{\phi\};$$

(2.2) $$((\forall T \subseteq F)(t, s \in T, t \neq s) \Longrightarrow s \wedge t = 0) \Longrightarrow X(\bigvee_{t\in T} f_t) = \prod_{t\in T} X(f_t)$$

F is called the factor set, $f \in F$ is called factor, $X(f)$ is called the state space of f, 1 is called full factor, and $X(1)$ is called full space.

摘　要

本文介绍作者所提出的因素空间理论，它为概念描述提供了一般的数学框架．本文不加证明地列出了有关的基本数学命题和结论．

作者于1981 年在文[1] 中提出了“因素空间”的原始定义，用以解释随机性的根源及概率规律的数学实质，严格定义是于1982 年在文[2] 中给出的，定义背景已转向模糊集理论及其应用研究．模糊集理论已经取得了迅速的发展，但是，论域的选择是一个十分重

1989 年7 月25 日收到，1990 年6 月15 日定稿．国家自然科学基金资助项目．

要的问题，其重要性也许不亚于隶属度本身的确定. 然而，现有的模糊集理论对此并未提及；它与经典集合论一样只涉及概念外延而不涉及其内涵. 因素空间理论可以较好地解决上述问题，为知识描述提供一个自然合理的描述框架. 目前，这一理论已经被应用于人工智能和决策科学的一些方面. 其中较成功的是张洪敏等基于这一理论所研制成功的诊断型专家系统开发工具STIM[4,6].

§1. 因素与因素的运算

"任何事物都是诸因素的交叉". 一个人可以由他在年龄、性别、身高、体重、职业、学历、性格、兴趣等因素方面的表现而加以确定，人就是上述因素的一种交叉，这种交叉意味着可以建立一种广义的坐标架，事物可以被描述成这广义坐标系中的一个点. 建立这一广义坐标系的关键，是要把握住像年龄、性别等这样一些名称，它们就叫做因素.

物理系统的因素，如长度、质量和时间等较具体，系统越复杂，因素往往越抽象，越难以度量，如"结构"、"功能"、"可行性"、"满意程度、协调性、稳定性"等等，都是较抽象和难于度量的因素. 到了最深层次，有一些最普遍最抽象的因素，如"存在性"、"因果性"、"正负性(阴阳性)"等等，涉及到哲学范畴.

不要把因素和因素的状态和特征相混淆. 温度是因素，不能叫特性，27°C 叫做状态，不能叫做因素，冷、热、温暖等不能叫因素，而是与温度相联系的特征或性质.

一个事物并非从任何因素都可以对之进行考察. 一块石头无从论性别，一朵云彩无从论贡献大小，所谓事物o 与因素f 相关，是指从f 谈论o，有一个状态$f(o)$ 与之对应.

称(O,V) 是一个配对，如果O 与V 分别是由一些对象和由一些因素所组成的集合，且对任意$o\in O$，一切与o 有关的因素都在V 中，而对任意因素$f\in V$，一切与f 有关的事物也都在O 中.

对于一个实际问题，我们总假定有一个配对近似地存在着，对于给定的配对(O,V)，可以在O 与V 之间定义一个关系R:

$$R(o,f)=1 \quad \text{当且仅当}o\text{与}f\text{有关}. \tag{1.1}$$

称R 为相关关系. 为简便计，我们姑且把R 定义为普通的(非fuzzy) 关系. 定义

$$D(f)=\{o|R(o,f)=1\},\quad V(o)=\{f|R(o,f)=1\}. \tag{1.2}$$

因素f 可以看作一个映射，作用在一定的对象o 上可获得一定的状态，记为$f(o)$:

$$\begin{aligned} f: D(f) &\to X(f)\\ o &\to f(o)\end{aligned} \tag{1.3}$$

这里$X(f)=\{f(o)|o\in O\}$ 叫做因素f 的状态空间.

按照状态空间的不同，因素可分为四种类型：

1、可测因素. 像时间、长度、质量等这样一类物理因素以及其它可以测量的因素叫做可测因素，又叫做变量. 可测因素的状态空间一般是实直线R 或n 维欧氏空间R 中的子空间.

