算子 Fuzzy 逻辑中的 λ-蕴涵和 λ-强蕴涵*

刘叙华

(吉林大学计算机科学系，长春)

λ-IMPLYING AND λ-STRONG IMPLYING IN OPERATOR FUZZY LOGIC

Liu Xuhua

(*Jilin University, Changchun*)

ABSTRACT

In this paper, we introduce the concepts of λ-implying, λ-strong implying, λ-weak logical consequence and λ-logical consequence. We prove that λ-resolvent of C_1 and C_2 is a λ-logical consequence of $(C_1 \wedge C_2)$ and completeness theorem of λ-resolution.

摘 要

在本文中，我们引进了算子模糊逻辑中的 λ-蕴涵和 λ-强蕴涵的概念，λ-逻辑结果和 λ-弱逻辑结果的概念。证明了两子句的的 λ-归结式是这两个子句的 λ-逻辑结果，从而完成了 λ-归结的完备性定理的证明。

§1. 引 言

为了研究形式模糊推理，我们在[0,1]区间上的模糊逻辑[1]、模糊语言逻辑[2]、格上的模糊逻辑[3]的基础上，于1984年提出了算子模糊逻辑以及在其中的 λ-归结推理方法[4,5]，并获得了一系列结果[6,7,8]。我们还将处理相等谓词的著名的调整方法(Paramodulation)引入了算子模糊逻辑[9]。

但是，在我们已发表的论文中，直到现在还没有讨论，什么是算子模糊逻辑中的模糊蕴涵。正因为如此，我们在引进 λ-归结方法后，讨论其完备性时，只得到了完备性定理

* 1989年3月25日收到。

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

的一半[5]，亦即，我们证明了：若子句集是 λ-恒假的，则存在从 S 推出 λ-□的 λ-归结演绎．可是，我们还不知道，如果对一个子句集 S，使用 λ-归结方法，推出一个 λ-□时，那么 S 是不是 λ-恒假的？

回答是肯定的，这篇论文就解决这个问题。

§2. 准备知识

为了方便，我们列出少数几个算子模糊逻辑中的必须的概念(见文献[5])：

定义． 设 G 是公式，$\lambda\in[0,1]$．如果对任意解释 I，都有 $T_I(G)>\lambda$，则称 G 是 λ-恒真的；如果 $T_I(G)<\lambda$，则称 G 是 λ-恒假的．

今后，我们将假设 λ 为[0,1]区间中任意一个固定的数．

定义． 设 $\lambda_1 L$ 和 $\lambda_2 L$ 是两个文字，λ_1，$\lambda_2\in[0,1]$．如果 $\lambda>0.5$ 并且 $\lambda_1>\lambda$ 同时 $\lambda_2<(1-\lambda)$，或者 $\lambda_1<(1-\lambda)$同时 $\lambda_2>\lambda$(如果 $\lambda<0.5$ 则恰好相反)，则称 $\lambda_1 L$ 和 $\lambda_2 L$ 是 λ-互补的．

定义． 设 λ_1 和 λ_2 是两个文字，λ_1，$\lambda_2\in[0,1]$．如果 $\lambda>0.5$ 并且 $\lambda_1>\lambda$ 同时 $\lambda_2>\lambda$，或者 $\lambda_1<(1-\lambda)$同时 $\lambda_2<(1-\lambda)$(如果 $\lambda<0.5$ 则恰好相反)，则称 $\lambda_1 L$ 和 $\lambda_2 L$ 是 λ-相似的．

定义． 设 C_1 和 C_2 是无公共变量的子句，$\lambda_1 L_1$ 和 $\lambda_2 L_2$ 分别是 C_1 和 C_2 中文字．如果 L_1 和 L_2 有一个 MGU[10](Most General Unifier)σ，并且 $\lambda_1 L_1^\sigma$ 和 $\lambda_2 L_2^\sigma$ 是 λ-互补的，则下面的文字集合代表的子句：

$(C_1^\sigma-S_1)\bigcup(C_2^\sigma-S_2)$

称为 C_1 和 C_2 的二元 λ-归结式，记为 $R_\lambda(C_1, C_2)$，其中

$S_1=\{\lambda^* L^\sigma|(\lambda^* L^\sigma\in C_1^\sigma)\wedge(\lambda^* L^\sigma$ 和 $\lambda_1 L_1^\sigma$ 是 λ-相似的$)\}$

