具有代数算子的λ演算系统的模型构造*

陆汝占　张政　孙永强

(上海交通大学 计算机科学与工程系)

THE CONSTRUCTION OF A MODEL OF THE LAMBDA CALCULUS SYSTEM WITH ALGEBRAIC OPERATORS

Lu Ruzhan　Zhang Zheng and Sun Yongqiang

(Department of Computer Science and Engineering, Shanghai Jiao Tong University)

ABSTRACT

In this paper, a lambda system with algebraic operators called lambda-plus system is introduced. After giving the definition of the system, we present a sufficient condition for being a model of the system. Finally, a model of such system is constructed.

摘　要

本文介绍了一个带有代数算子的λ演算系统，并给出了该系统模型的定义，证明了一个满足该定义的充分条件，最后构造了该系统的一个模型。

§1. 引　言

λ演算是一个用来描述算子及其组合性质的形式理论，它是函数式程序设计的基础。对于纯λ演算，目前已经有较为完整的理论，但纯λ演算系统较为简单，其表达能力有限，函数式语言通常是在纯λ演算系统中加入一些初始常数构成的，这些系统能力很强，但这些系统变化很大，缺乏一种统一的理论。因此有必要寻求一种更为一般的系统。[1]提出了一种带代数算子的λ演算系统，它扩展了抽象的概念，并给出了更为一般的推理规则。它可以作为函数式程序设计语言最一般的基础。这个系统有如下特点:

* 1989年8月5日收到，1989年10月15日定稿，本课题由国家自然科学基金资助。

1) 将带有常数λ演算系统统一起来。2) 结构及结构抽象的概念使得某些计算更方便更有效。3) 更自然更清楚地描述和表达数据结构及操作。

[1] 中给出了系统的语法结构定义。本文主要讨论它的语义模型，首先给出模型的定义，然后构造了一个该系统的模型。

本文所引用的基本概念如类型、替换、连续代数等，参见[3]。

§2. 带有代数算子的λ演算系统

设$N=\{0,1,2,\cdots\}, \bar{n}=\{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$。两元组$(F,\varphi)$称为一个标记，其中，F是一个非空符号集，$\varphi$是F到N的一个映射。对任意$m\in N, F_n=\{f\in F|\varphi(f)=n\}$。$F_n$的元素称为n元代数算子。

定义1. 设vars为一变量集，$\sum$为一标记，vars上的项集$T_{\sum}(\text{vars})$递归定义如下：

1) $vars\sqsubseteq T_{\sum}(vars)$

2) 若$f\in F_0$，则$f\in T_{\sum}(vars)$

3) 若$f\in F_n$，且$t_0,\cdots,t_{n-1}\in T_{\sum}(vars)$则$f(t_0,\cdots,t_{n-1})\in T_{\sum}(vars)$

定义2. $\sum$代数规范是一个$\sum$等式集，每个等式具有形式$l=r$，其中$l,r\in T_{\sum}(vars)$。

定义3. 设$f\in F_{\bar{n}}$，对任意$i\in\bar{n}$，如果存在$p_f^i(y_0,\cdots,y_m)\in T_{\sum}(vars)$，满足$\{y_0,\cdots,y_m\}\cap\{x_0,\cdots,x_{n-1}\}=\phi$其中$m$是一个由$i$及$f$决定的自然数，下述等式可由E推出：$p_f^i(y_0,y_{i-1},\cdots,f(x_0,\cdots,x_{n-1}),y_{j+1},\cdots,y_m)=x_i$则$f$称为以$\{<p_f^i(y_0,\cdots,y_m),j>|i\in\bar{n}\}$为代表的结构算子，否则$f$称为非结构算子。

定义4. 代数规范E上的结构类型集S(E)及结构类型α上的自由变量集$V(\alpha)$递归定义如下：

1) 如果$x\in vars$，则$x\in S(E)$且$V(x)=\{x\}$

2) 如果$\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}\in S(E), n\in N$且对任意$i,j\in\bar{n}, V(\alpha_i)\cap(\alpha_j)=\phi$或者$i=j$，则对任意$f\in\Omega_n$($\Omega_n$是n元结构算子集)。