2、程度因素. 像必要性、可靠性、满意程度等这一类因素，没有现成的测量手段，但却有一定的程度可言，叫做程度因素，程度因素的状态空间一般是[0, 1].

3、特款因素. 例如职业，其状态空间是

$$X(\text{职业}) = \{\text{教师，医生，研究员},\cdots\}$$

其状态由不同特款组成.

4、二相因素. 有些因素，其状态空间由相反的一组状态组成. 例如，

$$X(\text{“有无生命？”}) = \{\text{有生命，无生命}\},$$
$$X(\text{虚实}) = \{\text{虚，实}\};$$
$$X(\text{阴阳}) = \{\text{阴，阳}\};$$
$$X(\text{“精神—物质”}) = \{\text{精神，物质}\}.$$

这类因素叫做二相因素. 因素本来都应该用名词来表示，但是，二相因素的命名却有些困难. 所以，有时以提问词代替，如“有无生命？”，有时以正反状态的联结词代替，如“精神—物质”.

因素之间存在着以下的关系和运算：

1. 子因素

有时，因素甲的状态一旦确定，因素乙的状态也就随之而确定. 例如因素f = 点的平面坐标，因素g = 点的横坐标，f 的状态决定了g 的状态. 在这种关系下，乙的状态空间可表示为甲的状态空间的子空间.

定义1.1: 因素g 叫做因素f 的真子集，记作$f > g$, 如果$X(g)$ 是$X(f)$ 的真子空间，亦即，存在着非空集合Y, 使$X(f) = X(g) \times Y$, 称g 是f 的子因素，记作$f \geq g$, 如果$f > g$ 或$f = g$.

以$\emptyset$ 表示一种空状态，约定：对任一状态x, 都有

$$(x, \emptyset) = (x) \tag{1.4}$$

定义1.2: 称0 为零因素，如果

$$X(0) = \{\emptyset\} \tag{1.5}$$

显然，0 是(O, V) 中任何因素的子因素，且有

$$X(f) = X(0) \times X(f)$$

2. 因素的析取

定义1.3: 称因素h 是因素f 与g 的析取因素，记作$h = f \wedge g$, 如果$X(h)$ 是$X(f)$ 与$X(g)$ 的最大公共子空间. 亦即，$X(h)$ 是$X(f)$ 与$X(g)$ 的公共子空间，若还有Y 是$X(f)$ 与$X(g)$ 的公共子空间，则Y 必是$X(h)$ 的子空间. 因素g 称为因素族$\{f_t\}(t \in T)$ 的析取，记作$g = \bigwedge_{t \in T} f_t$, 如果$X(g)$ 是$\{X(f_t)\}(t \in T)$ 的最大公共子空间.

定义1.4: 称因素族$\{f_t\}(t\in T)$是两两独立的，如果对任意$t_1, t_2\in T$，都有$f_{t_1}\wedge f_{t_2}=0$.

3. 因素的合取

因素R叫做因素f与g的合取，记作$h=f\vee g$，如果$X(h)$以$X(f)$和$X(g)$为子空间，并且是这样的空间中的最小者．因素g叫做因素族$\{f_t\}(t\in T)$的合取，记作$g=\bigvee_{t\in T}f_t$，如果$X(g)$以$X(f_t)(t\in T)$为子空间，并且是这样的空间中的最小者．

4. 因素的减法

定义1.5: 因素h叫做因素f与g之差，记作$h=f-g$，如果$(f\wedge g)\vee h=f$.