$S_2=\{\lambda^* L^\sigma|(\lambda^* L^\sigma\in C_2^\sigma)\wedge(\lambda^* L^\sigma$ 和 $\lambda_2 L_2^\sigma$ 是 λ-相似的$)\}$

λ-因子和 λ-归结式的概念，见文献[5]．

定义． 设 S 是子句集，S_λ 称为 S 的 λ-准约化集，如果 S_λ 是用如下方法得到：对任意 $\lambda^* L\in S$，

1.若 $\lambda>0.5$，$(1-\lambda)<\lambda^*<\lambda$，则从 S 中删除 $\lambda^* L$．

2.若 $\lambda<0.5$，$\lambda<\lambda^*<(1-\lambda)$，则从 S 中删除 $\lambda^* L$．

显然，$S_\lambda=S_{(1-\lambda)}$。

今后，为清晰起见，子句集 S 的 λ-准约化集记为 S_λ，S 中子句 C 的 λ-准约化子句记为 C^λ。

§3. λ-蕴涵和 λ-强蕴涵

我们知道，在二值逻辑中，对于公式 G，H 下面三个命题是等价的：

命题 1． 对任意解释 I，都有 $T_I(G)<T_I(H)$．

命题 2． 对任意解释 I，若 $T_I(G)=1$，则 $T_I(H)=1$．

命题 3． 对任意解释 I，公式$(G\to H)$是恒真的．

因此，在二值逻辑中，用上面三个命题中的任一个，都可做为公式间蕴涵的定义，而将其

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn

余两个做为蕴涵的性质.

现在，我们将这三个命题，在算子模糊逻辑中叙述如下:

命题1. 对任意解释I，都有 $T_I(G) \leqslant T_I(H)$.

命题2. 对任意解释I，若 $T_I(G) > (1-\lambda)$，则 $T_I(H) \geqslant \lambda$.

命题3. 对任意解释I，$(G \rightarrow H)$是 λ-恒真的.

下面，我们讨论这三个命题间的关系.

定理1. 命题2和命题3是等价的.

证: 假设当 $T_I(G) > (1-\lambda)$时，$T_I(H) \geqslant \lambda$ 是成立的. 于是，

$$\begin{aligned} T_I(G \rightarrow H) &= T_I(\sim G \vee H) \\ &= \mathrm{Max}\{T_I(\sim G), T_I(H)\} \\ &= \mathrm{Max}\{1-T_I(G), T_I(H)\} \\ &\geqslant \lambda. \end{aligned}$$

假设 $T_I(G \rightarrow H) \geqslant \lambda$ 是成立的. 对任意I，若 $T_I(G) > (1-\lambda)$，则 $1-T_I(G) < \lambda$，所以，必须有 $T_I(H) \geqslant \lambda$，证毕.

由命题1推不出命题2.

例如，如 $G = 0.5P$，$H = 0.7Q \vee 0.3Q$，$\lambda = 0.8$. 显然，对任意I，都有 $T_I(G) \leqslant T_I(H)$. 取 $I = \{P : T, Q : T\}$，于是，$T_I(G) > (1-\lambda) = 0.2$，$T_I(H) = 0.7 < \lambda$.

由命题2推不出命题1.

例如，设 $G = 0.7P$，$H = 0.6Q$，$\lambda = 0.5$，使G的真值大于0.5的解释只有一个: $\{P : T\}$.

显然，若 $T_I(G) > 0.5$，必有 $T_I(H) \geqslant 0.5$，但是，$T_I(G) \not\leqslant T_I(H)$，对 $I\{P : T, Q : T\}$就是如此.

因此，很自然地我们将用命题2或3做为蕴涵的定义.

定义. 设G，H是公式，如果公式$(G \rightarrow H)$是 λ-恒真的，则称G是 λ-蕴涵H，也称H是G的 λ-弱逻辑结果，记为 $G \Rightarrow H$.

显然，若对任意I，都有 $T_I(G) \leqslant (1-\lambda)$或者 $T_I(H) \geqslant \lambda$，则有 $G \Rightarrow H$.