$f(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})\in S(E)$且$V(f(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}))=\bigcup_{i\in n}V(\alpha_i)$

定义5. λ项集$T_{\sum}(vars)$定义如下：

1) $x\in vars$，则$x\in T_{\sum}(vars)$

2) $f\in F_0$，则$f\in T_{\sum}(vars)$

3) 若$M_0,\cdots,M_{n-1}\in T_{\sum}(vars), f\in F_n$，则$f(M_0,\cdots,M_{n-1})\in T_{\sum}(vars)$

4) 若$M\in T_{\sum}(vars)$且$\alpha\in S(E)$，则$\lambda_\alpha^+ M\in T_{\sum}(vars)$

定义6. 设$M\in T_{\sum}(vars)$. M的一个出现是一个N^+上的字ϖ, N^+是非负整数集，ϵ是空字，定义：

1) $M/\varepsilon=M$

2) $f(M_0,\cdots,M_{n-1}/i\varpi=M_{i-1}/\varpi$

3) $\lambda^+_\alpha, M/1\varpi = \lambda/\varpi$

4) $\lambda^+_\alpha, M/2\varpi = M/\varpi$

定义 7. 形式系统 $\lambda^+(E)$ 定义如下:

(I) 公理部分

1) 若 $0 \le j < k, i_j \in \bar{n}, p(x_0, \cdots, x_{n-1}) = q(x_{i0}, \cdots, x_{i_{k-1}})$ 可由 E 推出，则对任意 $M_i \in T_{\sum}(vars), i \in \bar{n}, p(M_0, \cdots, M_{n-1}) = q(M_{i_0}, \cdots, M_{i_{k-1}})$ 成立。

2) 若 M 关于 α 可替换，则 $(\lambda^+_\alpha, M). N = M[\alpha \leftarrow N]$($\beta$ 规则)

3) 若 $\alpha, \beta \in S(E)$ 且 $\alpha = \beta/\varpi, y$ 是一新变量，则

$\lambda^+_\beta, M = \lambda^+_{\beta(\omega \leftarrow y)}. M[\alpha \leftarrow y]$　($g\alpha$ 规则)

(II) 推理规则

1) $M = M$

2) 若 $M_1 = M_2, M_2 = M_3$, 则 $M_1 = M_3$

3) 若 $M_1 = M_2, \alpha \in S(E)$ 则 $\lambda^+_\alpha.M_1 = \lambda^+_\alpha.M_2$

4) 对任意 $i \in \bar{n}, M_i = M'_i, f \in F_n$, 则 $f(M_0, \cdots, M_{n-1}) = f(M'_0, \cdots, M'_{n-1})$

5) 若 $M = M'$ 则 $N \cdot M = N \cdot M'$

6) 若 $M = M'$ 则 $M \cdot N = M'N$

7) 若 $M = N$ 则 $N = M$

β 规则及 $g\alpha$ 规则中的 $M[\alpha \leftarrow N]$ 意为: 对每一个 M 中的变量 x, 若 $x \in V(\alpha)$, 则 x 转换成 x 的代表 α, 然后用 N 替换结构类型 α。

若 $\alpha, \beta \in S(E)$ 且 $\beta = \alpha/\omega$ 则 $\alpha(\omega \leftarrow \beta)$ 定义为:

1) $\alpha(\varepsilon \leftarrow \beta) = \beta$

2) $F(\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1})(i\omega \leftarrow \beta) = F(\alpha_0, \cdots, \alpha_{i-1}(\omega \leftarrow \beta), \cdots, \alpha_{n-1})$

例如，给出下列代数规范:

$Fst(<x, y>) = x$

$Snd(<x, y>) = y$

我们计算项 $x[<x, y> \leftarrow z]$ 及 $<<x, y>, z> (12 \leftarrow \alpha)$: $x[<x, y> \leftarrow, z] = Fst(<z, y>)[<x, y> \leftarrow z] = Fst(z)$ $<<x, y>, z> (12 \leftarrow \alpha) = << x, y > (2 \leftarrow \alpha), z >=<< x, y, (\varepsilon \leftarrow \alpha) >, z >=<< x, \alpha >, z >$

§3. 系统模型定义

定义 8. 设 $\sum$ 为标记 $< F, \varphi >$, 两元组 $< M, \rho_M >$ 称为 $\sum$ 代数当且仅当:

1) M 是非空集

2) 若 $f \in F_0, \rho_M(f) \in M$

3) 若 $f \in F_n, n > 0, \rho_M(f)$ 是一个从 M^n 到 M 的映射。

定义 9. 设 $< A, \rho_A >, < B, \rho_B >$ 为两个 $\sum$ 代数，若 h 是 A 到 B 的映射且满足下列条件，则 h 是 $\sum$ 同态映射。

1) 若 $f \in F_0$, 则 $h(\rho_A(f)) = \rho_B(f)$

2) 若 $f \in F_n, n > 0$ 且 $a_i \in A, i \in \bar{n}$, 则

$h(\rho_A(f)(a_0, \cdots, a_{n-1})) = \rho_B(f)(h(a_0), \cdots, h(a_{n-1}))$

定义10. 设$< M,\rho_M$为$\sum$代数，对任意映射$h: vars \to M$若它的扩展$h^*:< T_{\sum}(vars),\rho_{\sum} > \to < M,\rho_M >$满足对E中的所有$l=r, h^*(l)=h^*(\gamma)$成立，则$< M,\rho_M >$称为E的一个模型，其中E是$\sum$代数规范。

定义11. 设$< M,\rho_M,\le_M >$为三元组，其中$< M,\rho_M >$是$\sum$代数，$\le_M$满足下列条件:

1) 存在$T,\perp\in M$，对所有$x\in M, x\le_M T, \perp\le_M x$

2) 对$f\in F_n, n>0$，若$x_i\le_M y_i, i\in\bar{n}$则

$\rho_M(f)(x_0,\cdots,x_{n-1})\le_M\ \rho_M(f)(y_0,\cdots,y_{n-1})$

我们称$< M,P_M,\le M >$为连续$\sum$代数。

定义12. 设$< M,\rho_M\le_M >$为连续$\sum$代数，$< M,\rho_M >$是E的一个模型，则$< M,\rho_M,\le_M >$称为E的一个连续模型。

定义13. 系统模型定义为三元组$< D,\cdot,[\![\ ]\!]$，其中$[\![\ ]\!]$是一个从λ项$T_{\sum}(vars)$及变量赋值ρ到D的一个映射，并且满足下列条件:

1) $[\![\,]\!]_\rho=\rho(x)$

2) $[\![P\cdot Q]\!]_\rho [\![P]\!]_\rho\cdot[\![Q]\!]_\rho$

3) $[\![(\lambda^+_\alpha.P)\cdot]\!]_\rho=[\![P]\!]_{[pT_\alpha(x)\{x\leftarrow N\}/\vec{x}]_\rho}$，其中$\vec{x}$代表$V(\alpha)$中的所有变量，$P(T_\alpha(x)$是$\alpha$上的选择算子，它的定义为:

a) $PT_x(x)=x$

b) 若$\alpha=F(\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1})$且$x\in\alpha_i$，则

$PT_\alpha(x)=PT_{\alpha_i(x)\{x\leftarrow P^i_F(\vec{y_F},x,\vec{Z}_F)\}}$，其中$\vec{y}_F,\vec{Z}_F$是对应于结构算子代表中变量的新变量序列。

4) 若所有$x\in FV(M),\sigma(x)=\rho(x)$则$[\![M]\!]_\alpha=[\![P]\!]_\rho$

5) $[\![\lambda^+_\beta\cdot M]\!]_\rho=[\![\lambda^+_{\beta(\omega\leftarrow y)}.M[\alpha\leftarrow y]]\!]_\rho$其中$\alpha,\beta\in S(E)$且$\alpha=\beta/\omega$，$y$不在$M$及$\alpha$中出现。