显然有

命题1.1: 对任意$f,g\in V$，若$f\vee g$存在，则

$$X(f\vee g)=X(f-g)\times X(f\wedge g)\times X(g-f) \tag{1.6}$$

§2. 因素空间的公理化定义

为了知识描述的需要，应当建立一种相当广泛的坐标体系，这就是本节要介绍的因素空间，它是在文[2]中最早以公理化的形式给出的．

定义2.1: 一个因素空间是以一个完全的布尔代数$F=F(\vee,\wedge,c,1,0)$为指标集的集合族$\{X(f)\}(f\in F)$，满足

$$X(0)=\{\emptyset\} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&((\forall T\subseteq F)(t,s\in T,t\neq s\Longrightarrow s\wedge t=0)\\&\Longrightarrow X(\bigvee_{t\in T}f_t)=\prod_{t\in T}X(f_t)\end{aligned} \tag{2.2}$$

F叫做因素集，$f\in F$叫做因素，$X(f)$叫f的状态空间，1叫全因素，$X(1)$叫全空间．

例1，取$S_n=\{1,2,\cdots,n\}$，取$F=\mathcal{P}(S_n)=\{f|f\subseteq S_n\}$对任意$f\in F$，$X(f)=\prod_{i\in f}X(i)$，约定$\prod_{i\in\emptyset}X(i)=\{\emptyset\}$，则$\{X(f)\}(f\in F)$是一个因素空间．

例2，设(O,V)是一个配对，F是V的一个子集，它对因素的(任意指标集的)析取、合取和因素的减法均封闭，记

$$1=\bigvee_{f\in F}f,\quad f^c=1-f\quad(f\in F) \tag{2.2}$$

则$\{X(f)\}(f\in F)$是一个因素空间．

例3，给定集合S，设$F=\{S,\emptyset\}$，F是一个完全的布尔代数．$1=S$，$0=\emptyset$．给定$X(S)$，则$\{X(S),\{\emptyset\}\}$构成一个因素空间．由于$\{\emptyset\}$可以视为一个多余符号，故这个因素空间蜕化成一个状态空间$X(S)$．

现代控制论中的状态空间、模式识别中的特征空间和参数空间、现代物理中的相空间、医疗诊断中的症候空间等都是本文状态空间的特殊情形．由例3可知，它们都被因素空间所概括．比上述概念更深化的是，因素空间不是一个固定的状态空间，而是一族状态空间．它可以被看作是一个可变的状态空间或是一个维度可变的状态空间．“变维”是因素空间的核心思想之一．在知识表示技术中，它是信息压缩、灵活转换的依据．

§3. 概念的外延与内涵

描述概念, 有外延与内涵两种方式, 符合概念的全体对象所构成的集合叫做这个概念的外延. 概念的本质属性叫做这个概念的内涵. 经典集合论可以描述清晰概念的外延, fuzzy 集合论可以描述一般概念的外延. 但是, 没有很好地解决论域的选择和变换这一重要问题. 内涵的表示则一直是数学研究的一块禁地. 本节将对上述问题展开论述.

称因素集F 对于我们所要讨论的一组概念是足够的, 如果这组概念所涉及的因素都被F 所包含. 这时, 称O 是这组概念(对象) 的论域. 概念α 在O 中的外延是由O 的一个 fuzzy 子集A 所表示的, A 是一个映射,

(3.1)
$$\begin{aligned} A: O &\to [0,1] \\ o &\to A(o) \end{aligned}$$

$A(o)$ 叫做o 对概念α 的隶属度.

定义3.1: 设$F \subseteq V$, $\{X(f)\}(f \in F)$ 是一个因素空间. 又设α 是F 可以足够描述的一个概念, 具有外延A. 对任意$f \in F$, 记

(3.2)
$$\begin{aligned} & f(A): X(f) \to [0,1] \\ & (f(A))(x) \triangleq \mathrm{Sup}\ \{A(o) | f(o) = x\}, \quad (x \in X(f)) \end{aligned}$$

叫做α 在表现论域$X(f)$ 上的表现外延.