定理2. 设 C_1 和 C_2 是子句，C_1^λ 和 C_2^λ 分别是 C_1 和 C_2 的 λ-准约化子句，于是，

$$(C_1^\lambda \wedge C_2^\lambda) \Rightarrow R_\lambda(C_1^\lambda, C_2^\lambda)$$

证: 对任意I，若 $T_I(C_1^\lambda) > (1-\lambda)$，$T_I(C_2^\lambda) > (1-\lambda)$. 因为，对 C_1^λ 和 C_2^λ 中任一文字 $\lambda^* L$，必须有:

$$\lambda^* > \lambda \text{ 或 } \lambda^* < (1-\lambda) \quad (\text{当 } \lambda \geqslant 0.5 \text{ 时})$$

$$\lambda^* > (1-\lambda) \text{或 } \lambda^* < \lambda \qquad (\text{当 } \lambda < 0.5 \text{ 时})$$

所以，

$$T_I(C_1^\lambda) > \lambda, \ T_I(C_2^\lambda) > \lambda.$$

不失一般性，我们可以假设 R_λ 是二元 λ-归结式，并且 $\lambda \geqslant 0.5$，令

$$R_\lambda(C_1^\lambda, C_2^\lambda) = (C_1^{\lambda^*} - S_1) \cup (C_2^{\lambda^*} - S_2)$$

其中，

1. $\lambda_1 L_1$ 和 $\lambda_2 L_2$ 分别是 C_1^λ 和 C_2^λ 中的归结文字.

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

2. $\lambda_1<(1-\lambda)$，$\lambda_2>\lambda$。

3. $L_1^\sigma=L_2^\sigma$。

4. $S_i\{\lambda^* L^\sigma|(\lambda^* L^\sigma\in C_i^{\lambda^\sigma})\wedge(\lambda^* L^\sigma$ 和 $\lambda_i L_i^\sigma$ 是 λ-相似$)\}$，$i=1,2$。

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 C_1^λ 和 C_2^λ 中所有变量，再设

$$C_1^{\lambda^\sigma}=S_1\vee C_1{}'^\sigma$$
$$C_2^{\lambda^\sigma}=S_2\vee C_2{}'^\sigma$$

于是，

$$\lambda<T_I(C_1^{\lambda^\sigma})=T_I(S_1\vee C_1{}'^\sigma)=\prod_{(x_1,\cdots,x_n)\in D^n}\{T_I(S_1\vee C_1{}'^\sigma)\},$$

$$\lambda<T_I(C_2^{\lambda^\sigma})=T_I(S_2\vee C_2{}'^\sigma)=\prod_{(x_1,\cdots,x_n)\in D^n}\{T_I(S_2\vee C_2{}'^\sigma)\}.$$

任取$(x_1^0,\cdots,x_n^1)\in D^n$，

若 $T_I(L_1^\sigma|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)})=T$，则 $T_I(S_1<(1-\lambda)$，于是，

$$T_I(C'^\sigma_1|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)})>\lambda.$$

若$T_I(L_1^\sigma|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)})=F$，则$T_I(S_2)<(1-\lambda)$，于是，

$$T_I(C_2{}'^\sigma|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)})>\lambda.$$

所以，$T_I(C_1{}'^\sigma\vee C_2{}'^\sigma|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)})>\lambda$，亦即

$$T_I(R_\lambda(C_1^\lambda,C_2^\lambda))>\lambda$$ 证毕。

由定理 2 的证明可以看出，下面的定理是成立的。

定理 3. 设 C_1 和 C_2 是两个子句，$R_\lambda(C_1,C_2)$是 λ-归结式．于是，对任意 I，若 $T_I(C_1)>\lambda$，$T_I(C_2>\lambda$，则必有

$$T_I(R_\lambda(C_1,C_2))>\lambda.$$

为此，我们引进如下定义。

定义． 设 G，H 是两个公式，对任意解释 I，如果 $T_I(G)>\lambda$，则有 $T_I(H)>\lambda$，称 G 是 λ-强蕴涵 H，记为 G⇛H，H 称为 G 的 λ-逻辑结果。