6) 若对所有$d\in T_{\sum}(vars)$，$[\![M[\alpha\leftarrow d]]\!]_\rho=[\![N[\alpha\leftarrow d]]\!]_\rho,\alpha\in S(E)$，则$[\![\lambda^+_\alpha.M]\!]_\rho=[\![\lambda^+\alpha.N]\!]_\rho$

7) 若$M=N$可由E推出，则$[\![M]\!]_\rho[\![N]\!]_\rho$

8) 若对所有$i\in\bar{n}$，$[\![M_i]\!]_\rho=[\![N_i]\!]\rho$，$f\in F_n$，则$[\![f(M_0,\cdots,M_{n-1}]\!]_\rho=[\![f(N_0,\cdots,N_{n-1}]\!]_\rho$

下面的定理给出了一个系统模型的充分的条件。

定理14. 设$< D,\rho_D\le >$为E的一个连续模型，若$< D,\cdot,[\![\,]\!] >$是一个纯λ演算模型，则$< D,\cdot,[\![\,]\!]^+ >$是λ^+演算系统模型，其中$[\![\,]\!]^+$定义如下:

1) $[\![\,]\!]^+_\rho[\![\,]\!]_\rho$若$M$是纯λ项

2) $[\![\lambda^+_\alpha.]\!]^+_\rho=[\![\lambda_x.M[\alpha\leftarrow x]]\!]^+_\rho,\alpha\in S(E)$且$x$是新变量

3) $[\![f(M_0,\cdots,M_{n-1}]\!]^+_\rho=\rho_D(f)\ \ [\![M_0]\!]^+_\rho,\cdots,[\![M_{n-1}]\!]^+_\rho)$，其中$f\in F_n$.

4) $[\![\,]\!]^+_\rho=\rho_D(f)$，其中$f\in F_0$.

证明：只需验证定义 13 中的 8 个条件即可。为了使证明简洁，这里只验证条件 4，对任意 $x \in FV(m)$，若 $\sigma(x) = \rho(x)$ 则 $[\![\,]\!]^+_\sigma$ $[\![\,]\!]^+_\rho$。我们对 M 的结构进行归纳：

1) 若 M 是纯 λ 项，则 $[\![\,]\!]^+_\sigma = [\![\,]\!]_\sigma 2 [\![\,]\!]_\rho = [\![\,]\!]^+_\rho$.

2) 若 $M = f \in F_0$，则 $[\![\,]\!]^+_\sigma = \rho_D(f) = [\![\,]\!]^+_\rho$

3) 若 $M = (M_0, \cdots, M_{n-1})$ 且任意 $i \in \bar{n}$，$[\![M_i]\!]^+_\sigma = [\![M_i]\!]^+_\rho$ 则，$[\![f(M_0, \cdots, M_{n-1}]\!]$，$\cdots$，$[\![M_{n-1}]\!]^+_\rho)$ $[\![f(M_0, \cdots, M_{n-1}]\!]^+_\sigma)$

$= \rho_D(f)\ [\![M_i]\!]^+_\rho, \cdots, [\![M_{n-1}]\!]^+_\rho)\ [\![f(M_0, \cdots, M_{n-1}]\!]^+_\rho$

4) 若 $M = \lambda^+_\alpha.N$ 其中 $\alpha \in S(E)$，$[\![\,]\!]^+_\sigma = [\![\,]\!]^+_\rho$，则 $[\![\lambda^+_\alpha.]\!]^+_\sigma = [\![\lambda_x.N[\alpha \leftarrow x]]\!]_\sigma = [\![\lambda_x.N[\alpha \leftarrow x]]\!]_\rho = [\![\lambda^+_\alpha.]\!]^+_\rho$.