定义3.2: 设$f, g \in F$, $f \geq g$, 记

(3.3)
$$\begin{aligned} & \downarrow_g^f: \ X(f) \to X(g) \\ & \downarrow_g^f (x, y) \triangleq x \quad (x \in X(g),\ y \in X(f-g)) \end{aligned}$$

叫做从f 到g 的投影映射. 对$X(f)$ 的任一fuzzy 子集B, 记

(3.4)
$$(\downarrow_g^f B)(x) \triangleq Sup\{B(x, y) | y \in X(f-g)\}, \ (x \in X(g)),$$

称$\downarrow_g^f B$ 为B 从f 向g 的投影.

命题3.1: 设$f, g \in F$, $f \geq g$, A 是概念α 的外延, 则α 在g 中的表现外延等于它在f 中表现外延向g 的投影:

(3.5)
$$\downarrow_g^f f(A) = g(A)$$

定义3.3: 设$f, g \in F$, $f \geq g$, 对于$X(g)$ 的任一fuzzy 子集B, 记

(3.6)
$$(\uparrow_g^f B)(x, y) \triangleq B(x), (x \in X(g), y \in X(f-g))$$

叫做从g 到f 的柱体扩张.

命题3.2: 设$f, g, h \in F$, $f \geq g \geq h$, 有

(3.7)
$$\downarrow_h^g (\downarrow_g^f B) = \downarrow_h^f B \quad (B\text{是}X(f) \text{ 的 } fuzzy\text{子集});$$

(3.8) $$\uparrow_g^f (\uparrow_h^g B) = \uparrow_h^f B \quad (B\text{是}X(h)\text{ 的 }fuzzy\text{子集});$$

(3.9) $$\downarrow_g^f (\uparrow_g^f B) = B \quad (B\text{是}X(g)\text{ 的 }fuzzy\text{子集});$$

(3.10) $$\uparrow_g^f (\downarrow_g^f B) \supseteq B \quad (B\text{是}X(f)\text{ 的 }fuzzy\text{子集});$$

(3.10) 式说明先投影后扩张不一定能够还原. 一般来说要变大, 什么时候能够还原呢? 这有

命题3.3: (3.10) 成立的充要条件是

(3.11) $$(\forall x \in X(g),\ \ \forall y \in X(f-g))\ \ B(x,y) = B(x)$$

如图1 所示, (3.11) 表示B 在y 处的截集与y 在$X(f-g)$ 中的变化无关. 这说明因素$f-g$ 的变异丝毫不影响B, B 的信息已经完全被因素g 所包容了.

定义3.4: 设A 是概念α, 在对象论域O 中的外延, $B=1(A)$, 是$X(1)$ 的一个非空真子集. 称因素f 对α 是充分而因素f^c 对α 是多余的, 如果

(3.12) $$\uparrow_f^1 (\downarrow_f^1 B) = B$$

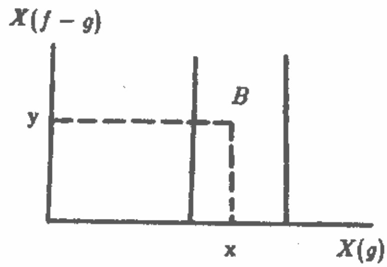

图 1

当$B=X(1)$ 或B 是空集时, 称任意$f \in F$ 对α 都是充分的, 同时也都是多余的.

定义3.5: 设1 (A) 是$X(1)$ 的非空真子集, 记

(3.13) $$r(\alpha) = r(A) \triangleq \wedge\{f | f \in F,\ f\text{对}\alpha\text{是充分的}\}$$

称之为概念α 的秩. 当$1(A) = X(1)$ 或$1(A) = \emptyset$ 时, 定义α 的秩为0.

概念的秩是一个因素, 它是充分因素的下确界(按析取意义), 凡比它"大" 的因素对于该概念必是充分的, 而比它"小" 的因素便不完全充分了. 它的余因素是多余因素的上确界(按合取意义), 凡比其"小" 的因素对该概念必是多余的, 而比其"大" 的因素便不是无关的了.

当因素比秩小的时候, 它已不是完全充分的了. 但应用的需要, 恰恰要寻找那样的因素, 它很"小", 维度很低, 对于刻划概念尽管不是完全充分的, 但却八九不离十, 这种因素的提取可以高效率地实现信息压缩, 为此, 需要引入充分度的概念.