由定理 2，3 总结结论如下：

1. 对任意两个子句 C_1，C_2，它们的 λ-准约化子句的 λ-归结式是这两个 λ-准约化子句的 λ-弱逻辑结果，亦即

$$C_1^\lambda\wedge C_2^\lambda\Rightarrow R_\lambda(C_1^\lambda,\ C_2^\lambda)$$

2. 还能证明，任意两个子句 C_1 和 C_2 的 λ-归结式是 C_1 和 C_2 的 λ-弱逻辑结果。

3. 我们证明了，任意两个子句 C_1 和 C_2 的 λ-归结式是 C_1 和 C_2 的 λ-逻辑结果，亦即

$$C_1\wedge_2 \Rrightarrow R_\lambda(C_1,C_2)$$

不难证明：当 $\lambda=0.5$ 时，下面两个结论是正确的：

© 中国科学院软件研究所 http://www.jos.org.cn

1. 任意两个子句 C_1 和 C_2 的 λ-归结式是 C_1 和 C_2 的 λ-弱逻辑结果，即

$$C_1 \wedge C_2 \Rightarrow R_\lambda(C_1, C_2)$$

2. 若 $G \Rrightarrow H$，则必有 $G \Rightarrow H$。

关于 λ-蕴涵和 λ-强蕴涵有如下性质:

性质 1. 设 A 是公式，于是，

1.$A \Rrightarrow A$。　2.当 $\lambda < 0.5$ 时，$A \Rightarrow A$

性质 2. 设 A，B，C 是公式，于是，

1.若 $A \Rrightarrow B$，$B \Rrightarrow C$，则 $A \Rrightarrow C$。　2.当 $\lambda > 0.5$ 时，若 $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$。

性质 3. 设 A，B，C 是公式，于是，

1.若 $A \Rrightarrow B$，$A \Rrightarrow C$，则 $A \Rrightarrow (B \wedge C)$。　2.若 $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$。

利用我们得到的结果，可将文献[5]中关于 λ 归结的完备性定理重述如下:

定理 4(λ-归结的完备性). 设 $\lambda > 0.5$，子句集 S 是 λ-恒假的，当且仅当存在从 S 推出 λ-□的 λ-归结演绎。

证. (⇒)见文献[5]。

(⇐)。若存在从 S 推出 λ-□的 λ-归结演绎，并且 S 不是 λ-恒假的，则存在解释 I，使得

$$T_I(S) > \lambda.$$

因为，$C_1 \wedge C_2 \Rrightarrow R_\lambda(C_1, C_2)$，并且 λ-强蕴涵有传递性，所以，

$$T_I(\lambda\text{-}\square) > \lambda.$$

这矛盾于 λ-□的定义(对 λ-□中的任一文字 $\lambda^* L$，都有 $(1-\lambda) < \lambda^* < \lambda$)。证毕。

参考文献

[1] Lee R. C. T. & Chang C. L., Some Properties of Fuzzy Logic, Information and Control, 5, 1971.

[2] Zadeh, L. A., The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning, Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Inf. Sci. 8 No.3, 4, 9, No.1, 1975.

[3] 刘叙华，广义模糊逻辑和锁语义归结原理，计算机学报，3，1980.

[4] Liu X. H. & Xiao H., Operator Fuzzy Logic and Fuzzy Resolution, Proc. of the 15-th ISMVL, Kingston, CANADA, 5, 1985.

[5] 刘叙华、肖红，算子 Fuzzy 逻辑和 λ-归结方法，计算机学报，2，1989.

[6] Liu X. H. & Fang K. Y., Fuzzy Reasoning on λ-Horn Set, Proc. of the 16-th ISMVL, Blacksburg, U.S.A., 5, 1986.

[7] Liu X. H., Chang, Carl K. & Jeff. J. P. Tsai, Fuzzy Reasoning Based on λ-LH-Resolution, Proc. of the IEEE 10-th International Computer Software & Application Conference, Chicago, U.S.A. 10, 1986.

[8] 刘叙华、杨凤杰，λ-Horn 集上的 λ-单元锁归结，科学通报，No.1，1989.

[9] 刘叙华，算子 Fuzzy 逻辑中带有相等关系的 Fuzzy 推理，中国科学，A 辑，11，1987.

[10] 刘叙华、姜云飞，定理机器证明，科学出版社，1987.

© 中国科学院软件研究所　http://www.jos.org.cn