§4. λ^+ 系统模型的构造

设 $P = \{\top, \bot\}$，我们可以得到一自由 $\sum$ 代数 $< T_{\sum}(p), \rho^p_{\sum} >$[2]，定义偏序关系 $\leq_p$：

1) 任意 $x \in T_{\sum}(p)$，$x \leq_p \top, \bot \leq_p x$.

2) 对 $f \in F_n, n > 0$，若 $x_i \leq_p y_i$，其中 $x_i, y_i \in T_{\sum}(p)$，$i \in \bar{n}$，则 $\rho^p_{\sum}(f)(x_0, \cdots, x_{n-1}) \leq_p \rho^p_{\sum}(f)\ (y_0, \cdots, y_{n-1})$. 显然，$< T_{\sum}(p), \rho^p_{\sum} \leq_p >$ 是一连续 $\sum$ 代数。

令 $R = T_{\sum}(p)/\equiv_E$，其中 $\equiv_E$ 是由 E 生成的同余关系。若 $f \in T_{\sum}(p)$，f 的同余类记为 $[f]$，ρ_R 定义为：

1) 对 $f \in F_0$，$\rho_R(f) = [f]$

2) 对 $f \in F_n$，$n > 0, \rho_R(f)([t_0, \cdots, [t_{n-1}]) = [f(t_0, \cdots, t_{n-1}]$

可以证明[2]，ρ_R 的定义是独立于 $[t_i]$ 中 t_i 的选取。这样可得到一个 E 模型：$< R, \rho_R >$

对 R 中的元素定义偏序关系 $\leq_R$：

$x \leq_R y \Longleftrightarrow \exists t_1, t_2 \in T_{\sum}(p), x = [t_1],\ y = [t_2],\ t_1 \leq t_2$

定理 15. $< R,\ \rho_R,\ \leq_R >$ 是 E 的连续模型。

证明：只需证明偏序关系 $\leq_R$ 满足定义 11 中的条件即可。

1) 对任意 $x \in R$，设 $x = [t]$，因为 $\bot \leq_p t$，$t \leq_p T$，则 $[t] \leq_R\ [\top]$，$[\bot] \leq_R [t]$，即 $x \leq_R [\top]$，$[\bot] \leq_R x[t]$.

2) 对 $f \in F_n, n > 0$，若 $x_i \leq_R y_i$，其中 $i \in \bar{n}$，$x_i, y_i \in R$ 则存在 $u_i, v_i \in T_{\sum}(p)$ 满足 $u_i \leq_p v_i$ 且 $x_i = [u_i]$，$y_i = [v_i]$ 我们可作如下推导：

$\rho^p_{\sum}(f)(u_0, \cdots, u_{n-1}) \leq_p\ \rho^p_{\sum}(f)\ (v_0, \cdots, v_{n-1})$

$f(u_0, \cdots, u_{n-1}) \leq_p\ f(v_0, \cdots, v_{n-1})$

$[f(u_0, \cdots, u_{n-1})] \leq_R\ [r(v_0, \cdots, v_{n-1}]$

$\rho_R(f)([u_0], \cdots, [u_{n-1}]) \leq_R\ \rho_R(f)([v_0], \cdots, [v_{n-1}])$

即 $\rho_R(f)(x_0, \cdots, x_{n-1}) \leq_R\ \rho_R(f)(y_0, \cdots, y_{n-1})$.

我们把 R 记作 D_0，并考虑连续函数集 $D_1 = [D_0 \to D_0]$.

定义ρ_{D_1}如下：

1) 对$f \in F_0$，$\rho_{D_1}(f) = \lambda_{\alpha \in D_0} \cdot \rho_{D_0}(f)$

2) 对$f \in F_n$，$n > 0$，$\rho_{D_1}(f)(f_0, \cdots, f_{n-1}) = g$，其中$f_i \in D_i$，$i \in \bar{n}$，对任意$x \in D_0$，$g(x) = \rho_{D_0}(f)(f_0(x), \cdots, f_{n-1}(x))$.