定义3.6 (充分度的公理化定义): $\{X(f)\}(f \in F)$ 是一个因素空间, $\mathcal{F}(X(1))$ 是$X(1)$ 的全体fuzzy 子集所构成的集合, 称映射

$$S: F \times \mathcal{F}(X(1)) \to [0,1]$$

为一个充分性测度，如果满足以下四条公理：

(S.1) $$(\forall f,g\in F)(f\geq g\Longrightarrow S(g,\downarrow_g^f B)\leq S(f,B));$$

(S.2) $$(\forall f\in F)(S(f,B)=1\Longrightarrow \exists x_1,x_2\in X(f),\ B(x_1)=1,B(x_2)=0);$$

(S.3) $$(\forall f\in F)(S(f,B)=0\Longrightarrow \forall x\in X(f),B(x)\equiv \text{常数});$$

(S.4) $$(\forall f\in F)(S(f,B)=S(f,B^c)).$$

在这个定义中，(S.1) 意味着因素比其子因素更充分. 或者说，因素越大越充分. (S.2) 与(S.3) 意味着，因素变异所引起的影响越大，充分性越大. (S.4) 是指任何因素对正反概念的充分性程度是一样的.

所谓内涵，是对本质属性的一种描述. 本质属性所涉及到的因素应当具有这样两方面的性质：一方面，充分性程度要尽可能高；另一方面，因素本身要分解得尽可能地小.

定义3.8: 设概念α 在O 上的外延是A, F 对于α 是足够的因素集，$\{X(f)\}(f\in F)$ 是一个因素空间，称命题组“$f_i(o)$ 是$f_i(A)$” $(i=1,\cdots,n)$ 是概念α 的(ε,δ) 内涵，如果$\{f_i\}(i=1,\cdots,n)$ 两两独立，且

(3.15) $$S(\bigvee_{i=1}^{n} f_i,1(A))\geq 1-\varepsilon;$$

(3.16) $$\|(\bigvee_{i=1}^{n} f_i)(A)-\prod_{i=1}^{n} f_i(A)\|\leq \delta$$

此处$\|\ \|$ 是两个fuzzy 集合之间距离的某种量度. $\prod_{i=1}^{n}$ 是fuzzy 集的笛卡尔乘积：

(3.17) $$\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i(A)\Big)(x_1,\cdots,x_n)\triangleq \inf_{1\leq i\leq n} f_i(A)(x_i).$$

在定义中，ε 越小，内涵的充分性越大，δ 越小，内涵的分解越合理.

§4. 开关因素及其层次结构

因素空间提供了一个很好的框架，但是一个因素空间究竟有多大的容量？任意一个知识库都可以纳入因素空间的框架吗？两个因素空间是否可以归并成一个新的因素空间？回答是否定的. 举一个反例，设f = 生命性，g = 性别，$X(f)$ = { 有生命，无生命}，$X(g)$ = { 雌，雄}. 如果f,g 可以放进同一个因素空间，则可以对它们进行合取，得$f\vee g$，其状态空间应是$X(f\vee g)=X(f)\times X(g)$ = { 雌有生命，雌无生命，雄有生命，雄无生命}. 但

是，什么叫雌无生命？什么叫雄无生命？对于一块石头何以论雌雄？可见f 与g 是无法合取的. 性别是有生命体特有的因素，有无生命比性别要高一个层次，为此，需要引入以下概念

定义4.1: 给定配对(O,V), 因素$f,g\in V$, 称f 生出g, 如果$D(f)\supseteq D(g)$, 且存在$x\in D(f)$, 使$f(D(g))=x$. 亦即，对任意$o\in D(g)$, 有$f(o)=x$.

例如f = 生命性，g = 性别，由于能够谈论性别的事物必是有生命体，故$D(g)\subseteq D(f)$, 且$f(D(g))$ = 有生命，故因素f 生出因素g.

在V 上定义一个二元关系$\searrow$: $f\searrow g$ 当且仅当$f=g$ 或f 生出g, 可以证明

命题4.1: $(V,\searrow)$ 是一个偏序集.

定义4.2: 称因素$f\in V$ 为一个开关因素，如果$X(f)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, 且有$g_i\in V(i=1,\cdots,n)$ 使有$f\searrow g_i$, $f(D(g_i))=x_i(i=1,\cdots,n)$. 这一开关因素记作$f:g_i(i=1,\cdots,n)$. 当$n=2$ 时，称f 为简单开关因素. V 中全体开关因素的集合记为W.

命题4.2: $(W,\searrow)$ 是一个偏序集.

§ 5. 类别与因素空间藤

设$f:g_i(i=1,\cdots,n)$ 是一个开关因素，$X(f)=\{x_1,\cdots,x_n\}$, 显见$f^{-1}(x_i)=\{o|o\in V,f(o)=x_i\}$ $(i=1,\cdots,n)$ 是$D(f)$ 的一个划分，称之为f– 类别划分. 每一$f^{-1}(x_i)$ 称为一个类别，以类别为外延的概念称为类别概念. 例如f = 生命性，$X(f)$ = { 有生命，无生命}, f^{-1}(有生命) 与f^{-1}(无生命) 分别构成生物与无生物两大类别.

前节已叙及，$(W,\searrow)$ 是一个偏序集，每一$f\in W$, “悬挂” 着一串类别. 本节将要证明，每一类别都对应着一个因素空间.

对每一类别C, 记

$$V(C)=\{f|\forall o\in C,o\in D(f)\}=\bigcap_{o\in C}V(o)\tag{5.1}$$

$V(C)$ 表示类C 中对象都有意义的公共因素的集合.

命题5.1: 对于配对(O,V), 我们有

$$f\in V(C),\ f\geq g\Longrightarrow g\in V(C);\tag{5.2}$$

$$f,g\in V(C)\Longrightarrow f\vee g,f\wedge g,f-g\in V(C)\ \text{只要它们有意义;}\tag{5.3}$$

$$\{f_t\}(t\in T)\subseteq V(C)\Longrightarrow \bigvee_{t\in T}f_t,\bigwedge_{t\in T}f_t\in V(C)\text{只要它们有意义;}\tag{5.4}$$

$$V(\bigcup_{t\in T}C_t)=\bigcap_{t\in T}V(C_t);\tag{5.5}$$

$$V(\bigcap_{t\in T}C_t)\supseteq\bigcup_{t\in T}V(C_t).\tag{5.6}$$

现在，我们结合一个具体例子来考察类别与因素空间的关系.

设 f_0 = 人的性别，可见判明，这是一个开关因素，它把人分成了男女两大类别. 按 (5.5) 知

(5.7) $\qquad V(人) = V(男人) \cap V(女人)$

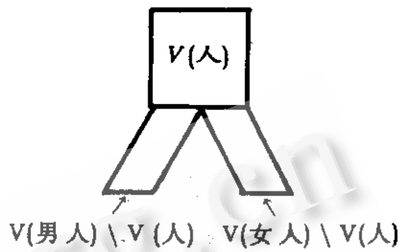

图 2

V (男人) \ V (人) 是男子特有因素的集合，V (女人) \ V (人) 是女人特有因素的集合. 从图2可知，随着类别的分细，类公因素的集合便要向外伸张. 伸张出来的这些因素，是未分前的类所不能公有而只为某一子类所公有的. 可以证明:

(5.8) $$(V(男人) \setminus V(人)) \cap (V(女人) \setminus V(人)) = \emptyset$$

这说明随着类别的分细而新增加的子类公因素是彼此分离的. 那么因素 f_0, 作为划分男女的关键因素，它的位置又在何处呢？V(人) 中的因素究竟包含哪些成份？

在 V(人) 中包含有一些开关因素，它们是联系于比人更大的类别的，例如，区别人与动物的开关因素，区别动物与植物的开关因素，区别生物与无生物的开关因素，区别物质与精神的开关因素. 相对于人来说，它们叫做上位开关因素. 从 V(人) 中去掉所有上位开关因素，去掉所有与这些开关因素不独立的因素，剩下的因素集记为 V^* (人), 记