定理16. g是从D_0到D_0的一个连续函数。

证明：只要证明所有有向集$X \sqsubseteq D_0$，$g(\cup X) = \cup g(X)$。因为$< D_0, \leq_{D_0} >$是格，有向集的上确界总是存在的，所以只要证明$g(\cup x)$是$g(x)$上确界。

$g(\cup X) = \rho_{D_0}(f)(f_0)(\cup X), \ldots, f_{n-1}(\cup X) = \rho_{D_0}(f)(\cup f_0(X), \cdots, \cup f_{n-1}(X))$ 对任意$x \in X$，因为$f_i(X) \leq_{D_0} \cup f_i(X)$，则

$\rho_{D_0}(f_0(x), \cdots, f_{n-1}(x)) \leq_{D_0} \rho_{D_0}(f)(\cup f_0(X), \cdots, \cup f_{n-1}(X))$ 即$g(x) \leq_{D_0} g(\cup X)$. $g(\cup X)$是$g(x)$的上界。

若$g(x)$有一上界t，则t或者为T_{D_0}，或者为$\rho_{D_0}(f)(t_0, \cdots, t_{n-1})$，我们要证明$g(\cup X) \leq_{D_0} t$.

1) 若$t = T_{D_0}$，则$g(\cup X) \leq_{D_0} t$显然成立.

2) 若$t = \rho_{D_0}(f)(t_0, \cdots, t_{n-1})$，其中$f_i(X) \leq_{D_0} t_i$即$t_i$是$f_i(X)$的上界，因此$\cup f_i(X) \leq_{D_0} t_i$.

因为f_i是连续函数，则$f_i(\cup X) = \cup f_i(X) \leq_{D_0} t$，由此推出：$\rho_{D_0}(f)(f_0(\cup X), \cdots, f_{n-1}(\cup X)) \leq_{D_0} \rho_{D_0}(f)(t_0, \cdots, t_{n-1})$，这就是说$g(\cup X) \leq_{D_0} t$，$g(\cup X)$是$g(X)$的最小上界，即

$$g(\cup X) = \cup g(X).$$

从定理16我们可得到，$< D_1, \rho_{D_1} >$是一个$\sum$代数，并且是一个E模型。定义偏序关系$\leq_{D_1}$：

任意$h, k \in D_1$，$h \leq_{D_1} k \Longleftrightarrow$ 注意$x \in D_0$，$h(x) \leq_{D_0} k(x)$.

容易验证$\leq_{D_1}$满足定义11中的条件，因此$< D_1, \rho_{D_1}, \leq_{D_1} >$是E连续模型。

按同样方法，我们可以从D_1构造D_2，从D_2构造D_3，由此得到一序列$\{D_n\}$，其中$< D_n, \rho_{D_n}, \leq_{D_n} >$都是E的连续模型，[3]中证明了按上述方法构造的$D_\infty$是纯λ系的模型，并给出了作用“·”及映射〖〗”的定义。我们分别定义ρ_{D_∞}及$\leq_{D_\infty}$为：$< \rho_{D_0}, \rho_{D_1}, \cdots >$，$< \leq_{D_0}, \leq_{D_1}, \leq_{D_2} >$，容易验证$< D_\infty, \rho_{D_\infty}, \leq_{D_\infty} >$是E连续模型，由定理14可知，$< D_\infty, \cdot, [\![<]\!]^{+} >$是$\lambda^+$系统的模型。

致谢

本文写作过程中得到林凯同志的很多帮助，特此鸣谢。

参考文献

[1] Sun Yong-qiang, Lin Kai, λ-plus calculus system with algebraic operators, Technical Report, Dept. of Information Science, University of Tokyo, 1989. 7.

[2] Goguen, J., Thatcher, J., Wagner, E., An initial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data type, Current trends in Programming Methodology, IV, Data Structuring (R. T. Yeh, Ed) Prentice Hall, New Jersey (1978).

[3] Hindley, R., Seldin, J., Introduction to Combinators and λ-calculus, Cambridge University Press, (1986).