(5.9) $$\hat{f}(人) = \vee\{f | f \in V^*(人)\}$$

可以认为，在 $\hat{f}$(人) 的子因素之间不再有层次差别，它们之间可以任意进行因素的析取、合取和减法运算. 于是，可以生成一个因素空间 $\{X(f)\}(f \in F(人))$. 这里

(5.10) $$F(人) = \{f | f \le \hat{f}\}$$

因素空间 $\{X(f)\}(f \in F(人))$ 是足以表现男人和女人这一对概念的，记它们在这个因素空间中的秩为 r, 则 $X(r)$ 便充分表现了男女划分的信息. 设男人在 $X(r)$ 中的表现外延是 B, 则女人在 $X(r)$ 中的表现外延便是 B^c. 可以看到，若把 B 缩成一个状态“男人”, 把 B^c 缩成一个状态“女人”, 则 $X(r)$ 便变成{ 男人，女人}, 这就是因素 f_0. 所以，f_0 的位置出自 V(人), 它由男、女在因素空间 $\{X(f)\}(f \in F(人))$ 中的秩 r 经过约缩而得. 为了简便，可以把 f_0 与秩 r 视为一体.

对于类 C, 称非空因素 $e \in V(C)$ 为其中的一个基元，如果对任意非空因素 $f \in V(C)$, 都不可能有 $f < e$. $V(C)$ 中全体基元的集合记为 $\hat{V}(C)$, 称为 $V(C)$ 的基元集. 对任意 $\{e_t\}(t \in T) \subseteq \hat{V}(C)$, 一方面把它看作子集，另一方面当 $\bigvee_{t\in T} e_t$ 有意义时，又把 $\{e_t\}(t \in T)$ 看做因素 $\bigvee_{t\in T} e_t$. 把集合运算与析取、合取、减法等运算也互相对应起来. 下面的一些公式均据此理解.

现在，让我们来看一看因素空间随类别加细而发生的变化情况. 从 $\hat{f}$(人) 中减去秩 r, 剩下的是人与性别无关的因素. 从 $\hat{V}$(男人) 中减去 $\hat{V}$(人), 剩下的是男人内部的一些因

素．后者虽然是从性别这一开关因素下生出来的，比$\hat{f}$(人)$-r$ 中的因素似乎低了一个层次．但是，由于$\hat{f}$(人)$-r$ 与性别无关，所以，$\hat{f}$(人)$-r$ 与$\hat{V}$(男人)$-\hat{V}$(人) 这两部分因素之间仍可以自由地析取与合取．记

$$\hat{f}(\text{男}) = (\hat{f}(\text{人}) - r) + (\hat{V}(\text{男人}) - \hat{V}(\text{人})) \tag{5.11}$$

$$F(\text{男}) = \{f | f \le \hat{f}(\text{男})\} \tag{5.12}$$

则$\{X(f)\}(f \in F(\text{男}))$ 是男人类所联系的因素空间．这里"+" 表示独立因素的合取或不交集合的并．类似地，记

$$\hat{f}(\text{女}) = (\hat{f}(\text{人}) - r) + (\hat{V}(\text{女人}) - \hat{V}(\text{人})) \tag{5.13}$$

$$F(\text{女}) = \{f | f \le \hat{f}(\text{女})\} \tag{5.14}$$

则$\{X(f)\}(f \in F(\text{女}))$ 是女人类所联系的因素空间．

通过一定的数学论证，我们可以一般地得到：

命题5.1: 设类C 划分成类$A_i(i = 1, \cdots, n)$, $\{X(f)\}(f \in F(C))$ 是与类C 相联的因素空间．$\hat{f}(C) = \vee\{f | f \in F(C)\}$, 设$r = \mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n} r(A_i, C)$, 其中$r(A_i, C)$ 是类A_i 在类C 的因素空间中的秩，则与类A_i 相联系的因素空间$\{X(f)\}(f \in F(A_i))$ 可以确定如下：

$$\hat{f}(A_i) = (\hat{f}(C) - r) + (\hat{V}(A_i) - \hat{V}(C)) \tag{5.15}$$

$$F(A_i) = \{f | f \le \hat{f}(A_i)\} \tag{5.16}$$

命题中的(5.15) 式还可稍作如下变动：

$$\hat{V}(A_i) - \hat{f}(A_i) = (\hat{V}(C) - \hat{f}(C)) + r \tag{5.17}$$

这是一个递推公式，由此可得

命题5.12: 给定类别的递降序列$C_1 > C_2 > \cdots > C_n$, 有

$$\hat{V}(C_n) - \hat{f}(C_n) = (\hat{V}(C_1) - \hat{f}(C_1)) + \sum_{i=2}^{n} r(C_i; C_{i-1}) \tag{5.18}$$

特别地，若有$\hat{V}(C_1) = \hat{f}(C_1)$, 则

$$\hat{f}(C_n) = \hat{V}(C_n) - \sum_{i=2}^{n} r(C_i; C_{i-1}). \tag{5.19}$$

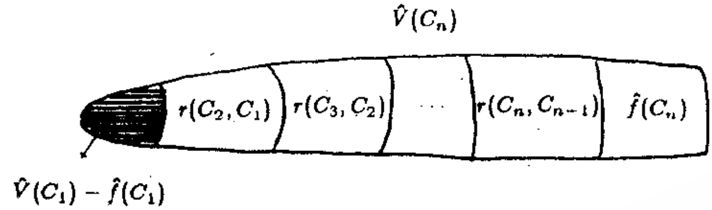

图3

(5.19) 式意味着，如果C_1 是一个原始的大类，则类C_n 所联系的因素空间的全因素$\hat{f}(C_n)$ 等于C_n 的类基元集减去C_n 及C_n 的各个上位类别在上位因素空间中的秩和. 图3形象地描绘了这一关系.

定义5.1: 给定配对(O,V), $(W,\searrow)$ 是V 中的开关因素偏序子集，对W 中的每一开关因素f, 每一f– 类别都联挂着一个因素空间. W 与所联挂的因素空间的全体，叫做一个因素空间藤.

因素空间藤将是因素空间理论处理各类问题的最普遍最基本的框架. 这些问题包括：概念的自动生成、模式识别、不确定性推理、专家系统、层次决策、层次规划、层次控制等等.

参考文献

[1] 汪培庄，随机微分方程，统计物理学进展(郝柏林，于禄等编著), 科学出版社，1981 年.

[2] 汪培庄，管野道夫，因素场与fuzzy 集的背景结构，模糊数学，1982 年第2 期(45–54).

[3] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965).

[4] H. M. Zhang, Introduction to an Expert Systems Shell—STIM, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 36, No. 1 (1990), 167–180.

[5] X. T. Peng, A. Kandel, P. Z. Wang, Analysis of Fuzzy Reasoning by Factor Spases (in Press).

[6] Hongmin Zhang, Feng-ming Zhang & En-ze Su, An Expert Systems with Thinking in Images, Preprints of 2nd IFSA Congress, Tokyo (1987).

[7] 汪培庄，张大志，思维的数学形式初探，高校应用数学学报，Vol. 1, No. 1 (1986), 89–95.

[8] P. Z. Wang, Factor Space, in Approximate Reasoning Tools for Artificial Intelligence, J. L. Verdegay M. Delgado (eds.) Verlag (1990).

[9] P. Z. Wang, A Factor Spaces Approach to Knowledge Representation, Fuzzy Sets and Systems Vol. 36 (1990), 113–124.

[10] A. Kandel, X. T. Peng, Z. Q. Cao, P. Z. Wang, Representation of Concept by Factor Spaces, Cyberneties and Systems: Vol. 21 (1990), 43–57.